

RENDICONTI  
*del*  
SEMINARIO MATEMATICO  
*della*  
UNIVERSITÀ DI PADOVA

MARIANO TORRISI

ANTONINO VALENTI

**Su una classe di precessioni generalizzate  
semiregolari del solido pesante**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,*  
tome 61 (1979), p. 319-324

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1979\\_\\_61\\_\\_319\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1979__61__319_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## Su una classe di precessioni generalizzate semiregolari del solido pesante.

MARIANO TORRISI - ANTONINO VALENTI (\*)

SUMMARY - In this paper we examine the dynamical possibility of semiregular generalized precessions of vector  $\mathbf{K}$  for a heavy rigid body with a fixed point, when the figure axis is barycentric. We demonstrate that these motions are possible if and only if they are also regular generalized precessions.

### 1. Introduzione.

Nella ricerca dei moti dinamicamente possibili per un corpo rigido pesante  $C$ , fissato senza attrito per un suo punto  $O$ , particolare interesse ha suscitato lo studio della possibilità dinamica di classi di moti detti di precessione generalizzata [1].

Il problema fu posto, per la prima volta, nel 1952 [2] e successivamente nel 1954 [3] da G. Grioli che dimostrò la possibilità dinamica di precessioni generalizzate di vettore  $\mathbf{K}$ , momento delle quantità di moto, ed inoltre che tali moti, nel caso simmetrico, si riconducono a precessioni o in particolare a rotazioni; mentre nel caso asimmetrico  $\mathbf{K}$  risulta somma di due vettori costanti: il primo nello spazio assoluto, il secondo nello spazio solidale.

Successivamente C. Totaro [4], [5], [6] ed R. Troilo [7], [8], dimostrarono che le classi trovate in [2], [3] esaurivano la classe delle pre-

(\*) Indirizzo degli AA.: Istituto di Meccanica Razionale e Matematiche Appl. all'Ingegneria - Via Del Rotolo 46 - Catania.

Lavoro effettuato nell'ambito del G.N.F.M. del C.N.R.

cessioni generalizzate regolari e che inoltre in questi moti l'estremo libero di  $\omega$  applicata in  $O$  descrive un'ellisse solidale a  $C$ .

La ricerca di tali moti è stata proseguita ulteriormente da R. Balli [9] e I. Bonzani [10], [11].

Il primo, ricercando precessioni generalizzate semiregolari di vettore  $\mathbf{K}$  ad asse di precessione verticale, fa vedere come non sono possibili altri moti appartenenti alla classe suddetta se non quelli determinati in [2] e [3]. Analogamente I. Bonzani esclude la possibilità dinamica di precessioni generalizzate pseudoregolari che non rientrino nelle classi individuate in [2] e [3].

Nel presente lavoro ci proponiamo di accertare la possibilità dinamica di precessioni generalizzate semiregolari di vettore  $\mathbf{K}$  con asse di figura baricentrale e con asse di precessione qualsiasi. I risultati che si ottengono escludono l'esistenza di moti del tipo proposto che non rientrino nelle classi già individuate in [2] e [3].

## 2. Generalità ed equazioni di moto.

Per un corpo rigido fissato per un suo punto  $O$  è sempre possibile scegliere una terna solidale  $\tau$ , con origine in  $O$  ed avente il versore del terzo asse coincidente con  $\mathbf{u} = \text{vers } OG$ , di guisa che, qualunque sia la matrice d'inerzia  $\sigma$  (non degenerare) la sua inversa risulti:

$$\sigma^{-1} = \begin{vmatrix} A_1 & 0 & B_2 \\ 0 & A_2 & B_1 \\ B_2 & B_1 & A_3 \end{vmatrix}.$$

La possibilità dinamica dei moti cercati, nel caso del solido pesante, sarà accertata qualora risulti compatibile il seguente sistema:

$$(1) \quad \begin{cases} \sigma \dot{\omega} + \omega \wedge \sigma \omega = \lambda \mathbf{u} \wedge \boldsymbol{\gamma}, \\ \sigma \omega = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{u}, \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} + \omega \wedge \boldsymbol{\gamma} = 0, \\ \dot{\mathbf{a}} + \omega \wedge \mathbf{a} = 0, \\ \dot{\mathbf{u}} = 0, \end{cases}$$

dove: si è indicato con  $\boldsymbol{\gamma}$  il versore della verticale discendente e con  $\mathbf{a}$

un generico versore costante nello spazio assoluto; si è posto  $\lambda = |OG| \cdot m \cdot g$  ed  $\alpha$  e  $\beta$  sono due funzioni arbitrarie del tempo che riterremo alternativamente costanti secondo che si tratti di precessioni generalizzate semiregolari di prima specie ( $\beta = \text{cost}$ ) o di seconda specie ( $\alpha = \text{cost}$ ).

Si osservi che, qualora sia  $\alpha$  che  $\beta$  risultino costanti, poichè i moti sarebbero delle precessioni generalizzate regolari, trascureremo il loro studio in quanto, come già detto, è stato ampiamente trattato.

### 3. Precessioni generalizzate baricentrali semiregolari di prima specie.

La possibilità dinamica dei suddetti moti, come già accennato, viene accertata mediante lo studio della compatibilità dinamica del sistema (1) nell'ulteriore ipotesi che  $\beta = 0$  <sup>(1)</sup>.

Ciò posto, sostituendo la (1.II) nella (1.I) e tenendo conto della (1.IV) e (1.V) si ha:

$$(2) \quad \omega \wedge \beta u = \lambda u \wedge \gamma - \dot{\alpha} a .$$

È noto che per la risolubilità della (2) rispetto a  $\omega$  è necessario e sufficiente che

$$(3) \quad \dot{\alpha} \beta u \times a = 0 .$$

Tralasciando, come detto, i casi in cui  $\dot{\alpha} = 0$  il solo sistema di condizioni datoci dalla (3) che rimane da considerare, è:

$$(4) \quad \begin{cases} a \times u = 0 , \\ \beta \neq 0 , \\ \dot{\alpha} \neq 0 . \end{cases}$$

Si osserva subito che la classe di precessioni generalizzate cercata, se dinamicamente possibile, deve essere contenuta in quella delle precessioni ordinarie con asse di figura baricentrale e ortogonale all'asse

<sup>(1)</sup> Si suppone inoltre anche  $\beta \neq 0$  in quanto per  $\beta = 0$  gli eventuali moti si ridurrebbero alle rotazioni generalizzate già studiate in [2].

di precessione. Nell'ipotesi (4) dalla (2) si ricava:

$$(5) \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{\dot{\alpha}}{\beta} \mathbf{a} \wedge \mathbf{u} - \frac{\lambda}{\beta} \boldsymbol{\gamma} + \left( r(t) + \frac{\lambda}{\beta} \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{u} \right) \mathbf{u}$$

essendo  $r(t)$ , in generale, una funzione del tempo da determinare.

Inoltre dalla (5) si ha:

$$(6) \quad \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a} = -\frac{\lambda}{\beta} \mathbf{a} \times \boldsymbol{\gamma}$$

e

$$(6') \quad \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = r(t) .$$

Per cui in base alla (4.I), alla (6) e alla (6'), tenendo presente che  $\mathbf{a} \times \boldsymbol{\gamma} = M = \text{cost}$ , possiamo affermare che la classe dei moti cercati deve essere contenuta in quella delle precessioni semiregolari di seconda specie e possiamo pertanto scrivere:

$$(7) \quad \boldsymbol{\omega} = -\frac{\lambda M}{\beta} \mathbf{a} + r(t) \mathbf{u} .$$

Chiaramente tale  $\boldsymbol{\omega}$  deve verificare la relazione

$$(8) \quad \boldsymbol{\omega} = \alpha \sigma^{-1} \mathbf{a} + \beta \sigma^{-1} \mathbf{u}$$

per cui sostituendo la (7) in (8) e proiettando sulla terna solidale si perviene a:

$$(9) \quad \begin{cases} \beta \alpha A_1 a_1 + \beta^2 B_2 & = -\lambda M a_1 , \\ \beta \alpha A_2 a_2 + \beta^2 B_1 & = -\lambda M a_2 , \\ \alpha (B_2 a_1 + B_1 a_2) + \beta A_3 & = r(t) . \end{cases}$$

Combinando linearmente la (9.I) e la (9.II) in modo da eliminare i termini in  $\alpha$  si ottiene:

$$(10) \quad \lambda M (A_2 - A_1) a_1 a_2 + \beta^2 B_2 A_2 a_2 - \beta^2 B_1 A_1 a_1 = 0 .$$

Affinchè questa sia identicamente soddisfatta, tenendo presente che

$a_1^2 + a_2^2 = 1$  e  $\det \sigma \neq 0$ , deve accadere che:

i)  $M = 0, B_1^* = B_2 = 0$ ;

ii)  $A_1 - A_2 = 0, B_1 = B_2 = 0$ .

Per quanto riguarda la i) si osserva immediatamente che il sistema (9) non risulta compatibile con l'ipotesi fatta sulla struttura geometrica del corpo. Mentre per quanto riguarda la ii) porterebbe alla condizione  $\dot{\alpha} = 0$ . Ciò permette di affermare che non sono dinamicamente possibili moti di precessione generalizzata semiregolare di prima specie non degeneri ( $\dot{\alpha} \neq 0$ ) con asse di figura baricentrale.

#### 4. Precessioni generalizzate baricentrali semiregolari di seconda specie.

Come visto nel paragrafo precedente la possibilità dinamica dei moti suddetti viene accertata mediante lo studio della compatibilità del sistema (1) stavolta con le condizioni  $\dot{\alpha} = 0, \dot{\beta} \neq 0$ . Con procedimento analogo a quello già usato la (1.I) si può scrivere nella forma

$$\omega \wedge \beta u = \lambda u \wedge \gamma - \dot{\beta} u .$$

Di conseguenza la condizione di risolubilità rispetto a  $\omega$  è:

$$\dot{\beta} = 0 .$$

Ciò ci permette immediatamente di affermare, anche in questo caso, l'impossibilità dinamica dei moti cercati senza che sia anche  $\dot{\beta} = 0$ .

Con ciò risulta completamente dimostrato quanto affermato all'inizio della presente nota.

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] G. GRIOLI, *Qualche teorema di cinematica dei moti rigidi*, Rend. Acc. Naz. dei Lincei, Sez. VIII, **34**, fasc. 6 (1963).
- [2] G. GRIOLI, *Questioni di dinamica del solido pesante asimmetrico*, Rend. Sem. Mat. dell'Univ. di Padova, **21** (1952).
- [3] G. GRIOLI, *Forma intrinseca delle equazioni dinamiche del solido pesante asimmetrico e ricerca di moti di precessione*, Ann. Univ. di Ferrara, Sez. VII, **2** (1954).

- [4] C. TOTARO, *Precessioni generalizzate regolari ellittiche per un corpo rigido-pesante asimmetrico*, Rend. Sem. Mat. dell'Univ. di Padova, **40** (1968).
- [5] C. TOTARO, *Sull'impossibilità dinamica per il corpo asimmetrico pesante di precessioni generalizzate regolari non ellittiche con asse di precessione verticale*, Rend. Sem. Mat. dell'Univ. di Padova, **40** (1968).
- [6] C. TOTARO, *Il problema delle precessioni generalizzate regolari ellittiche per un solido pesante asimmetrico*, Rend. Sem. Mat. dell'Univ. di Padova, **41** (1968).
- [7] R. TROILO, *Alcune osservazioni sulle precessioni generalizzate*, Atti della Acc. delle Scienze di Torino, **106** (1971).
- [8] R. TROILO, *Determinazione della classe delle precessioni generalizzate regolari con asse di precessione verticale del solido pesante asimmetrico*, Rend. Sem. Mat. dell'Univ. di Padova, **47** (1972).
- [9] R. BALLI, *Sulle precessioni generalizzate semiregolari del solido pesante*, Rend. Sem. Mat. dell'Univ. di Padova, **52** (1974).
- [10] I. BONZANI, *Su una certa classe di precessioni generalizzate pseudoregolari*, Rend. Sem. Mat. Univers. Politecn. Torino, **32** (1973-74).
- [11] I. BONZANI, *Sulle precessioni generalizzate pseudoregolari di un corpo rigido pesante*, Rend. Sem. Mat. Univers. Politecn. Torino, **35** (1976-77).

Manoscritto pervenuto in redazione il 29 dicembre 1978.