Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Mimma de Acutis

Regolarità di frontiere minimali con ostacoli sottili

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 61 (1979), p. 133-144

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1979__61__133_0>

Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 61 (1979)

Regolarità di frontiere minimali con ostacoli sottili.

Mimma de Acutis (*)

Introduzione.

Scopo di questo lavoro è dimostrare un risultato di regolarità per superfici minime con ostacoli sottili nel caso parametrico. Lo studio di problemi di frontiere minimali con ostacolo è stato affrontato da M. Miranda nell'ambito della teoria dei perimetri come il problema di trovare un insieme B di perimetro minimo nella classe degli insiemi contenenti un insieme assegnato E (ostacolo).

Si può vedere facilmente che, per la definizione di perimetro, se si sostituiscono l'insieme minimale B e l'ostacolo E con due insiemi equivalenti (come misura di Lebesgue) soddisfacenti ancora la condizione $B \supseteq E$ il minimo considerato non cambia e gli insiemi che danno il minimo nella nuova classe sono equivalenti a quelli che fornivano il minimo nella vecchia. In altre parole questa impostazione del problema ignora completamente eventuali ostacoli di misura di Lebesgue nulla.

Per poter prendere in esame anche ostacoli di questo tipo (ostacoli sottili) De Giorgi ha introdotto in [1] un nuovo problema di area minima che consiste essenzialmente nel sostituire la condizione $B \supseteq E$ con una ragionevole penalizzazione.

In [2] è stata studiata in dettaglio la formulazione variazionale di questo problema ed è stato provato che il nuovo funzionale introdotto da De Giorgi ammette minimo.

Nella prima parte di questo lavoro diamo un risultato di regolarità di tale minimo; più precisamente dimostriamo che, se l'ostacolo E è

(*) Indirizzo dell'A.: Facoltà di Scienze, Dipartimento di Matematica e Fisica - 38050 Povo (Trento), Italy.

di classe C^1, esiste un aperto Ω_0 contenente $E - \partial E$ in cui la soluzione ha frontiera di classe C^1. La « sottigliezza » dell'ostacolo non consente naturalmente di ottenere risultati di regolarità fin sul bordo di E; facciamo però vedere che l'aperto di regolarità Ω_0 non può essere troppo schiacciato vicino a ∂E e quindi in sostanza che la soluzione può avere singolarità su ∂E ma tende ad esse con ragionevole regolarità.

Studiamo infine il comportamento della soluzione B in prossimità dell'ostacolo e dimostriamo che se x_0 è un punto qualsiasi dell'ostacolo E allora o B ha densità maggiore o uguale di $\frac{1}{2}$ in x_0 oppure tutta la componente connessa di E che contiene x_0 non tocca B (nel senso che B ha densità zero in ogni suo punto) e in questo caso la componente connessa è necessariamente minimale in Ω.

Osserviamo, per concludere, che quest'ultimo caso può effettivamente verificarsi; ad esempio se $\Omega = R^2$ ed $E = \{(x, y) \in R^2 \colon |x| < 1, y = 0\}$ il minimo del funzionale considerato è 4 (cioè esattamente la misura di E contata due volte) e viene realizzato per $B = \emptyset$.

Ringrazio il prof. E. Giusti con il quale ho discusso i risultati di questo lavoro.

1. Siano Ω un aperto ed E un boreliano di $\mathbb{R}^n$.

Per noti teoremi di compattezza e semicontinuità esiste un insieme di Borel B_0 tale che (1)

$$P(B_0, \Omega) = \min \{P(B, \Omega), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), B \supseteq E\} . \tag{I}$$

È evidente che il minimo così ottenuto non cambia se si sostituisce l'insieme E con uno equivalente (come misura di Lebesgue); in altri termini una tale impostazione del problema di frontiere minime con ostacolo ignora completamente ostacoli di misura di Lebesgue nulla.

Per poter prendere in esame anche ostacoli così fatti, De Giorgi ha introdotto in [1] un nuovo problema di frontiere minime con ostacolo che soddisfa tale esigenza ed ammette soluzione in una opportuna classe di insiemi.

Poichè in questo lavoro intendiamo provare alcuni risultati relativi al minimo di questo nuovo problema, ci sembra utile, per comodità del lettore, richiamare brevemente le definizioni e i risultati più interessanti di [1].

(1) Con $P(B, \Omega)$ indichiamo il perimetro di B in Ω, nel senso di De Giorgi.

Introduciamo innanzitutto una nuova classe di insiemi, meno generale della classe $\mathcal{B}$ dei boreliani, che indicheremo con G_n.

DEFINIZIONE 1. Un insieme di Borel $B \subset \mathbb{R}^n$ appartiene alla classe G_n se soddisfa le seguenti condizioni (²)

$$\text{(i)} \quad \lim_{\varrho\to 0} \varrho^{-n} \operatorname{mis}\big(B_\varrho(x) \cap B\big) = 0 \Rightarrow x \notin B,$$

$$\text{(ii)} \quad \lim_{\varrho\to 0} \varrho^{-n} \operatorname{mis}\big(B_\varrho(x) - B\big) = 0 \Rightarrow x \in B.$$

È facile vedere che il problema (I) non ha, in generale, soluzione nella classe G_n; occorre quindi definire un nuovo funzionale per il quale si possa dare (come in ogni problema variazionale accettabile) un teorema di semicontinuità.

DEFINIZIONE 2. Per ogni $\varepsilon > 0$, definiamo su $P(\mathbb{R}^n)$ la seguente funzione d'insieme

$$\sigma_\varepsilon(E; \Omega) = \inf\left\{P(F, \Omega) + \frac{\operatorname{mis}(F \cap \Omega)}{\varepsilon}, \quad F \in G_n, F \supset E \cap \Omega\right\}$$

e poniamo

$$\sigma(E; \Omega) = \sup_{\varepsilon>0} \sigma_\varepsilon(E; \Omega) .$$

La funzione σ così definita è, ([2]), una misura esterna $\mathcal{B}$-regolare (cioè i Boreliani sono σ-misurabili) e completamente additiva sugli insiemi di Borel.

Vale inoltre il seguente risultato

TEOREMA 1.1. *Esistono due costanti $C_1(n)$ e $C_2(n)$ tali che per ogni $F \subset \mathbb{R}^n$ risulta*

$$C_1(n) \cdot \sigma(F; \mathbb{R}^n) \leqslant H_{n-1}(F) \leqslant C_2(n) \sigma(F; \mathbb{R}^n) .$$

Se F è un insieme di Borel contenuto in una ipersuperficie di classe C^1, allora

$$\sigma(F; \mathbb{R}^n) = 2H_{n-1}(F) .$$

(²) $B_\varrho(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \colon |y - x| < \varrho\}$.

Possiamo finalmente formulare il nuovo problema di minimo con ostacolo a cui si è accennato sopra.

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} \text{Se } \Omega \text{ è un aperto ed } E \text{ un boreliano di } \mathbf{R}^n\text{, cercare il minimo del funzionale} \\ F(B;\, \Omega, E) = P(B, \Omega) + \sigma(E - B;\, \Omega) \ \text{(3)} \\ \text{al variare di } B \text{ nella classe } G_n\,. \end{cases}$$

Si è sostenuta cioè la condizione $B \supseteq E$ del problema (I) con una penalizzazione che, nel caso di ostacolo regolare, è proprio $2H_{n-1}(E - B)$ (Teorema 1.1) (e questo rende il problema (2) estremamente significativo). Il funzionale F definito da (II) è semicontinuo inferiormene (si veda il Teorema 10 di [1]) e vale dunque il

TEOREMA 1.2. *Siano Ω ed E un aperto e un boreliano di $\mathbf{R}^n$. Esiste allora un insieme $B \in G_n$ tale che*

$$F(B;\, \Omega, E) = \min \{F(A;\, \Omega, E),\, A \in G_n\}\,.$$

2. Affronteremo qui il problema della regolarità della soluzione del problema (II).

Sia Ω un aperto di $\mathbf{R}^n$. Per il Teorema 1.2 esiste un insieme $B \in G_n$ che minimizza il funzionale

$$F(B;\, \Omega, E) = P(B, \Omega) + \sigma(E - B;\, \Omega)$$

nella classe G_n, con E boreliano di $\mathbf{R}^n$ assegnato.

Poichè nel caso di ostacolo « grosso » la soluzione del problema (II) coincide con quella del problema (I), possiamo supporre (4) che E sia una varietà $(n-1)$-dimensionale.

Introduciamo per brevità alcune notazioni.

Se k è un intero non negativo e F, $G \in \mathbf{R}^n$ sono insiemi dati, scriviamo

$$F \simeq_k G \qquad \text{se} \qquad H_k(F \,\Delta\, G) = 0\,.$$

(3) Se $B \supseteq E$ è $F(B;\, \Omega, E) = P(B, \Omega)$.

(4) La regolarità della soluzione di (I) è stata studiata in [3].

Per ogni insieme $F \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ poniamo per $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$

$$F_{(\alpha)} = \left\{ x \in \mathbf{R}^n \colon \lim_{\varrho \to 0} \frac{\operatorname{mis}(B_\varrho(x) \in B)}{\operatorname{mis} B_\varrho(x)} = \alpha \right\}$$

e $\partial^* F$ indica, al solito, la frontiera ridotta di F.

Vale il seguente teorema di regolarità

TEOREMA 2.1. *Sia Ω un aperto di $\mathbf{R}^n$. Se E è una varietà $(n-1)$-dimensionale di classe C^1 e $B \in G_n$ è soluzione del problema* (II) *in Ω, allora per ogni punto $x \in E - \partial E$ esiste un intorno $U_x \subset \Omega$ di x tale che $\partial B \cap U_x$ è di classe C^1.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $x \in E - \partial E$. Consideriamo un compatto $K \subset \Omega$ con $x \in K$, tale che

i) $\displaystyle\int_{\partial K} |D\varphi_B| = 0,$

ii) $K \cap \partial E = \emptyset,$

iii) esiste una funzione $f \in C^1(\mathbf{R}^{n-1})$ con $E \cap K = \{x \in \mathbf{R}^n \colon x_n = f(x_1, \ldots, x_{n-1})\}$ e poniamo

$$K^- = \{x \in \mathbf{R}^n \colon x_n \geqslant f(x_1, \ldots, x_{n-1})\} \quad \text{e} \quad K^+ = \{x \in \mathbf{R}^n \colon x_n \leqslant f(x_1, \ldots, x_{n-1}\}.$$

La dimostrazione del teorema è basata essenzialmente sul fatto che gli insiemi

$$(1) \qquad M = B \cup K^- \qquad \text{e} \qquad M_1 = B \cup K^+$$

sono in qualche modo di frontiera minimale rispetto ad ostacoli « grossi » e quindi vale per essi il teorema di regolarità di [3]. Proveremo infatti che per ogni insieme $A \subset \mathbf{R}^n$ con $A \supset K^-$ e

$$\operatorname{spt}(A \,\Delta\, M)\ (^5) \Subset K \qquad \text{risulta} \qquad P(M, K) \leqslant P(A, K)$$

e analogamente per l'insieme M_1 rispetto all'ostacolo K^+. Sia dunque A un boreliano di $\mathbf{R}^n$ con $A \supset K^-$ e $\operatorname{spt}(A \,\Delta\, M) \Subset K$.

(5) $A \,\Delta\, M = (A - M)(M - A)$.

Posto

$$T = A \cap (B \cup K^+)$$

per la proprietà di minimo di B risulta

$$F(B; K, E) \leqslant F(T; K, E) .$$

Valutiamo ora separatamente ambo i membri di questa disuguaglianza, utilizzando il teorema 2.7 di [2].

Se $\mathring{K}$ è l'interno del compatto K, è intanto

$$\partial^* T \cap \mathring{K} \simeq_{n-1} \{[\partial^* A \cap (B \cup K^+)_{(1)}] \cup [A_{(1)} \cap \partial^*(B \cup K^+)] \cup \\ \cup \{x \in \partial^* A \cap \partial^*(B \cup K^+) \colon \nu_A(x) = \nu_{B \cup K^+}(x)\}\} \cap \mathring{K}$$

e

$$\partial^* A \cap \mathring{K} \simeq_{n-1} \{[\partial^*(A \cap K^+) \cap K^-_{(0)}] \cup [(A \cap K^+)_{(0)} \cap E] \cup \\ \cup \{x \in \partial^*(A \cap K^+) \cap E \colon \nu_{A \cap K^+}(x) = \nu_{K^-}(x)\}\} \cap \mathring{K}$$

dove $\nu_s(x)$ indica il versore normale esterno in x all'insieme S.
Con facili passaggi si ottiene che

$$\partial^* A \cap \mathring{K} \simeq_{n-1} \{[\partial^* A \cap K^+_{(1)}] \cup [\partial^* A \cap E]\} \cap \mathring{K}$$

e

$$\partial^* T \cap \mathring{K} \simeq_{n-1} \{[\partial^* A \cap K^+_{(1)}] \cup [\partial^* A \cap E \cap B_{(1)}] \cup [A_{(1)} \cap \partial^* B \cap K^+_{(0)}] \cup \\ \cup [A_{(1)} \cap E \cap B_{(0)}] \cup [\partial^* A \cap \{x \in E \cap \partial^* B \colon \nu_B(x) = \nu_{K^-}(x)\}] \cup \\ \cup [A_{(1)} \cap \{x \in E \cap \partial^* B \colon \nu_B(x) = \nu_{K^+}(x)\}]\} \cap \mathring{K} .$$

D'altra parte

$$T_{(0)} \cap \mathring{K} \simeq_{n-1} \{[A_{(0)} \cap (B \cup K^+)_{(1)}] \cup [A_{(1)} \cap (B \cup K^+)_{(0)}] \cup \\ \cup [A_{(0)} \cap (B \cup K^+)_{(0)}] \cup [\partial^* A \cap (B \cup K^+)_{(0)}] \cup [\partial^*(B \cup K^+) \cap A_{(0)}] \cup \\ \cup \{x \in \partial^* A \cap \partial^*(B \cup K^+) \colon \nu_A(x) = \nu_{B \cap K^+}(x)\}\} \cap \mathring{K}$$

vale a dire

$$T_{(0)} \cap \mathring{K} \simeq_{n-1} \{[\partial^* A \cap B_{(0)} \cap E] \cap \\ \cap \{x \in \partial^* A \cap \partial^* B \cap E \colon \nu_B(x) = \nu_{K^+}(x)\}\} \cap \mathring{K}\,.$$

Si ottiene dunque

$$\begin{aligned}(2)\qquad F(T;\, \mathring{K}, E) = P(A, \mathring{K}) + H_{n-1}(E \cap B_{(0)} \cap \mathring{K}) + \\ + H_{n-1}(\partial^* B \cap K^+_{(0)}) + H_{n-1}(\{x \in E \cap \partial^* B \colon \nu_B(x) = \nu_{K^+}(x)\} \cap \mathring{K})\,,\end{aligned}$$

inoltre, essendo

$$\partial^* B \cap \mathring{K} \simeq_{n-1} \{[\partial^* B \cap M_{(1)}] \cup \{x \in \partial^* B \cap \partial^* M \colon \nu_B(x) = \nu(x)\}\} \cap \mathring{K}$$

e

$$\partial^* M \cap \mathring{K} \simeq_{n-1} \{[E \cap B_{(0)}] \cup \{x \in \partial^* B \cap \partial^* M \colon \nu_B(x) = \nu_M(x)\}\} \cap \mathring{K}$$

risulta

$$\begin{aligned}(3)\qquad F(B;\, \mathring{K}, E) = P(M, \mathring{K}) + H_{n-1}(E \cap B_{(0)} \cap \mathring{K}) + \\ + H_{n-1}(\partial^* B \cap K^+_{(0)}) + H_{n-1}(\{x \in E \cap \partial^* B \colon \nu_{K^+}(x) = \nu_B(x)\} \cap \mathring{K})\,.\end{aligned}$$

da (2) e (3) segue subito che

$$P(M, \mathring{K}) \leqslant P(A, \mathring{K})$$

e quindi M ha frontiera minimale in $\mathring{K}$ rispetto all'ostacolo K^-; allo stesso modo si prova che M_1 (definito dalla (1)) ha frontiera minimale in $\breve{K}$, rispetto all'ostacolo K_+. Esistono allora (si veda il Teorema 2 di [3]) due aperti Ω^K e Ω_1^K in $\breve{K}$, contenenti $E \cap \breve{K}$ tali che

$$\partial M \cap \Omega^K \quad \text{e} \quad \partial M_1 \cap \Omega_1^K \quad \text{sono di classe } C^1\,.$$

Abbiamo così trovato un intorno di x, $U_x = \Omega^k \cap \Omega_1^k$ in cui ∂B è di classe C^1. C.V.D.

Per il risultato precedente è dunque possibile trovare un aperto

$$\Omega_0 \supset (E - \partial E) \cap \Omega \quad \text{tale che} \quad \partial B \cap \Omega_0 \quad \text{è di classe } C^1\,.$$

Abbiamo così ottenuto un risultato di regolarità che essenzialmente è dello stesso tipo di quello provato, nel caso di ostacolo grosso, da M. Miranda in [3].

Naturalmente la « sottigliezza » dell'ostacolo non consente di ottenere risultati di regolarità fin sul bordo di E; si può però vedere che l'aperto Ω_0, ottenuto come unione di aperti di regolarità (e quindi a-priori poco controllabile) non può andare a schiacciarsi vicino a ∂E. Più precisamente:

Teorema 2.2. *Sia E una varietà di classe C^1. Per ogni $x \in \partial E$ esiste un intorno U di x e un settore S_x^α, di vertice x e ampiezza $\alpha > 0$, tale che*

$$\Omega_0 \cap U \supset S_x^\alpha \cap U .$$

Dimostrazione. Innanzitutto, essendo E di classe C^1 in Ω è possibile estendere E con regolarità a tutto $\mathbf{R}^n$; sia $\tilde{E}$ la varietà così ottenuta.

Proveremo il teorema per assurdo. Sia $x_0 \in E$ tale che per ogni intorno U di x_0 e per ogni $\alpha > 0$ è

$$\Omega_0 \cap U \not\supset S_{x_0}^\alpha \cap U .$$

Deve essere evidentemente $x_0 \in \partial E \cap \partial B$. In tal caso è possibile costruire una successione $\{x_h\} \subset \partial B$ con

1) $x_h \notin \Omega_0$ per ogni intero h, $x_h \to x_0$ per $h \to \infty$,

2) $\lim\limits_{h\to\infty} \dfrac{|x_h - y_h|}{|z_h - y_h|} = 0$

dove $y_h \in E$ e $z_h \in \partial E$ sono tali che

$$|x_h - y_h| = \operatorname{dist}(x_h, E) \qquad \text{e} \qquad |y_h - z_h| = \operatorname{dist}(y_h, \partial E) .$$

Supponiamo per comodità che $x_0 = 0$ e che il versore normale esterno ad $\tilde{E}$ in x_0 sia $(0, \ldots, 1)$. Per ogni intero positivo h consideriamo la trasformazione di $\mathbf{R}^n$ in sè che porta y_h in 0 e x_h in $(0, \ldots, 1)$; essa è evidentemente composta da una rotazione, una traslazione e una omotetia di rapporto $1/|x_h - y_h|$.

Con le stesse notazioni del Teorema 2.1 (si ricordi in particolare la (1)) con $K_h = \overline{B_{|z_h - y_h|}(y_h)}$, l'insieme M_h ha frontiera minimale rispetto all'ostacolo K_h^-; dunque il nuovo insieme M'_h, immagine di M_h tramite la trasformazione, ha frontiera minimale in $B_{|z_h-y_h|/|x_h-y_h|}(0)$ rispetto all'ostacolo $K_h^{-'}$, immagine di K_h^-.

Inoltre

$$\partial K_h^{-'} \to \{x\colon x_n = 0\}\,, \qquad K_h^{-'} \to \{x\colon x_n < 0\}\,, \qquad B_{|z_h-y_h|/|x_h-y_h|}(0) \to \mathbb{R}^n$$

e, a meno di sottosuccessioni, risulta

$$M'_h \to M' \quad \text{in} \quad L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)\,.$$

L'insieme limite M' deve avere ([5]) frontiera minimale in $\mathbb{R}^n$ e contenere $\{x\colon x_n < 0\}$; risulta quindi ([3]) $M' = \{x\colon x_n < 1\}$. Per il Teorema 1 di [3], si ottiene così che per h sufficientemente grande ogni x_h è punto regolare di ∂B e il versore normale esterno a ∂B in x_h converge al versore normale esterno a $\tilde{E}$ in x_0. Siamo dunque arrivati ad un assurdo, giacchè in tal caso (Teorema 2 di [3]) esiste un $\varrho > 0$ tale che $B_\varrho(x_0) \cap \partial B \cap \Omega \subset \Omega_0$ e quindi, per h grande, $x_h \in \Omega_0$. C.V.D.

Vogliamo studiare infine il comportamento della soluzione B in prossimità dell'ostacolo.

Faremo vedere essenzialmente che l'insieme che realizza il minimo del funzionale F può contenere l'ostacolo anche attaccandosi ad esso sulla faccia « esterna », ma non può andare a schiacciarsi sull'ostacolo su entrambe le facce senza scomparire (6) (nel qual caso il minimo di $F(\cdot, \Omega)$ è pari alla misura dell'ostacolo contata due volte). Premettiamo un lemma del tipo « principio di massimo » per insiemi a curvatura media non negativa, dove: un insieme F ha bordo a curvatura media non negativa in $x_0 \in \partial F$ se

(A)
- i) esiste un aperto A contenente x_0 tale che $\partial F \cap A$ si può rappresentare come grafico di una funzione lipschitziana di $(n-1)$ variabili,
- ii) per ogni insieme $G \subset \mathbb{R}^n$ misurabile limitato con $\bar{G} \subset A$, risulta

$$P(F, A) \leqslant P(F \cup G, A)\,.$$

(6) Si veda l'esempio riportato nell'introduzione.

LEMMA 2.1. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$. Se Ω_1 e Ω_2 sono insiemi con bordo di curvatura media non negativa in $x_0 \in \Omega \cap \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ e se $\Omega \cap \Omega_2 \subset \Omega \cap \complement\Omega_1$, allora esiste un aperto $U \subset \Omega$, con $x_0 \in U$, tale che*

$$\partial\Omega_2 \cap U = \partial\Omega_1 \cap U.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $x_0 = 0$. Possiamo senz'altro supporre che

$$\Omega = B_R(0) \times (-a, a) \qquad \text{e} \qquad \complement\Omega_1 \cap \Omega = \{x \in \Omega : x_n \leqslant f(x_1, \ldots, x_{n-1})\}$$

con f lipschitziana. Se $\varrho < R$, chiamiamo $f_\varrho(x)$ la funzione continua in $B_R(0)$, coincidente con $f(x)$ su $B_R(0) - B_\varrho(0)$ e soluzione dell'equazione delle superfici minime in $B_\varrho(0)$ ([7]); risulta evidente $f_\varrho \geqslant f$.

Se $\Omega_\varrho = \{x \in \Omega : x_n \leqslant f_\varrho(x_1 - x_{n-1})\}$ è quindi

$$\Omega_\varrho \supset \complement\Omega_1 \cap \Omega .$$

Dall'essere

$$(1) \qquad P(\Omega_\varrho \cap \Omega_2, \Omega) + P(\Omega_\varrho \cup \Omega_2, \Omega) \leqslant P(\Omega_\varrho, \Omega) + P(\Omega_2, \Omega)$$

con

$$P(\Omega_2, \Omega) \leqslant P(\Omega_\varrho \cup \Omega_2, \Omega) \qquad \text{e} \qquad P(\Omega_\varrho, \Omega) \leqslant P(\Omega_\varrho \cap \Omega_2, \Omega)$$

(per ipotesi $\partial\Omega_2$ verifica la ii) e Ω_ϱ ha frontiera minimale in $B_\varrho(0) \cdot (-a, a)$ e coincide con $\Omega_\varrho \cap \Omega_2$ fuori di tale insieme), si ottiene che

$$P(\Omega_2, \Omega) = P(\Omega_2 \cup \Omega_\varrho)$$

il che implica necessariamente $\Omega_\varrho \subset \Omega_2$.

Deve essere dunque $x_0 \in \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega_\varrho$. Per la proposizione di pag. 357 di [4] esiste allora un aperto A, con $x_0 \in A$ tale che $\partial\Omega_\varrho \cap \cap A = \partial\Omega_2 \cap A$. Applicando lo stesso risultato agli insiemi Ω_1 e $\complement\Omega_\varrho$ si ottienq che esiste un aperto A', con $x_0 \in A'$ tale che $\partial\Omega_\varrho \cap A' = = \partial\Omega_1 \cap A'$. Esiste dunque un aperto U in modo che

$$\partial\Omega_1 \cap U = \partial\Omega_2 \cap U . \qquad \text{C.V.D.}$$

([7]) Per l'esistenza di $f_\varrho(x)$ si veda [6].

Possiamo dimostrare ora il

TEOREMA 2.3. *Sia E una varietà $(n-1)$ dimensionale senza bordo, di classe C^1 in Ω. Se $x_0 \in E \cap \Omega$ e $\Theta(B, x_0) < \frac{1}{2}$* (8)*, allora, detta E_{x_0} la componente connessa di E che contiene x_0, si ha che*

(i) *per ogni $x \in E_{x_0}$ è $\Theta(B, x) = 0$,*

(ii) *E_{x_0} è un ipersuperficie minimale in Ω.*

DIMOSTRAZIONE. Sia K un compatto di Ω contenente x_0 verificante le i), ii), iii) del Teorema 2.1. Essendo $B \in G_n$ risulta $x_0 \in \partial B \cap E$; inoltre, dovendo essere $\Theta(B, x_0) < \frac{1}{2}$, è necessariamente $x_0 \in \partial M \cap \partial M_1$ (dove, al solito, $M = B \cup K^-$ e $M_1 = B \cup K^+$). D'altra parte, essendo M ed M_1 di frontiera minima con ostacoli grossi (9) (rispettivamente K^- e K^+), i bordi ∂M e ∂M_1 hanno curvatura media non negativa nel senso (A) in ogni punto interno a K; si può quindi applicare il Lemma 2.1 con $\Omega_1 = M_1$ e $\Omega_2 = M$. Esiste cioè un aperto U, con $x_0 \in U$, tale che $\partial M_1 \cap U = \partial M \cap U$.

Si vede allora facilmente che $E \cap U \subset B_{(0)} \cap E$ e dunque $\Theta(B, x) = 0$ per ogni $x \in E \cap U$.

Ripetendo lo stesso discorso a partire dai punti di $\partial(E \cap U)$ (punti in cui la densità di B è certamente diversa da 1) se ne conclude alla fine che per ogni $y \in E_{x_0} \cap K$ è $\Theta(B, y) = 0$.

Data l'arbitrarietà del compatto K in Ω, si ottiene così che ogni $x \in E_{x_0} \cap \Omega$ è tale che $\Theta(B, x) = 0$.

D'altra parte, per ogni compatto $K \subset \Omega$ con $K \cap \partial E_{x_0} = \emptyset$, l'insieme $E_{x_0} \cap K$ ha, nello stesso tempo, curvatura media non positiva e non negativa nel senso (A); dunque necessariamente $E_{x_0} \cap \Omega$ è minimale in Ω. C.V.D.

(8) B è il minimo del problema (2) e $\Theta(B, x)$ è la densità di B nel punto x, cioè $\Theta(B, x) = \lim\limits_{\varrho \to 0} \dfrac{\operatorname{mis}(B_\varrho(x) \cap B)}{\operatorname{mis} B_\varrho(x)}$.

(9) Si vede la dimostrazione del teorema 2.1.

BIBLIOGRAFIA

[1] DE GIORGI, *Problemi di superfici minime con ostacoli: forma non cartesiana*, Boll. U.M.I., **8** (1973).

[2] De Giorgi - Colombini - Piccinini, *Frontiere orientate di misura minima e questioni collegate*, Scuola Norm. Sup. Pisa (1972).
[3] M. Miranda, *Frontiere minimali con ostacoli*, Ann. Univ. Ferrara, ser. VII, **16** (1971).
[4] M. Miranda, *Un principio di massimo forte per le frontiere minimali e una sua applicazione alla risoluzione del problema al contorno per l'equazione delle superfici di area minima*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **45** (1971).
[5] M. Miranda, *Comportamento delle successioni convergenti di frontiere minimali*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **45** (1971).
[6] M. Miranda, *Un teorema di esistenza ed unicità per il problema dell'area minima in n variabili*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **19** (1965).

Manoscritto pervenuto in redazione il 16 giugno 1978.