RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ENRICO CALCAGNO

Sulla coomologia intera delle varietà differenziabili

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 61 (1979), p. 259-270

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1979__61__259_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 61 (1979)

Sulla coomologia intera delle varietà differenziabili.

ENRICO CALCAGNO (*)

SUMMARY - In this note we define a sheaf of nuclear cochains with coefficients in $\mathbb{Z}$, furthemore we show that there is isomorphism between the cohomology of nuclear cochains and the cohomology of $\mathbb{Z}$-pairs of differential forms as defined by Allendoerfer and Eells (cfr. [1]).

Introduzione.

Allendoerfer ed Eells associano (cfr. [1]) ad una varietà X di classe C^∞ il complesso delle $\mathbb{Z}$-coppie di forme differenziali e provano che lo $\mathbb{Z}$-modulo di coomologia derivato è isomorfo alla coomologia singolare a coefficienti interi di X; ricorrendo inoltre ad una triangolazione di X danno una rappresentazione esplicita, mediante residuo (cfr. [1], paragrafo 5) di tale isomorfismo.

La tecnica utilizzata può risultare poco agevole volendo estendere tale risultato a spazi più generali delle varietà, di cui non è noto se siano triangolabili, oppure come nel caso delle prestratificazioni di Whitney (cfr. [7]) la cui triangolazione è costruita mediante procedimenti non semplici. In questa nota si introduce il concetto di cocatena con nucleo, intendendo una cocatena definita solo sulle catene in « posizione generale » rispetto a certi sottoinsiemi costituenti il nucleo (cfr. Definizione 2.4).

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica dell'Università - Via L. B. Alberti 4 - 16132 Genova.

Lavoro eseguito nell'ambito del programma di ricerca del gruppo G.N.S. A.G.A. del comitato per la Matematica del C.N.R.

Associando ad ogni aperto U di X lo $\mathbb{Z}$-modulo delle cocatene con nucleo, si ottiene un prefascio canonico $\tilde{\mathscr{C}}^*$ che si dimostra essere una risoluzione aciclica del prefascio di fibra costante $\mathbb{Z}$.

Utilizzando la teoria dei fasci si prova che esiste isomorfismo tra la coomologia delle cocatene con nucleo e la coomologia singolare intera, d'altra parte tramite tecniche dimostrative classiche (cfr. [8]) si ottiene un isomorfismo tra la coomologia delle cocatene con nucleo e la coomologia delle $\mathbb{Z}$-coppie di forme differenziali, esplicitabile tramite il residuo, senza ricorrere a triangolazioni della varietà X.

1. Preliminari.

Richiameremo alcune definizioni e risultati che ci saranno utili nel seguito.

a) Siano X, Y varietà differenziabili di classe C^∞ e per ogni intero $r \geqslant 0$ sia $C^r(X, Y)$ l'insieme delle applicazioni di classe C^r da X a Y.

La C^r-topologia debole su $C^r(X, Y)$ è la topologia generata nel modo seguente:

se $f \in C^r(X, Y)$ e (φ, U), (ψ, V) sono due carte locali su X e Y rispettivamente, $K \subset U$ un sottoinsieme compatto di X tale che $f(K) \subset V$ e ε è un numero reale positivo, indicheremo con

$$\mathcal{N}^r(f, (\varphi, U), (\psi, V), K, \varepsilon)$$

l'insieme degli elementi $g \in C^r(X, Y)$ tali che $g(K) \subset V$ e

$$\|D^s(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x) - D^s(\psi \circ g \circ \varphi^{-1})(x)\| < \varepsilon$$

per ogni $x \in \varphi(K)$ e ogni $s \leqslant r$ ($D^s(+)$ è la derivata s-esima di $+$ e $\|\circ\|$ è la norma dell'applicazione lineare $\circ$).

In altre parole g sta in $\mathcal{N}^r(f, (\varphi, U), (\psi, V), K, \varepsilon)$ se le rappresentazioni locali di f e g sono «ε-vicine» su K con tutte le derivate di ordine $\leqslant r$.

Gli insiemi del tipo $\mathcal{N}^r(f, (\varphi, U), (\psi, V), K, \varepsilon)$ al variare di f, (φ, U), (ψ, V), K, ε danno luogo ad una sottobase per una topologia che sarà quella voluta.

L'insieme $C^r(X, Y)$ dotato della topologia sopra descritta, verrà denotato con $C^r_W(X, Y)$.

La C^∞-topologia debole su $C^\infty(X, Y)$ è l'unione delle topologie indotte dalle inclusioni naturali i_r: $C^\infty(X, Y) \to C^r_W(X, Y)$.

Quanto sopra può anche esprimersi mediante il linguaggio dei getti (cfr. [6] per maggiori dettagli).

Sia $A \subset Y$ una sottovarietà e $x \in X$ un punto; diremo che un'applicazione $f \in C^r(X, Y)$ è trasversale ad A in x e scriveremo $f \underset{x}{\pitchfork} A$ se $f(x) \notin A$ oppure $f(x) \in A$ e tra gli spazi tangenti vale la relazione:

$$T_{f(x)}(Y) = T_{f(x)}(A) + (df)_x T_x(X) .$$

Se $L \subset X$ diremo che f è trasversale ad A su L (in simboli $f \underset{L}{\pitchfork} A$) se per ogni $x \in L$ si ha $f \underset{x}{\pitchfork} A$ (se $L = X$ scriveremo semplicemente $f \pitchfork A$).

Posto

$$\underset{L}{\pitchfork}^r(X, Y; A) = \{f \in C^r(X, Y) \colon f \underset{L}{\pitchfork} A\} \quad \text{e} \quad \pitchfork^r(X, Y; A) = \underset{X}{\pitchfork}^r(X, Y; A)$$

sussiste il

TEOREMA 1.1 (di trasversalità di Thom) (cfr. [5] e [6]). Per ogni $1 \leqslant r \leqslant +\infty$ risulta:

i) $\underset{L}{\pitchfork}^r(X, Y; A)$ è residuale (e quindi denso) in $C^r_W(X, Y)$ per ogni $L \subset X$.

ii) Se A è sottovarietà chiusa e L è compatto, allora $\underset{L}{\pitchfork}^r(X, Y; A)$ è anche aperto in $C^r_W(X, Y)$.

b) Sia X una varietà differenziabile, $A \subset X$ un sottoinsieme localmente chiuso e $x \in A$ un punto, un vettore $v \in T_x(X)$ si dice tangente ad A in x se esiste una sezione ξ del fibrato tangente a X tale che $\xi(x) = v$ e per ogni $x' \in A$ l'orbita di ξ per x' è contenuta in A.

L'insieme dei vettori tangenti ad A in x è uno spazio vettoriale che chiameremo spazio tangente ad A in x e denoteremo $T_x(A)$. Si definisce inoltre dimensione di A il numero $\dim A = \sup_{x \in A} \dim T_x(A)$; se $\dim A = r$ $(0 \leqslant r \leqslant \dim X)$ allora per ogni $0 \leqslant s \leqslant r$ gli insiemi $A^s = \{y \in A \colon \dim T_y(A) = s\}$ sono sottovarietà immerse di X, nel senso che in generale la topologia di A^s non è la topologia indotta da X; se in particolare si suppone che ogni A^s abbia la topologia indotta da X si dirà che A è regolare (cfr. [10]).

Nell'ipotesi di regolarità A può esprimersi nel modo seguente: $A = \bigcup_{\alpha \in I} A^r_\alpha$ con A^r_α sottovarietà connessa di X con la topologia indotta, inoltre per le $\{A^r_\alpha\}$ vale la condizione della frontiera e la condizione (a) di Whitney (cfr. [7] e [10]).

Se $f \in C^\infty(Z, X)$ diremo che f è trasversale ad A (in simboli ancora $f \pitchfork A$) se per ogni $0 \leqslant s \leqslant r$ risulta $f \pitchfork A^s$.

Sussistono i seguenti risultati:

Lemma 1.2 (cfr. Lemma 3.3 di [10]). Sia A sottoinsieme chiuso e regolare di X, K un compatto di Z, $\boldsymbol{J}^1(Z, X)$ lo spazio degli 1-getti delle applicazioni di Z in X e $\pi\colon \boldsymbol{J}^1(Z, X) \to Z \times X$ la proiezione canonica.

Allora l'insieme $\boldsymbol{J}^1_{A,K} = \{a \in \boldsymbol{J}^1(Z, X)\colon \pi(a) = (z, x)$ per ogni $z \in K$ $e\colon x \notin A$ oppure $x \in A$ e $(da)_z T_z(Z) + T_x(A) = T_x(X)\}$ è aperto in $\boldsymbol{J}^1(Z, X)$.

Dimostrazione. Se $\boldsymbol{J}^1(Z, X) \setminus \boldsymbol{J}^1_{A,K}$ non fosse chiuso, sia z un punto di K, $\{x_n\}$ una successione di punti di A convergenti ad un punto $x \in A$ e $a_n \in \boldsymbol{J}^1(Z, X) \setminus \boldsymbol{J}^1_{A,K}$ tale che $\pi(a_n) = (z, x_n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, con $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \boldsymbol{J}^1_{A,K}$.

Essendo $x \in A$ si ha

$$(da)_z T_z(Z) + T_x(A) = T_x(X) ,$$

mentre per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$(da)_z T_z(Z) + T_{x_n}(A) \subsetneq T_{x_n}(X) .$$

Per l'ipotesi di regolarità di A, se A^r_α è la componente di A che contiene x e se $x_n \in A^{r'}_{\alpha'}$ $(r' \geqslant r)$ per n sufficientemente grande, si avrà

$$\{T_{x_n}(A^{r'}_{\alpha'})\} \to \tau \subseteq T_x(X) \qquad \text{e} \qquad T_x(A) = T_x(A^r_\alpha) \subset \tau .$$

Pertanto:

$$(da)_z T_z(Z) + \tau \supset (da)_z T_z(Z) + T_x(A) = T_x(X) ,$$

contro le ipotesi.

TEOREMA 1.3 (variante del Teorema 1.1). Siano Z, X varietà differenziabili di classe C^∞, A sottoinsieme localmente chiuso di X e L sottoinsieme di A, allora:

i) $\underset{L}{\pitchfork}^\infty(Z, X; A)$ è residuale (e quindi denso) in $C^\infty_W(Z, X)$;

ii) se A è chiuso e regolare ed L è compatto, $\underset{L}{\pitchfork}^\infty(Z, X; A)$ è anche aperto in $C^\infty_W(Z, X)$.

DIMOSTRAZIONE. $\underset{L}{\pitchfork}^\infty(Z, X; A)$ è residuale (e quindi denso) per il Teorema 1.1 e perchè $C^\infty_W(Z, X)$ è uno spazio di Baire. Se A è chiuso e regolare ed L è compatto $\underset{L}{\pitchfork}^\infty(Z, X; A)$ è aperto in virtù del Lemma 1.2.

2. Cocatene con singolarità.

Sia X una varietà differenziabile di classe C^∞ di dimensione n, Δ_r il simplesso euclideo standard in $\mathbb{R}^r$; un simplesso singolare differenziabile $\sigma_r\colon \Delta_r \to X$ sarà la restrizione di una applicazione di classe C^∞ $\sigma_r\colon \mathbb{R}^r \to X$.

Gli r-simplessi singolari differenziabili saranno pertanto interpretati nel seguito come elementi dello spazio $C^\infty_W(\mathbb{R}^r, X)$.

Sia $S_r(X, \mathbb{Z})$ lo $\mathbb{Z}$-modulo delle catene differenziabili su X, consideriamo il sistema diretto $\{A_m, \varrho^n_m\}_{n\geqslant m\geqslant 1}$ dove:

$A_m = S_r(X, \mathbb{Z})$ per $m \geqslant 1$ e

$\varrho^n_m\colon A_m \to A_n$ è l'omomorfismo $sd^{(n-m)}$ di suddivisione baricentrica.

Se poniamo $C_r(X, \mathbb{Z}) = \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} A_n$, l'applicazione naturale

$$\pi\colon S_r(X, \mathbb{Z}) \to C_r(X, \mathbb{Z})$$

induce un isomorfismo tra i rispettivi moduli d'omologia (cfr. [2]).

Introduciamo ora su $C_r(X, \mathbb{Z})$ una topologia legata in modo naturale alla topologia debole su $C^\infty(\mathbb{R}^r, X)$; si consideri allora a tale scopo per ogni elemento c di $C_r(X, \mathbb{Z})$, ogni numero reale positivo ε e ogni famiglia $\psi = \{(\psi_\alpha, V_\alpha)\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ di carte locali su X tali che $|c| \subset \bigcup_{\alpha\in\mathfrak{A}} V_\alpha$

(indicando con $|\circ|$ il supporto della catena $\circ$), il sottoinsieme $U(c, \psi, \varepsilon) = \{c' \in C_r(X, \mathbb{Z})$: esiste una coppia di rappresentanti $s = = \sum_{i=1}^{p} a_i \sigma_i$ e $s' = \sum_{i=1}^{p} a_i \delta_i$ di c e c' rispettivamente, per cui sono verificate per $i = 1, \ldots, p$ le seguenti condizioni: i) $\sigma_i(\Delta_r) \subset V_{\alpha(i)}$ e ii) $\delta_i \in \mathcal{N}^\infty(\sigma_i, (\mathbb{R}^r, id), (\psi_{\alpha(i)}, V_{\alpha(i)}), \Delta_r, \varepsilon)\}$.

Si verifica che al variare di c, ψ, ε la famiglia $\{U(c, \psi, \varepsilon)\}$ è sottobase di intorni di una topologia che sarà quella voluta su $C_r(X, \mathbb{Z})$. Allo scopo di definire il concetto di cocatena con singolarità premettiamo le seguenti:

DEFINIZIONE 2.1. Un r-sistema nucleare N è costituito da una coppia di insiemi (e_1, e_2) tali che:

i) e_1 è un sottoinsieme chiuso e ovunque non denso di X contenuto in $\bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha$, essendo $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ una famiglia localmente finita di sottoinsiemi chiusi di dimensione non superiore a $(n - r)$.

ii) e_2 è un sottoinsieme chiuso di e_1 contenuto in $\bigcup_{\beta \in \mathfrak{B}} B_\beta$, essendo $\{B_\beta\}_{\beta \in \mathfrak{B}}$ una famiglia localmente finita di sottoinsiemi chiusi di dimensione non superiore a $(n - r - 1)$.

DEFINIZIONE 2.2. Un r-simplesso singolare σ si dirà in posizione generale rispetto ad un r-sistema nucleare N se:

i) $\sigma(\Delta_r) \cap e_2 = \emptyset$ e

ii) $\sigma(\partial \Delta_r) \cap e_1 = \emptyset$.

Si dirà inoltre che una catena $c \in C_r(X, \mathbb{Z})$ è in posizione generale rispetto a N se esiste un rappresentante $s = \sum_{i=1}^{p} a_i \sigma_i$ con σ_i in posizione generale rispetto a N per ogni i.

PROPOSIZIONE 2.3. Dato un r-sistema nucleare N, l'insieme delle catene di $C_r(X, \mathbb{Z})$ in posizione generale rispetto a N è aperto e denso in $C_r(X, \mathbb{Z})$.

DIMOSTRAZIONE. Nel seguito indicheremo con $\mathscr{A}_N$ tale insieme. $\mathscr{A}_N$ è aperto, infatti: sia $c \in \mathscr{A}_N$ e $s = \sum_{i=1}^{p} a_i \sigma_i$ un suo rappresentante, allora per ogni i $\sigma_i(\Delta_r) \cap \{B_\beta\}_{\beta \in \mathfrak{B}} = \emptyset$ e $\sigma_i(\partial \Delta_r) \cap \{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}} = \emptyset$.

Poichè $\sigma_i(\Delta_r)$ è compatto e $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ e $\{B_\beta\}_{\beta\in\mathfrak{B}}$ sono localmente finite esisterà un intorno di $\sigma_i(\Delta_r)$ in X intersecante un numero finito di A_α e di B_β. Se d è una metrica su X esisteranno pertanto un numero reale positivo ε^i e una carta locale $(\psi, V)_i$ su X, tali che per ogni elemento $\tau \in \mathcal{N}^\infty(\sigma_i, (\mathbb{R}^r, id), (\psi, V)_i, \Delta_r, \varepsilon^i)$ risulta:

$$\tau(\Delta_r) \cap \{B_\beta\}_{\beta\in\mathfrak{B}} = \emptyset \qquad \text{e} \qquad \tau(\partial\Delta_r) \cap \{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}} = \emptyset \, .$$

L'asserto segue immediatamente.

$\mathscr{A}_N$ è denso, infatti: sia $c \notin \mathscr{A}_N$, $s = \sum_{i=1}^{p} a_i\sigma_i$ un suo rappresentante e $\{(\psi_\gamma, V_\gamma)\}_{\gamma\in\Lambda}$ una famiglia di carte locali tali che: $|s| \subset \bigcup_{\gamma\in\Lambda} V_\gamma$ e $\sigma_i(\Delta_r) \subset$ $\subset V_{\gamma(i)}$ per ogni i. Non è restrittivo supporre che per un indice i_0 esistono un indice α_u e un indice β_v tali che:

$$\sigma_{i_0}(\Delta_r) \cap B_{\beta_v} \neq \emptyset \qquad \text{e} \qquad \sigma_{i_0}(\partial\Delta_r) \cap A_{\alpha_u} \neq \emptyset \; ;$$

l'intorno $V_{\gamma(i_0)}$ interseca i sottoinsiemi chiusi $A_{\alpha_1}, \ldots, A_{\alpha_n}, A_{\alpha_u}$ e B_{β_1}, $\ldots, B_{\beta_m}, B_{\beta_v}$.

Come conseguenza di una estensione della Proposizione II.4.2 di [5] ai sottoinsiemi localmente chiusi e per il Teorema 1.3 l'insieme

$$\mathscr{A}^{i_0} = \Big(\bigcap_{s=1,\ldots,m,v} \{\tau \in C^\infty(\mathbb{R}^r, X) \colon \tau(\Delta_r) \cap B_{\beta_s} = \emptyset\}\Big) \cap$$
$$\cap \Big(\bigcap_{l=1,\ldots,n,u} \{\delta \in C^\infty(\mathbb{R}^r, X) \colon \delta(\partial\Delta_r) \cap A_{\alpha_l} = \emptyset\}\Big)$$

è residuale e quindi denso in $C^\infty_W(\mathbb{R}^r, X)$.

Se d è una metrica su X poniamo:

$$\varepsilon^{i_0} = \min\Big\{\{d(\sigma_{i_0}(\partial\Delta_r), A_{\alpha_j})\}_{j=1,\ldots,n}, \{d(\sigma_{i_0}(\Delta_r), B_{\beta_h})\}_{h=1,\ldots,m}\Big\}$$

e consideriamo l'intorno $U^{i_0} = \mathcal{N}^\infty(\sigma_{i_0}, (\mathbb{R}^r, id), (\psi_{\gamma(i_0)}, V_{\gamma(i_0)}), \Delta_r, \varepsilon^{i_0})$.

Allora per ogni numero reale positivo $\varepsilon < \varepsilon^{i_0}$, essendo $U^{i_0} \cap \mathscr{A}^{i_0}$ denso in U^{i_0}, esiste $\sigma'_{i_0} \in \mathcal{N}^\infty(\sigma_{i_0}, (\mathbb{R}^r, id), (\psi_{\gamma(i_0)}, V_{\gamma(i_0)}), \Delta_r, \varepsilon) \cap \mathscr{A}^{i_0}$ tale che $s' = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq i_0}}^{p} a_i\sigma_i + a_{i_0}\sigma'_{i_0}$ rappresenta un elemento di $\mathscr{A}_N$, provando la tesi.

DEFINIZIONE 2.4. Una r-cocatena nucleare è una coppia $(q, \mathscr{A})$, dove:

i) $\mathscr{A}_N$ è l'insieme delle r-catene in posizione generale rispetto all'r-sistema nucleare N;

ii) $q\colon \mathscr{A}_N \to \mathbb{Z}$ è un'applicazione continua ($\mathbb{Z}$ discreto) che rispetta le strutture additive.

ESEMPIO 2.5. Sia (θ, ω) una $(\mathbb{Z}, r)$-coppia di forme differenziali sulla varietà X con singolarità $e(\theta)$ e $e(\omega)$ contenute in famiglie localmente finite di sottovarietà chiuse (cfr. [1] e [3]).

Il residuo $\operatorname{Res}[(\theta, \omega); s] = \int_s \theta - \int_{\partial s} \omega$ definito per ogni $s \in S_r(X, \mathbb{Z})$ ammissibile per (θ, ω), dà luogo ad una r-cocatena nucleare $q(c) = \operatorname{Res}[(\theta, \omega); s]$ con $N = (e_1, e_2) = (e(\omega), e(\theta))$ e s rappresentante di $c \in \mathscr{A}_N$; la definizione è ben posta e inoltre $q(c)$ è continua, infatti: sia $c \in \mathscr{A}_N$ e $U(c, \psi, \varepsilon)$ un suo intorno con ε opportunamente piccolo, proviamo che $\operatorname{Res}[(\theta, \omega); s] = \operatorname{Res}[(\theta, \omega); s']$ per ogni $c' \in U(c, \psi, \varepsilon) \cap \mathscr{A}_N$, con $s = \sum_{i=1}^{p} a_i \sigma_i$ e $s' = \sum_{i=1}^{p} a_i \delta_i$ rappresentanti di c e c' rispettivamente.

Essendo σ_i e δ_i applicazioni di classe C^∞ aventi immagini «vicine» su Δ_r, si può costruire una C^∞-omotopia tra σ_i e δ_i: immergendo, per il teorema di Whitney (cfr. [6]), X in $\mathbb{R}^{N_0}$, se T è un intorno tubolare di X e λ è la retrazione di T su X, allora $\mu_i^t(x) = \lambda[(1-t)\sigma_i(x) + t\delta_i(x)]$ per $t \in [0, 1]$ e $x \in \Delta_r$ è l'omotopia richiesta ammissibile per (θ, ω) (cfr. [3]).

Dalla Proposizione 2D di [1] segue $\operatorname{Res}[(\theta, \omega); \sigma_i] = \operatorname{Res}[(\theta, \omega); \delta_i]$, pertanto $\operatorname{Res}[(\theta, \omega); s] = \operatorname{Res}[(\theta, \omega); s']$ per ogni $c' \in \mathscr{A}_N \cap U(c, \psi, \varepsilon)$.

DEFINIZIONE 2.6. Siano $(q_1, \mathscr{A}_{N_1})$ e $(q_2, \mathscr{A}_{N_2})$ due cocatene di sistema nucleare $N_1 = (e_1, e_2)$ e $N_2 = (e_1', e_2')$, definiamo somma $(q_1, \mathscr{A}_{N_1}) + (q_2, \mathscr{A}_{N_2})$ la cocatena $(q, \mathscr{A}_N)$ definita da:

i) $N = (e_1 \cup e_1', e_2 \cup e_2')$ e

ii) per ogni $c \in \mathscr{A}_N$ $q(c) = q_1(c) + q_2(c)$.

Si definisce prodotto di un intero n per una r-cocatena nucleare $(q, \mathscr{A}_N)$ la r-cocatena $(nq, \mathscr{A}_N)$.

Si constata immediatamente che l'insieme $C^r(X, \mathbb{Z})$ delle r-cocatene nucleari non ha struttura naturale di $\mathbb{Z}$-modulo, non essendo definito l'elemento neutro; per dotarlo di tale struttura si introduce la relazione di equivalenza:

$$(q_1, \mathscr{A}_{N_1}) \sim (q_2, \mathscr{A}_{N_2}) \Leftrightarrow q_1(c) = q_2(c) \qquad \text{per ogni } c \in \mathscr{A}_{N_1} \cap \mathscr{A}_{N_2} ;$$

la proprietà transitiva è conseguenza della continuità di q e del fatto che gli insiemi $\mathscr{A}_N$ sono aperti e densi.

L'insieme $C^r(X, \mathbb{Z})/\sim$ ora dotato di struttura naturale di $\mathbb{Z}$-modulo lo denoteremo con $\tilde{C}^r(X, \mathbb{Z})$; con $[q]_N$ denoteremo la classe della cocatena nucleare $(q, \mathscr{A}_N)$. Se $(q, \mathscr{A}_N) \in C^r(X, \mathbb{Z})$ ponendo $\delta(q, \mathscr{A}_N) = (\delta q, \mathscr{A}_{N'})$ con $N' = (e_2, \phi)$ e $\delta q(c) = q(\partial c)$ per $c \in \mathscr{A}_{N'}$, otteniamo un elemento di $C^{r+1}(X, \mathbb{Z})$ e quindi per passaggio al quoziente si definisce un operatore che chiameremo cobordo $\delta\colon \tilde{C}^r(X, \mathbb{Z}) \to \tilde{C}^{r+1}(X, \mathbb{Z})$ definito da $\delta[q]_N = [\delta q]_{N'}$. Dalla definizione risulta $\delta \circ \delta = 0$. Posto $\tilde{Z}^r(X, \mathbb{Z}) = \ker \langle \delta\colon \tilde{C}^r(X, \mathbb{Z}) \to \tilde{C}^{r+1}(X, \mathbb{Z}) \rangle$ e $\tilde{B}^r(X, \mathbb{Z}) = \delta(\tilde{C}^{r-1}(X, \mathbb{Z}))$ denoteremo con $\tilde{H}^r(X, \mathbb{Z})$ il modulo di coomologia derivato

$$\tilde{Z}^r(X, \mathbb{Z})/\tilde{B}^r(X, \mathbb{Z}) .$$

3. Il teorema di isomorfismo.

Per ogni coppia di aperti U e V con $V \subset U$ è definita un'applicazione $\varrho_V^U\colon \tilde{C}^r(U, \mathbb{Z}) \to \tilde{C}^r(V, \mathbb{Z})$ nel modo seguente: sia $[q]_N \in \tilde{C}^r(U, \mathbb{Z})$ e $(q, \mathscr{A}_N)$ un suo rappresentante, se $N = (e_1, e_2)$ consideriamo la classe $[q']_{N'}$ individuata dall'elemento $(q', \mathscr{A}_{N'})$ dove $N' = (e_1 \cap V, e_2 \cap V)$ e $q'(c) = q(c)$ per ogni $c \in \mathscr{A}_{N'}$, è immediato verificare che la definizione è ben posta e che il sistema $\{\tilde{C}^r(U, \mathbb{Z}), \varrho_V^U\}$ al variare di U e V nella famiglia degli aperti di X definisce un prefascio su X che chiameremo prefascio delle cocatene nucleari e denoteremo con $\tilde{\mathscr{C}}^r$. Tenendo conto della proprietà additiva delle cocatene nucleari, della definizione di $C_r(X, \mathbb{Z})$ come limite diretto mediante «suddivisioni baricentriche», nonchè sfruttando la paracompattezza di X e tecniche dimostrative del tutto analoghe a quelle di [4] si perviene direttamente alla seguente:

PROPOSIZIONE 3.1. $\tilde{\mathscr{C}}^r$ è un prefascio canonico per ogni $r \geqslant 0$.

Il morfismo cobordo $\delta\colon \tilde{C}^r(\cdot, \mathbb{Z}) \to \tilde{C}^{r+1}(\cdot, \mathbb{Z})$ induce un morfismo di prefasci canonici $\hat{\delta}\colon \tilde{\mathscr{C}}^r \to \tilde{\mathscr{C}}^{r+1}$, d'altra parte è definito un morfismo $\hat{\imath}\colon \mathbb{Z} \to \tilde{\mathscr{C}}^0$ indotto dall'applicazione $i\colon \mathbb{Z} \to \tilde{C}^0(\cdot, \mathbb{Z})$ definita associando ad ogni interno n la classe di equivalenza di $(q_n, \mathscr{A}_N)$ dove $N = (\phi, \phi)$ e $q_n(\sigma) = n$ per ogni 0-simplesso σ.

Si ha il seguente:

TEOREMA 3.2. Il complesso di prefasci canonici

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\hat{\imath}} \tilde{\mathscr{C}}^0 \xrightarrow{\hat{\delta}} \tilde{\mathscr{C}}^1 \xrightarrow{\hat{\delta}} \tilde{\mathscr{C}}^2 \xrightarrow{\hat{\delta}} \dots$$

è una risoluzione aciclica del prefascio di fibra costante $\mathbb{Z}$.

La dimostrazione è conseguenza delle due seguenti proposizioni:

PROPOSIZIONE 3.3. La successione di fasci e omomorfismi

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\hat{\imath}} \tilde{\mathscr{C}}^0 \xrightarrow{\hat{\delta}} \tilde{\mathscr{C}}^1 \xrightarrow{\hat{\delta}} \tilde{\mathscr{C}}^2 \xrightarrow{\hat{\delta}} \dots$$

è esatta.

DIMOSTRAZIONE. Essendo l'asserto di natura locale sarà sufficiente provare che se U è una palla aperta di $\mathbb{R}^M$ e $[q]_N \in \tilde{Z}^r(U, \mathbb{Z})$ allora esiste $[q_1]_{N_1} \in \tilde{C}^{r-1}(U, \mathbb{Z})$ tale che $\delta[q_1]_{N_1} = [q]_N$.

Siano $[q]_N \in \tilde{C}^r(U, \mathbb{Z})$ $(r > 0)$ con rappresentante $(q, \mathscr{A}_N)$ avente sistema nucleare $N = (e_1, e_2)$, x_0 un punto di $U \setminus e_1$ e U_i il più grande aperto di $U \setminus e_i$ soddisfacente la proprietà: «se $x \in U_i$ allora il segmento di vertici x_0 e x è contenuto in U_i» $(i = 1, 2)$.

Se $g\colon U \times [0,1] \rightarrow U$ è definita da $g(x, t) = (1-t)x_0 + tx$ e $p\colon U \times \times [0,1] \rightarrow U$ è la proiezione canonica si ha $e_i' = U \setminus U_i = p^0 g^{-1}(e_i)$ $(i = 1, 2)$; si verifica che $N_1 = (e_1^1, e_2^1) = (e_1', e_2' \cup e_1)$ è un $(r-1)$-sistema nucleare.

Se σ è un $(r-1)$-simplesso singolare l'r-catena $B^{x_0}\sigma\colon \Delta_{r-1} \times [0,1] \rightarrow U$ definita da $B^{x_0}\sigma(x, t) = g\big(\sigma(x), t\big)$ è il cono di σ avente vertice x_0; si verifica che se σ è in posizione generale rispetto a N_1 allora $B\sigma$ è in posizione generale rispetto a N.

Se c è in posizione generale rispetto a N e $N_1' = (e_2^1, \phi)$, definiamo la $(r-1)$-cocatena nucleare $(q_1, \mathscr{A}_{N_1})$ ponendo $q_1(c) = q(B^{x_0}c)$; essendo $c = B^{x_0}\partial c + \partial B^{x_0}c$ (cfr. [9]) si ha: $q(c) = \delta q(B^{x_0}c) + \delta q_1(c)$.

Se $[q]_N \in \tilde{Z}^r(X, \mathbb{Z})$ allora $q(c) = \delta q_1(c)$, provando così l'asserto.

PROPOSIZIONE 3.4. I moduli di coomologia di Čech $\check{H}^p(X, \tilde{\mathscr{C}}^r)$ sono nulli per $p > 0$ e $r \geqslant 0$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\bar{f} \in \check{H}^p(X, \tilde{\mathscr{C}}^r)$ e $f \in \check{Z}^p(\mathfrak{U}, \tilde{\mathscr{C}}^r)$ un suo rappresentante relativo ad $\mathfrak{U} = \{U_\gamma\}_{\gamma \in \Lambda}$ ricoprimento aperto di X numerabile e localmente finito, per provare il teorema sarà sufficiente provare che per un restringimento $\mathfrak{V}$ di $\mathfrak{U}$ risulta $f|_{\mathfrak{V}} \in \check{B}^p(\mathfrak{V}, \tilde{\mathscr{C}}^r)$.

Si procederà in modo analogo a quello di [4] (cfr. Proposizione 4.3).

Per ogni $(p+1)$-upla $(i) = (i_0, \ldots, i_p)$ si consideri un rappresentante $\big(q(i), \mathscr{A}_{N(i)}\big)$ di $f(i)|_{\mathfrak{B}}$ con $N(i) = \big(e_1(i), e_2(i)\big)$.

Per ogni $k \in \mathbf{N}$ sia e_k l'unione dei punti contenuti in V_k di tutti gli $e_1(i)$, poniamo:

$$e = e_1', \; e_2' = e_2 \cap (V_2 \setminus \overline{V}_1), \; \ldots, \; e_r' = e_r \cap \Big(V_r \setminus \overline{\bigcup_{j=1}^{r-1} V_j}\Big)$$

e

$$B_1 = \bar{e}_1 \cap (\overline{V}_1 \setminus V_1), \; B_2 = \bar{e}_2' \cap Fr(V_2 \setminus \overline{V}_1), \; \ldots, \; B_r = \bar{e}_r' \cap Fr\Big(V_r \setminus \overline{\bigcup_{j=1}^{r-1} V_j}\Big) \, .$$

Poniamo inoltre:

$$N_k(i) = \big(e_1(i) \cup B_k, \; e_2(i) \cup B_k\big)$$

e

$$N = \big(e_1(i) \cup \bigcup_{k \in \mathbf{N}} B_k, \; e_2(i) \cup \bigcup_{k \in \mathbf{N}} B_k\big) \; ;$$

si verifica che $N_k(i)$ e N sono r-sistemi nucleari. Sia $c \in \mathscr{A}_N$ e $s = \sum_{k \in \mathbf{N}} s_k$ un suo rappresentante con $\emptyset \neq |s_k| \subset V_k$ se $|s_k| \cap V_k \neq \emptyset$ e s_k in posizione generale rispetto a $N_k(i)$. Se per ogni $k \in V$ è $q_k(i)(c) = q(i)(\bar{s}_k)$ con sistema nucleare $N_k(i)$, si ottiene $q(i)(c) = \big(\sum_{k \in \mathbf{N}} q_k(i)\big)(c)$.

Costruiamo un omomorfismo $\Lambda\colon C^p(\mathfrak{B}, \widetilde{\mathscr{C}}^r) \to C^{p-1}(\mathfrak{B}, \widetilde{\mathscr{C}}^r)$: se $f \in C^p \cdot (\mathfrak{B}, \widetilde{\mathscr{C}}^r)$ Λf associa ad ogni p-upla $(i_0, \ldots, i_{p-1})$ $\Lambda f(i_0, \ldots, i_{p-1})$, con rappresentante $\Lambda q(i_0, \ldots, i_{p-1})(c) = \big(\sum_{k \in \mathbf{N}} q_k(k, i_0, \ldots, i_{p-1})\big)(c)$. Si verifica che $\big(\Lambda \delta q(i) + \delta \Lambda q(i)\big)(c) = q(i)(c)$; se f è un cociclo allora $q(i)(c) = \delta \Lambda q(i)(c)$, provando l'asserto.

Dal Teorema 3.2 segue il seguente:

Corollario 3.5. Se X è una varietà differenziabile, allora si ha un isomorfismo tra la coomologia singolare $H^r(X, \mathbf{Z})$ e $\widetilde{H}^r(X, \mathbf{Z})$.

Inoltre dall'Esempio 2.5 se $\widetilde{\mathscr{C}}^*$ è la risoluzione di $\mathbf{Z}$ mediante le cocatene nucleari e $\mathfrak{C}^*$ è la risoluzione di $\mathbf{Z}$ mediante le coppie di forme differenziali (cfr. [1]), il residuo dà luogo ad un morfismo tra risoluzioni, precisamente è commutativo il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd} & & \mathfrak{C}^* \arrow[dd, "\mathrm{Res}"] \\ 0 \arrow[r] & \mathbf{Z} \arrow[ur, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\tilde{i}"'] & \\ & & \widetilde{\mathscr{C}}^* \end{tikzcd}$$

Pertanto si deduce il seguente:

COROLLARIO 3.6. Se $\mathfrak{H}^r(X, \mathbb{Z})$ è il modulo di coomologia delle $(\mathbb{Z}, r)$-coppie di forme differenziali su una varietà X, esiste un isomorfismo tra $\mathfrak{H}^r(X, \mathbb{Z})$, e $\widetilde{H}^r(X, \mathbb{Z})$ indotto dal residuo.

BIBLIOGRAFIA

[1] ALLENDOERFER - EELLS Jr., *On the cohomology of smooth manifolds*, Comment. Math. Helv., **32** (1958), pp. 165-179.
[2] BREDON, *Shaef theory*, Mc Graw-Hill, New York (1967).
[3] CARRELL, *The cohomology ring of a smooth manifold*, Trans. of the Amer. Math. Soc., **136** (1969), pp. 489-498.
[4] FERRARI - MONTI BRAGADIN, *Sulla coomologia intera delle prestratificazioni astratte*, Ann. Univ. Ferrara, **21** (1975), pp. 57-68.
[5] GOLUBITSKY - GUILLEMIN, *Stable mappings and their singularities*, Springer-Verlag, Berlin (1973).
[6] HIRSCH, *Differential topology*, Springer-Verlag, New York (1976).
[7] MATHER, *Notes on topological stability*, Harvard (1970).
[8] SEMINARIO E. E. LEVI, *Coomologia a coefficienti reali di una varietà differenziabile*, (Febbraio 1962).
[9] SPANIER, *Algebraic topology*, Mc Graw-Hill, New York (1966).
[10] VERONA, *Propriétés différentielles des ensembles localment fermés*, Rev. Roum. Math. pures et appl., **8** (1970), pp. 1269-1279.

Manoscritto pervenuto in redazione il 1° dicembre 1978.