Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

P. Aiena
U. Oliveri

Operatori di Riesz generalizzati su spazi di Banach

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 61 (1979), p. 303-312
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1979__61__303_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 61 (1979)

Operatori di Riesz generalizzati su spazi di Banach.

P. AIENA - U. OLIVERI (*)

1. Un certo interesse presenta la teoria spettrale di alcune classi di operatori non autoaggiunti su spazi di Hilbert, la cui parte non reale dello spettro presenta una situazione analoga a quella dello spettro degli operatori compatti e più in generale a quello degli operatori di Riesz. Alcuni autori (M. S. Brodskii [1], M. S. Livsic [1]) hanno analizzato il problema di dare una rappresentazione spettrale ad operatori $K \in \mathfrak{L}(H)$, con $\mathfrak{L}(H) =$ spazio degli operatori limitati su uno spazio di Hilbert H, aventi parte immaginaria $(K - K^*)/2i$ di classe traccia. Tale studio è stato ripreso e generalizzato da J. T. Schwartz [8] per operatori con parte immaginaria appartenenti alla classe degli operatori compatti di von Neumann-Schatten C_p con $p < \infty$.

Tali operatori presentano la seguente caratteristica in comune: ogni punto $a + ib$ con $b \neq 0$, dello spettro è un punto isolato che è anche polo del risolvente $R_\lambda = (\lambda I - K)^{-1}$. Tale proprietà, come è noto, caratterizza, con l'unica eccezione dello zero qualora esso appartenga allo spettro, l'intero spettro degli operatori di Riesz. È naturale allora il problema dello sviluppo di una teoria unificata che tratti le proprietà spettrali di una classe sufficientemente ampia da generalizzare gli operatori con parte immaginaria compatta e gli operatori di tipo Riesz. In tale direzione, un primo studio delle proprietà di una classe di operatori, che generalizzi quella di Riesz, è stato fatto, sempre su spazi di Hilbert, da G. Costantin ([3], [4]).

Lo scopo della presente nota è quello di estendere tale studio alla situazione più generale di operatori limitati su uno spazio di Banach,

(*) Indirizzo degli AA.: Istituto di Matematica, Università di Plaermo - Via Archirafi 34 - I-90123 Palermo.

ottenendo contestualmente altre proprietà spettrali, ed anche proposizioni che interessano la struttura algebrica e topologica di tale classe di operatori. Il recente volume di Heuser [6] costituirà il riferimento di questa nota per quanto riguarda la terminologia, le notazioni ed i risultati basilari.

2. Sia E uno spazio di Banach complesso. Indicheremo con $\mathfrak{L}(E)$ l'algebra di Banach degli operatori (= endomorfismi) limitati su E, $\mathcal{F}(E)$ l'ideale degli operatori di rango finito, $\mathcal{K}(E)$ l'ideale chiuso degli operatori compatti. Denoteremo rispettivamente con $N(K)$ e $K(E)$ il nucleo ed il range dell'operatore K e chiameremo « difetti » i numeri:

$$\alpha(K) = \dim N(K)\,, \qquad \beta(K) = \operatorname{codim} K(E)\,.$$

Un operatore limitato K su uno spazio normato E dicesi di Fredholm se ha difetti finiti, range chiuso e $K(A)$ è aperto per ogni aperto A di E. In uno spazio di Banach, come è ben noto, un operatore è di Fredholm se e solo se $\alpha(K) < \infty$, $\beta(K) < \infty$.

Consideriamo le seguenti catene:

1) $N(K) \subseteq N(K^2) \subset \ldots \subseteq N(K^n) \subseteq \ldots\,,$

2) $K(E) \supseteq K^2(E) \supseteq \ldots \supseteq K^n(E) \supseteq \ldots\,.$

È semplice verificare che $N(K^{n_0}) = N(K^{n_0+1})$ implica che $N(K^{n_0+n}) = N(K^{n_0})$, $\forall n = 1, 2, \ldots$; similmente per la catena dei range.

Indicheremo, se esistono, con p e q i più piccoli naturali per cui $N(K^p) = N(K^{p+1})$ e $K^q(E) = K^{q+1}(E)$.

Un operatore dicesi di catene finite se ambedue le catene si fermano da un certo posto in poi, in tal caso i numeri p e q coincidono e sono legati ai difetti dell'operatore dalla seguente:

PROP. 2.1 (Heuser [5]). *a*) ogni operatore di catene finite ha difetti eguali (eventualmente infiniti).

b) se un operatore K ha difetti finiti ed una delle catene 1) e 2) ha lunghezza finita, allora K è di catene finite.

Diremo che uno scalare λ è un punto di Riesz per l'operatore $K \in \mathfrak{L}(E)$, con E uno spazio normato, se per l'operatore $\lambda I - K$ sono verificate le seguenti proprietà:

I) $\beta I - K$ è un operatore di Fredholm,

II) $p(\lambda I - K) = q(\beta I - K) < \infty$.

Un operatore si dirà di Riesz se ogni $\lambda \neq 0$ è un punto di Riesz ed inoltre vale la seguente proprietà:

III) gli autovalori costituiscono, nel caso che non siano in un numero finito, una successione che converge a 0.

In uno spazio di Banach la I) è sufficiente a caratterizzare gli operatori di Riesz ([6], § 52). Indicheremo con $\mathfrak{R}(E)$ e $\tilde{\mathfrak{R}}(E)$ rispettivamente la classe degli operatori di Riesz e la classe degli operatori di Riesz generalizzati, cioè:

$$\tilde{\mathfrak{R}}(E) = \{K \in \mathfrak{L}(E)\colon \text{ ogni } \lambda = a + ib, \text{ con } b \neq 0, \text{ è un punto di Riesz}\}.$$

Naturalmente $\tilde{\mathfrak{R}}(E) \supseteq \mathfrak{R}(E)$ e tranne il caso in cui lo spazio è di dimensione finita, l'inclusione è in generale propria.

Abbiamo ([6], Prop. 50.3):

Prop. 2.2. λ è un punto di Riesz se e solo se λ è un punto isolato di K e la relativa proiezione spettrale

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} (\lambda I - K)^{-1}\, d\lambda$$

è un operatore di rango finito (dove Γ è un cerchio contenuto nel risolvente $\varrho(K) = \mathbb{C} \setminus \sigma(K)$, $\sigma(K)$ spettro dell'operatore K, di centro λ che non contiene altro punto di $\sigma(K)$ al di fuori di λ). In tal caso λ è un polo del risolvente $R_\lambda = (\lambda I - K)^{-1}$.

Quindi $K \in \tilde{\mathfrak{R}}(E)$ se e solo se ogni punto spettrale non reale è isolato e la relativa proiezione spettrale è di rango finito, ed inoltre:

Prop. 2.3 (Costantin [3]). I punti dell'insieme

$$\{\lambda\colon \lambda \in \sigma(K),\ \operatorname{Im}\lambda \neq 0\}$$

sono in un numero finito o costituiscono un insieme numerabile i cui punti si accumulazione giacciono sulla retta reale.

L'operatore $A \in \mathfrak{L}(E)$ si dice di Atkinson se:

IV) almeno uno dei difetti $\alpha(A)$ e $\beta(A)$ è finito.

V) A è relativamente regolare nell'algebra $\mathfrak{L}(E)$, cioè $\exists B \in \mathfrak{L}(E)$ tale che $ABA = A$.

L'operatore $A \in \mathfrak{L}(E)$ dicesi di semi-Fredholm se vale la IV) ed inoltre il range $A(E)$ è un sottoinsieme chiuso di E.

Analogamente a quanto succede per gli operatori di Riesz nella definizione della classe $\tilde{\mathfrak{K}}(E)$ si possono eliminare ridondanze (Esercizio 5, § 52, [6]) ed abbiamo:

PROP. 2.4. Un operatore $K \in \tilde{\mathfrak{K}}(E)$ se e solo se per ogni $\lambda \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$, l'operatore $\lambda I - K$ è un operatore di Atkinson.

PROP. 2.5. Un operatore $K \in \tilde{\mathfrak{K}}(E)$ se e solo se per ogni $\lambda \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$, $\lambda I - K$ è un operatore di semi-Fredholm.

3. Studieremo adesso la struttura algebrica e topologica della classe $\tilde{\mathfrak{K}}(E)$. Chiameremo « dominio di Fredholm » dell'operatore $K \in (E)$ l'insieme

$$\Phi_K \Leftrightarrow \{\lambda \in \mathbf{C}\colon \lambda I - K \text{ è un operatore di Fredholm}\} .$$

L'insieme Φ_K è un aperto di $\mathbf{C}$ ([6], Prop. 51.1) e nel caso di uno spazio di Banach di dimensione infinita è un sottoinsieme proprio di $\mathbf{C}$. Un ideale bilaterale $\mathcal{F}$ di $\mathfrak{L}(E)$ dicesi un Φ-ideale se

VII) $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{F}(E)$,

VIII) $\lambda I - K$ è un operatore di Fredholm, $\forall K \in \mathcal{F}$.

Consideriamo il caso $\dim E = +\infty$ (diversamente ogni Φ-ideale coincide con l'intera algebra $\mathfrak{L}(E)$) e supponiamo $\mathcal{F}$ chiuso (ipotesi lecita perchè la chiusura di un Φ-ideale è ancora tale).

L'algebra quoziente $\hat{\mathfrak{L}} = \mathfrak{L}(E)/\mathcal{F}$ è un'algebra di Banach e risulta (Heuser [6], Prop. 51.6):

PROP. 3.1. Sia $A \in \mathfrak{L}(E)$. A è un operatore di Fredholm se e solo se la classe resto $\hat{A} \in \hat{\mathfrak{L}}$ è invertibile.

Quest'ultimo fatto ci permette di caratterizzare fortemente la classe $\tilde{\mathfrak{K}}(E)$, infatti:

PROP. 3.2. Sia $K \in \mathfrak{L}(E)$. L'operatore $K \in \tilde{\mathfrak{K}}(E)$ se e solo se $\sigma(K) \subset \mathbf{R}$.

DIMOSTRAZIONE. Per la Prop. 3.1 $\lambda\hat{I} - \hat{K}$ è invertibile $\Leftrightarrow \lambda I - K$ è di Fredholm, sicchè $\Phi_K = \varrho(\hat{K})$. Sia $\operatorname{Im} \mathbf{C} = \{\lambda = a + ib\colon b \neq 0\}$. Se $K \in \tilde{\mathfrak{K}}(E)$, $\operatorname{Im} \mathbf{C} \subseteq \Phi_K = \varrho(K)$. Allora se $\lambda \in \sigma(K)$ certamente $\lambda \notin \operatorname{Im} \mathbf{C}$

quindi $\sigma(\hat{K}) \subset \mathbb{R}$. Viceversa sia $\sigma(\hat{K}) \subset \mathbb{R}$ e λ_0 un complesso non reale, per ipotesi quindi $\lambda_0 \in \varrho(K) = \Phi_K$, ovvero $\operatorname{Im} \mathbb{C} \subseteq \Phi_K$: L'insieme Φ_K ha la proprietà che in ogni sua componente connessa aperta massimale Λ risulta:

$$p(\lambda I - K) < \infty\,, \qquad \forall \lambda \in \Lambda$$

oppure

$$q(\lambda I - K) = \infty\,, \qquad \forall \lambda \in \Lambda \ \ \big([6],\ \text{Prop. } 51.3\big)\,.$$

Ora, poichè $\operatorname{Im} \mathbb{C}$ è parte della stessa componente di Φ_K che contiene $\varrho(K)$ ed inoltre per ogni $\lambda \in \varrho(K)$ risulta banalmente $p(\lambda I - K) = 0$, segue che si ha $p(\lambda_0 I - K) < \infty$, $\forall \lambda_0 \in \operatorname{Im} \mathbb{C}$. Per la *b*) della Prop. 2.1 risulta infine $q(\lambda_0 I - K) < \infty$ ovvero λ_0 è un punto di Riesz.

La somma di due operatori di Riesz generalizzati in genere non è ancora tale come mostra il seguente

Esempio. Sia $E = l^1$, $K_1, K_2 \in \mathfrak{L}(l^1)$ siano rappresentati rispettivamente dalle matrici (a_{ij}) e (b_{ij}) dove:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1/i & \text{per } i = j\,, \\ 1 & \text{per } i = j+1,\ i \text{ pari}\,, \\ 0 & \text{altrove}\,, \end{cases}$$

$$b_{ij} = \begin{cases} -1/i & \text{per } i = j\,, \\ 1 & \text{quando } i = j+1 \text{ ed } i \text{ dispari}\,, \\ 0 & \text{altrove}\,. \end{cases}$$

La matrice relativa all'operatore $K_1 + K_2$ è la seguente:

$$c_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{per } i = j+1\,, \\ 0 & \text{altrove}\,. \end{cases}$$

Ora, gli operatori K_1 e $K_2 \in \mathfrak{R}(E)$ (vedi S. R. Caradus [2]) e quindi appartengono a $\tilde{\mathfrak{R}}(E)$. Lo spettro $\sigma(K_1 + K_2)$ è invece costituito dal disco $\{\lambda \in \mathbb{C}\colon |\lambda| \leqslant 1\}$ quindi $K_1 + K_2 \notin \tilde{\mathfrak{R}}(E)$.

Una semplice modifica di un altro esempio considerato in [2] ci dà un esempio di operatori di Riesz generalizzati il cui prodotto non è più tale. Consideriamo l'operatore $K_3 \in \mathfrak{L}(l^1)$ di matrice

$$d_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{per } i = j,\ i \text{ pari}, \\ (i-1)/i & \text{per } i = j-1,\ i \text{ pari}, \\ 0 & \text{altrove}. \end{cases}$$

L'operatore K_3 è di Riesz e risulta $\alpha(I - K_3K_1) = +\infty$.

Se $\lambda_0 \in \operatorname{Im} \mathbf{C}$, l'operatore $K = \lambda_0 K_3$ è di Riesz e $\alpha(\lambda_0 I - KK_1) = \alpha[\lambda_0(I - K_3K_1)] = \alpha(I - K_3K_1) = +\infty$, quindi λ_0 non è punto di Riesz per l'operatore $K \cdot K_1$.

La struttura di Φ-ideale ci permette di studiare agevolmente alcune proprietà di $\tilde{\mathfrak{R}}(E)$.

Prop. 3.3. I) Siano $K_1, K_2 \in \tilde{\mathfrak{R}}(E)$ e $K_1 \cdot K_2 \in \mathcal{F}$ (o anche $K_2 \cdot K_1 \in \mathcal{F}$) allora

$$K_1 + K_2 \in \tilde{\mathfrak{R}}(E).$$

II) Se $K_1, K_2 \in \tilde{\mathfrak{R}}(E)$ e $K_1 + K_2 \in \mathcal{F}$ allora

$$K_1 \cdot K_2 \in \tilde{\mathfrak{R}}(E).$$

III) Se $\dim E = +\infty$, $K \in \tilde{\mathfrak{R}}(E)$,

$$\alpha K \in \tilde{\mathfrak{R}}(E) \Leftrightarrow \alpha \in \mathbf{R}, \qquad (\alpha \neq 0).$$

Dimostrazione. Nell'ipotesi I) $\hat{K}_1 \cdot \hat{K}_2 = \hat{0}$; ora se $\lambda_0 \in \operatorname{Im} \mathbf{C}$ gli operatori $\lambda_0 I - K_1$ e $\lambda_0 I - K_2$ sono di Fredholm; essendo la classe degli operatori di Fredholm un semigruppo moltiplicativo risulta

$$(\lambda_0 I - K_1)\cdot(\lambda_0 I - K_2) = \lambda_0[\lambda_0 - (K_1 + K_2) + K_1K_2]$$

ancora di Fredholm, quindi

$$\widehat{\lambda_0 I - (K_1 + K_2) + K_1} K_2 = \lambda_0 \hat{I} - \widehat{K_1 + K_2}$$

è invertibile per la Prop. 3.1, sicchè $\lambda_0 \notin \sigma(K_1 + K_2)$ e per la Prop. 3.2 l'operatore $K_1 + K_2 \in \tilde{\mathfrak{R}}(E)$.

La dimostrazione è analoga per la II) ove si tenga conto questa volta che $\widehat{K_1 + K_2} = \hat{0}$. La III) segue banalmente dal teorema spettrale.

Proviamo adesso alcuni risultati su successioni di $\tilde{\mathfrak{K}}(E)$. Utilizzeremo a tal scopo alcuni risultati di Newburg [7] su spazi di Banach premettendo sin d'adesso che la convergenza è intesa nel senso della topologia uniforme. Per « distanza di Hausdorff » tra due sottoinsiemi chiusi A e B di C si intende il numero:

$$\delta(A, B) = \max\big(\sup_{a\in A}\delta(a, B), \sup_{b\in B}\delta(b, A)\big)$$

dove $\delta(a, B) = \inf_{b\in B}|a-b|$ e $\delta(b, A) = \inf_{a\in A}|a-b|$.

Lemma 3.1 (Newburgh). Se E è un'algebra di Banach ed (x_n) è una successione che converge ad x tale che $x_n\cdot x = x\cdot x_n$ $(n = 1, 2, ...)$ allora $\sigma(x_n)$ converge a $\sigma(x)$ nella metrica di Hausdorff.

Prop. 3.4. Supponiamo che (K_n) sia una successione di $\tilde{\mathfrak{K}}(E)$ che converga a K, inoltre K_n e K siano Φ-commutabili (cioè $K_nK - K\cdot K_n \in \mathfrak{J}$). Abbiamo allora che $K\in\tilde{\mathfrak{K}}(E)$

Dimostrazione. Per ipotesi $\hat{K}_n\hat{K} = \hat{K}\hat{K}_n$, inoltre $\|\hat{K}_n - \hat{K}\| \leqslant \|K_n - K\|$ ci assicura che $\hat{K}_n \Rightarrow \hat{K}$, per il lemma precedente segue che $\sigma(K_n) \Rightarrow \sigma(K)$ nella metrica di Hausdorff, cioè $\sigma(\hat{K})$ è un sottoinsieme di $\mathbf{R}$.

Corollario. Se $(K_n)\subset\tilde{\mathfrak{K}}(E)$ converge a K e $K_nK = KK_n$ $(n = 1, 2, ...)$ risulta $K\in\tilde{\mathfrak{K}}(E)$.

Osserv. In [4] è stato provato che se $f(\lambda)$ è una funzione analitica in una regione che contiene $\sigma(K)$, $K\in\mathfrak{L}(E)$, ed inoltre per $\lambda_0\in\operatorname{Im}\mathbf{C}$ risulta $f(\lambda_0)\in\operatorname{Im}\mathbf{C}$, allora $f(K)\in\tilde{\mathfrak{K}}(E)$ implica $K\in\tilde{\mathfrak{K}}(E)$.

È vera anche la proprietà seguente:

Prop. 3.5. Sia f una funzione analitica su una regione contenente $\sigma(K)$, tale che $f(\mu)\in\mathbf{R}$, $\forall\mu\in R$, allora se $K\in\tilde{\mathfrak{K}}(E)$ anche $f(K)\in\tilde{\mathfrak{K}}(E)$.

Dimostrazione. Consideriamo solamente il caso $\dim E = +\infty$. Poichè $\varrho(K)\supseteq\varrho(\hat{K})$, se $\lambda\in\varrho(K)$ risulta

$$R_\lambda = (\widehat{\lambda I - K})^{-1} = (\lambda\hat{I} - \hat{K})^{-1}\,.$$

L'omomorfismo canonico $\mathfrak{L}(E)\to\mathfrak{L}(E)/\mathfrak{J}$ come è noto è continuo, quindi per le regole del calcolo in $\mathcal{L}(E)$ abbiamo

$$(a) \qquad f(\hat{K}) = \widehat{\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda) R_\lambda \, d\lambda} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda) \hat{R}_\lambda \, d\lambda$$

dove Γ è una curva contenuta in $\varrho(K)$ il cui interno contiene $\sigma(K)$.

Essendo $\sigma(\hat{K}) \subseteq \sigma(K)$, $f(\lambda)$ è ancora analitica in una regione contenente $\sigma(\hat{K})$, segue allora che l'ultima della ($\circ$) coincide con $f(\hat{K})$.

Se $K \in \tilde{\mathfrak{K}}(E)$, $\sigma(\hat{K})$ è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ e per il teorema spettrale $\sigma(\widehat{f(K)}) = \sigma(f(\hat{K})) = f(\sigma(\hat{K})) \subset \mathbb{R}$, cioè $f(K) \in \tilde{\mathfrak{K}}(E)$.

Confrontando l'osservazione precedente con l'ultima proposizione dimostrata abbiamo:

Corollario 3.2. $K \in \tilde{\mathfrak{K}}(E) \Leftrightarrow K^{2n-1} \in \tilde{\mathfrak{K}}(E)$, $n = 1, 2, \ldots$.

Corollario 3.3. $K \in \tilde{\mathfrak{K}}(E) \Leftrightarrow e^K \in \tilde{\mathfrak{K}}(E)$.

Sia $K \in \tilde{\mathfrak{K}}(E)$ e poniamo $\sigma_i(K) = \sigma(K) \cap \operatorname{Im} \mathbb{C}$. Nella Prop. 2.3 abbiamo visto come $\sigma_i(K)$ sia un insieme numerabile; supponiamo che esso non sia finito (diversamente, considerando in quel che segue le somme in senso finito le proposizioni continueranno ad essere vere) e che $(\lambda_j)_{j=1}^\infty$ sia un ordinamento di esso. Indichiamo infine con P_j la proiezione spettrale relativa al punto λ_j e supponiamo infine che l'ordinamento prescelto sia tale che $\sum_{j=1}^\infty KP_j$ converga nella topologia uniforme. In [3] è stato provato che se $\sigma(K)$ è totalmente sconnesso allora $K = C + S$ con $C \in K(E)$, $\sigma(S) \subseteq \mathbb{R}$, $C \cdot S = S \cdot C = 0$. Vogliamo dimostrare come tale proprietà di decomposizione sia ancora vera se non si fa alcuna ipotesi su $\sigma(K)$, ottenendo così anche una generalizzazione di un risultato di T. T. West ([9], Teor. 3.2).

Lemma 3.2. Sia $K \in \tilde{\mathfrak{K}}(E)$, $C_n = \sum_{j=1}^n KP_j$, $S_n = K - C_n$. Abbiamo:

I) $\sigma_i(C_n) = (\lambda_j)_{j=1}^n$, $\sigma_i(S_n) = (\lambda_j)_{j=n+1}^\infty$, $S_n C_n = C_n S_n = 0$,

II) $S_n C_m = C_m S$, $n, m = 1, 2, \ldots$.

Dimostrazione. Per la semplice dimostrazione della I) vedere [3] (Lemma 2.2). Proviamo la II). Sono ben note le eguaglianze ([6], § 49)

1) $P_i P_j = P_j P_i = \delta_{ij} P_j$, $i, j = 1, 2, \ldots$,

2) $KP_j = P_j K$, $j = 1, 2, \ldots$.

Utilizzando la 1) e la 2) abbiamo:

$$\Big(K - \sum_{j=1}^{n} KP_j\Big) P_h = \Big(I - \sum_{j=1}^{n} P_j\Big) KP_h =$$

$$= P_h \Big(I - \sum_{j=1}^{n} P_j\Big) K = P_h\Big(I - \sum_{j=1}^{n} KP_j\Big) ,$$

cioè

3) $S_n P_h = P_h S_n \quad n, h = 1, 2, \ldots.$

Inoltre $\Big(K - \sum_{j=1}^{n} KP_j\Big) K = K\Big(K - \sum_{j=1}^{n} P_j K\Big) = K\Big(K - \sum_{j=1}^{n} KP_j\Big)$, cioè

4) $S_n K = K S_n , \quad n = 1, 2, \ldots.$

Per la 3) e la 4) infine abbiamo:

$$S_n C_m = S_n\Big(\sum_{j=1}^{m} KP_j\Big) = S_n K\Big(\sum_{j=1}^{m} P_j\Big) = K\Big(\sum_{j=1}^{m} P_j\Big) S_n = C_m S_n .$$

Prop. 3.6. Sia $K \in \tilde{\mathfrak{K}}(E)$. Se per qualche ordinamento $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}$ di $\sigma_i(K)$ la serie $\sum_{j=1}^{\infty} KP_j$ converge, allora:

$K = C + S$ con C operatore compatto, S operatore a spettro reale e $CS = SC = 0$.

Dimostrazione. In [3] l'ipotesi che $\sigma(K)$ fosse totalmente sconnesso era utilizzata per provare, attraverso un lemma di Newburgh, che $\sigma(S) \subset R$.

Noi utilizzeremo il Lemma 3.1. Scelto $\varepsilon > 0$, per la Prop. 2.3 esiste $n \in N$ tale che: $|\mathrm{Im}\,\lambda_j| \leqslant \varepsilon$, $\forall j \geqslant n$. Sia $C_n = \sum_{j=1}^{n} KP_j$, $S_n = K - C_n$, per il lemma precedente abbiamo che $\sigma(S_n) \subset \{\lambda \in C\colon |\mathrm{Im}\,\lambda| \leqslant \varepsilon\}$. Sicchè al tendere di ε a 0, gli insiemi $\sigma(S_n)$ tendono nella metrica di Hausdorff ad un sottoinsieme della retta reale.

Per ipotesi la successione $\{C_n\}$ converge all'operatore $C = \sum_{j=1} KP_j$, che è compatto in quanto limite di operatori di rango finito, Quindi $S_n = K - C_n$ converge a $S = K - C$. Essendo per il lemma precedente $S_n C_m = C_m S_n$, segue che $S_n C = C S_n$ e quindi $S_n S = S S_n$. Per il Lemma 3.1 abbiamo infine che $\sigma(S_n) \to \sigma(S)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] M. S. LIVSIC, *Spectral analysis of non self-adjoint operators and intermediate systems*, Amer. Math. Soc. Transl., (2), **13** (1960), pp. 265-346.
[2] S. R. CARADUS, *Operators of Riesz type*, Pacific J. Math., **18** (1966), pp. 61-71.
[3] G. COSTANTIN, *On a generalization of Riesz operators, I*, Atti dell'Accademia dei Lincei, Rend. Sc. Fis. mat. e nat., **56** (1974), pp. 495-499.
[4] G. COSTANTIN, *On a generalization of Riesz operators, II*, Arti dell'Accademia dei Lincei, Rend. Sc. Fis. mat e nat., **56** (1974), pp. 684-687.
[5] H. HEUSER, *Über operatoren endliche defekten*, Inaug. Diss. Tubingen (1956).
[6] H. HEUSER, *Funktionalanalysis*, ed. B. G. Teubner, Stuttgart (1975).
[7] J. D. NEWBURGH, *The variation of spectra*, Duke Math. J., **18** (1951), pp. 165-176.
[8] J. T. SCHWARTZ, *Subdiagonalization of operators in Hilbert space with compact immaginary part*, Comm. Pure and App. Math., **15** (1962), pp. 159-172.
[9] T. T. WEST, *The decomposition of Riesz operators*, Proc. London Math. Soc., **16** (1966), pp. 737-752.

Manoscritto pervenuto in redazione il 23 dicembre 1978.