Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova

Andrea Caranti

Proiettività dei p-gruppi di classe massimale

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 61 (1979), p. 393-404

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1979__61__393_0>

Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 61 (1979)

Proiettività dei p-gruppi di classe massimale.

Andrea Caranti (*)

Tutti i gruppi considerati saranno *p-gruppi finiti*. Le notazioni saranno quelle di [3]. In più, si useranno

$A \setminus B$ per la differenza degli insiemi A e B,

$H < \cdot G$, per indicare che H è sottogruppo massimo di G.

Un p-gruppo nonabeliano G si dice *di classe massimale* se ha la massima classe (di nilpotenza) compatibile con il suo ordine, ovvero se ha ordine p^n, $n \geqslant 3$, e classe $n-1$. Il lavoro di Blackburn [2] è di importanza fondamentale per la teoria dei p-gruppi di classe massimale; come riferimento assumeremo [3], III.14. Per le nozioni di teoria dei reticoli di sottogruppi, si rimanda a [6].

Dato il p-gruppo G, con

$$G_2 = [G, G], \qquad G_{i+1} = [G_i, G], \quad i \geqslant 2,$$

indichiamo i termini, diversi da G, della sua serie centrale discendente. Se G ha classe massimale e ordine p^n, si ha $|G:G_i| = p^i$ per ogni $2 \leqslant i \leqslant n$, e G_i è l'unico sottogruppo normale d'indice p^i di G, per $2 \leqslant i \leqslant n$; in particolare $G_i = Z_{n-i}(G)$, per $2 \leqslant i < n$. Inoltre G ha esattamente $p+1$ sottogruppi massimi ([3], III.14.2).

In questo lavoro si studiano le proiettività dei p-gruppi di classe massimale, ovvero gli isomorfismi fra il reticolo dei sottogruppi di un

(*) Indirizzo dell'Autore: Dipartimento di Matematica, Libera Università di Trento - 38050 Povo (Trento).

Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.

p-gruppo di classe massimale e quello di un altro gruppo. I 2-gruppi di classe massimale sono quaternionici generalizzati, diedrali o quasi-diedrali $\big([3]$, III.11.9 $(b)\big)$: è facile vedere che ciascuno di questi gruppi è invariante per proiettività. Ci limiteremo pertanto, d'ora in poi, a p-gruppi relativi a primi p *dispari*.

I p-gruppi di classe massimale non formano una classe reticolare: infatti il p-gruppo nonabeliano D d'ordine p^3 ed esponente p^2 è proiettivo al p-gruppo abeliano di tipo $(2, 1)$. Nel teorema 6 si mostra come una opportuna sottoclasse dei p-gruppi di classe massimale sia proiettivamente chiusa. Ciò permette di concludere in generale che se $\varphi\colon G \to G^\varphi$ è una proiettività, ove G è un p-gruppo di classe massimale mentre G^φ non lo è, allora $\mathrm{cl}\,(G^\varphi) = \mathrm{cl}\,(G) - 1$ (proposizione 7). Successivamente, dopo le proposizioni preparatorie 8, 10, 11, si perviene nel teorema 12 alla caratterizzazione dei p-gruppi di classe massimale che hanno immagini proiettive che non sono di classe massimale. Informazioni sull'identificazione dei sottogruppi modulari dei p-gruppi di classe massimale sono forniti dalla proposizione 4 e dal lemma 5.

1. Lemma. *Se un p-gruppo di classe massimale ha un quoziente G/N isomorfo a D, allora $N = 1$.*

Dimostrazione. Sia $|G| \geqslant p^4$ e $N \lhd G$ tale che $G/N \cong D$; allora deve essere $N \geqslant G_4$, ma G/G_4 (si veda la lista III.12.6 di [3]) non contiene alcun $N/G_4 \trianglelefteq G/G_4$ tale che $D \cong (G/G_4)/(N/G_4) \cong G/N$.

È noto che un p-gruppo G, di ordine almeno p^3, è di classe massimale se e solo se c'è $s \in G$ con $|C_G(s)| = p^2$ $\big([3]$, III. 14.23$\big)$. Dalla dimostrazione della sufficienza della condizione ci interessa isolare il seguente facile

2. Lemma. *Sia G un p-gruppo di classe massimale e ordine p^n. Sia $s \in G$ per cui $|C_G(s)| = p^2$. Allora per ogni $2 \leqslant i \leqslant n$ si ha $|C_{G/G_i}(sG_i)| = p^2$.*

Se uno almeno degli $s \in G$ per cui $|C_G(s)| = p^2$ ha ordine p si hanno i risultati positivi, relativi a sottogruppi modulari e proiettività di G, contenuti rispettivamente nella proposizione 4 e nel teorema 6. La situazione dei sottogruppi modulari nel caso generale è descritta nel lemma 5.

3. Lemma. *Sia G un p-gruppo di classe massimale, $s \in G$ per cui $|C_G(s)| = p^2$. Se $\langle s \rangle$ è modulare in G, allora G è isomorfo a D.*

Dimostrazione. Sia G un minimo controesempio: è chiaro che $|G| \geqslant p^4$. $\langle s \rangle Z(G)/Z(G)$ è modulare in $G/Z(G)$; per il lemma 2 è dunque $G/Z(G) \simeq D$, contro il lemma 1.

4. Proposizione. *Sia G un p-gruppo di classe massimale, e vi sia $s \in G$ d'ordine p per cui $|C_G(s)| = p^2$. Allora, se G non è isomorfo a D, i sottogruppi modulari di G sono tutti e soli i sottogruppi normali.*

Dimostrazione. Sia $Q \neq 1$, Q modulare in G. Per il lemma 3, $Q \neq \langle s \rangle$. Affermo che $Z(G) \leqslant Q$, dopodichè la proposizione si ottiene per induzione.

Difatti, $Q \trianglelefteq Q\langle s \rangle$, poichè $|Q\langle s \rangle : Q| \leqslant p$. Dunque $H = Z(Q\langle s \rangle) \cap \cap Q \neq 1$. Se $s \in H$, allora $Q \leqslant C_G(s)$, e si ha o $Q = Z(G)$, come richiesto; o Q è coniugato a $\langle s \rangle$, e $\langle s \rangle$ è modulare in G, contro il lemma 3; o $Q = C_G(s)$, e dunque $\langle s \rangle Z(G)/Z(G)$ è modulare in $G/Z(G)$: ma allora per il lemma 3 $G/Z(G) \simeq D$, e per il lemma 1 $Z(G) = 1$, assurdo. Se $s \notin H$, si ha $C_{Q\langle s \rangle}(s) \geqslant \langle s \rangle H$, per cui $C_{Q\langle s \rangle}(s) = C_G(s) \geqslant Z(G)$. Se per assurdo $Z(G) \nleqslant Q$, si ottiene $C_G(s) = HZ(G) \leqslant Z(Q\langle s \rangle)$. Dunque $Q \leqslant C_G(s)$, e si conclude come nel caso precedente.

5. Lemma. *Sia G un p-gruppo di classe massimale, Q un sottogruppo modulare di G. Allora c'è l'alternativa:*

(i) *$Q \geqslant Z(G)$, e Q è normale in G, oppure*

(ii) *$Q \ngeqslant Z(G)$, e allora Q non è normale in G, ma $Q \times Z(G) \trianglelefteq G$, e Q è elementare abeliano.*

Dimostrazione. Per i lemmi 1 e 2, e per la proposizione 4, i soli sottogruppi modulari di $G/Z(G)$ sono quelli normali. Allora è chiaro (i), e che sia $Q \times Z(G) \trianglelefteq G$ in (ii). $Z(G)$ è l'unico sottogruppo normale minimo di G, dunque nel caso (ii) Q non può contenere alcun sottogruppo normale non banale,

$$\bigcap_{x \in G} Q^x = 1 .$$

Ora, se Q^x è un coniugato di Q distinto da Q, tenendo conto che $QZ(G) \trianglelefteq G$ si ha

$$|Q : Q \cap Q^x| = |QQ^x : Q| = |QZ(G) : Q| = p ,$$

dunque $Q \cap Q^x \lessdot Q$, e $\Phi(Q) \leqslant \bigcap_{x \in G} Q^x = 1$.

6. Teorema. *Sia G un p-gruppo di classe massimale non isomorfo a D, e vi sia $s \in G$ di ordine p per cui $|C_G(s)| = p^2$. Sia $\varphi\colon G \to G^\varphi$ una proiettività. Allora G^φ è ancora un p-gruppo di classe massimale, e $(G_i)^\varphi = (G^\varphi)_i$, per $2 \leqslant i \leqslant n$.*

Dimostrazione. Sia G il minimo controesempio. Dalla proposizione 4 si ha $Z(G)^\varphi \lhd G^\varphi$. Per il lemma 1, $G/Z(G)$ non è isomorfo a D, sicchè la considerazione della proiettività indotta da φ fra $G/Z(G)$ e $G^\varphi/Z(G)^\varphi$ implica che $G^\varphi/Z(G)^\varphi$ è un p-gruppo di classe massimale. Per la proposizione 4, $Z(G/Z(G))^\varphi = Z(G^\varphi/Z(G)^\varphi)$, e dunque $Z(G^\varphi) = Z_2(G)^\varphi$. Allora $Z_2(G)$ è ciclico, altrimenti G avrebbe $p+1$ sottogruppi minimi modulari contro la proposizione 4, e $Z_2(G)\langle s\rangle$ è isomorfo a D. Se $Z_2(G)\langle s\rangle$ non è massimo in G, sia $Z_2(G)\langle s\rangle < M <\cdot\, G$. Per la minimalità di G, M^φ è di classe massimale, ma $|Z(M^\varphi)| \geqslant |Z(G^\varphi)| = p^2$, un assurdo. Allora $Z_2(G)\langle s\rangle <\cdot\, G$, ma allora $Z_2(G)$ e $\Omega_1(Z_2(G)\langle s\rangle)$ sono due sottogruppi normali distinti dello stesso ordine p^2 in G, ancora un assurdo.

Se tutti gli $s \in G$ per cui $|C_G(s)| = p^2$ hanno ordine p^2, i risultati della proposizione 4 e del teorema 6 non valgono più, come si vede facilmente su esempi d'ordine p^4. La proposizione seguente comincia a fornire un controllo sulla classe dell'immagine proiettiva di un p-gruppo di classe massimale.

7. Proposizione. *Sia G un p-gruppo di classe massimale e ordine p^n, $\varphi\colon G \to G^\varphi$ una proiettività di G sul gruppo G^φ che non sia di classe massimale. Allora* $\mathrm{cl}(G^\varphi) = \mathrm{cl}(G) - 1$, *e* $Z_i(G^\varphi) = Z_{i+1}(G)^\varphi$, *per* $1 \leqslant i \leqslant n-2$.

Dimostrazione. Si ha intanto $Z(G)^\varphi \lhd G^\varphi$, per [5], theorem 2.2. Ora per i lemmi 1 e 2 $G/Z(G)$ soddisfa alle ipotesi del teorema 6. Dunque $G^\varphi/Z(G)^\varphi$ è di classe massimale. Se G^φ stesso non lo è, è chiaro che $Z_2(G)^\varphi = Z(G^\varphi)$, ed è facile ottenere tutte le conclusioni dell'enunciato.

Nel teorema 12 si otterrà la caratterizzazione dei p-gruppi di classe massimale che hanno immagini proiettive non di classe massimale. I risultati intermedi, contenuti nel lemma 8 e nelle proposizioni 10 e 11, preparano la strada all'effettuazione dei calcoli risolutivi, mostrando che un tale G è regolare, d'ordine al più p^p, non eccezionale, ed ha un sottogruppo massimo d'esponente p.

8. Lemma. *Sia G un p-gruppo di classe massimale, $\varphi\colon G \to G^\varphi$ una proiettività di G su G^φ, con* $\mathrm{cl}(G^\varphi) = \mathrm{cl}(G) - 1$. *Allora $\Omega_1(G)$ ha esponente p, ed è massimo in G.*

DIMOSTRAZIONE. Mostriamo intanto, mediante induzione su $|G|$, che l'asserto vale per $|G| \leqslant p^{p+1}$.

G è proiettivo a un p-gruppo regolare, ed è P_3 (secondo [4]). Se il lemma non vale, l'ipotesi induttiva ci dà $\Omega_1(G) = \Phi(G)$ e, per P_3, $\mho_1(G) = Z_2(G)$. Sia ora $u \in G$ per cui $u^p \in \mho_1(G) \setminus Z(G)$, e $H = \langle u, \Phi(G)\rangle < \cdot\, G$. H è regolare, quindi

$$|\mho_1(H)| = |H \colon \Omega_1(H)| = |H \colon \Omega_1(G)| = p\,,$$

e $\langle u^p \rangle = \mho_1(H)$ è caratteristico in H, sicchè $\langle u^p \rangle \lhd G$, un assurdo.

Adesso basta mostrare che non esiste un gruppo d'ordine p^{p+2} che soddisfi alle ipotesi del lemma. In tal caso il sottogruppo massimo G_1, definito in [3], III.14.3, è regolare e $\Omega_1(G_1) = G_{(p+2)-p+1} = G_3$ ([3], III.14.16), mentre la prima parte della dimostrazione, applicata a un opportuno sottogruppo massimo di G, implica che G_2 ha esponente p, un assurdo.

9. LEMMA. *Sia G un p-gruppo d'esponente p, $\varphi\colon G \to G^\varphi$ una proiettività di G sul p-gruppo G^φ. Allora*

(i) *G^φ è d'esponente p,*

(ii) *se $A, B \leqslant G$, allora $[A, B]^\varphi = [A^\varphi, B^\varphi]$, dunque*

(iii) *φ conserva centralizzanti, normalizzanti, serie centrali ascendenti e discendenti.*

DIMOSTRAZIONE. È in [1], § 1.

10. PROPOSIZIONE. *Sia G un p-gruppo di classe massimale, $\varphi\colon G \to G^\varphi$ una proiettività di G su G^φ, con* $\mathrm{cl}\,(G^\varphi) = \mathrm{cl}\,(G) - 1$. *Allora G non è eccezionale (Ausnahme,* [3], III.14.5) *e* $G_1 = \Omega_1(G)$.

DIMOSTRAZIONE. Procediamo per assurdo: sarà dunque $|G| = p^n \geqslant p^6$, per [3], III.14.6(b). $Z_2(G)$ è elementare abeliano, per il lemma 8; scriviamo $Z_2(G) = \langle m \rangle \times Z(G)$. Per la proposizione 7, $Z_2(G)^\varphi = Z(G^\varphi)$, dunque $\langle m \rangle$ è modulare in G. Per il lemma 9 $\Omega_1(G) = C_G(m) = C_G(Z_2(G))$. Per definizione di eccezionalità e per [3], III.14.6(b) $G_1 = C_G(Z_i(G)/Z_{i-2}(G))$, per $3 \leqslant i \leqslant n-2$, è differente da $\Omega_1(G)$. Sia $e \in G$ per cui $\Omega_1(G) = \langle e, G_2\rangle$. Per [3], III.14.6($a$) $G/Z(G)$ è di classe massimale non eccezionale; dato che $(G/Z(G))_1 = G_1/Z(G)$, per [3], III.14.13 si ha

$$C_{G/Z(G)}(\langle e\rangle Z(G)/Z(G)) = \langle e\rangle Z_2(G)/Z(G)\,,$$

sicchè $C_G(e) = \langle e\rangle Z_2(G)$. È chiaro che $C_{G^\varphi}(\langle e\rangle^\varphi) \leqslant \Omega_1(G)^\varphi$, e dunque per il lemma 9 $C_{G^\varphi}(\langle e\rangle^\varphi) = \langle e\rangle^\varphi Z(G^\varphi)$.

Ora la mappa

$$\gamma\colon Z_3(G) \to Z_2(G)$$

definita da

$$x \mapsto [e, x]$$

è un omomorfismo di nucleo $Z_2(G)$, sicchè $|\operatorname{im}\gamma| = p$. Per l'eccezionalità di G, $\operatorname{im}\gamma \neq Z(G)$. Possiamo inoltre precisare la scelta di m in modo che sia anche $\operatorname{im}\gamma \neq \langle m\rangle$.

Affermo ora che $C_G(e) = N_G(\langle e, m\rangle)$. Intanto $N_G(\langle e, m\rangle) \leqslant \Omega_1(G)$, perchè se $y \in N_G(\langle e, m\rangle)\setminus\Omega_1(G)$ si ha $\langle e, y\rangle = G$, sicchè $G = \langle e, m\rangle\langle y\rangle$ ha ordine p^4, un assurdo. Basta ora far vedere che $N_G(\langle e, m\rangle) \cap G_2 = Z_2(G)$. Altrimenti, sia $y \in Z_i(G)\setminus Z_{i-1}(G)$ per cui $1 \neq [e, y] \in \langle m\rangle$. Se $i > 3$, sarebbe $e \in C_G\big(Z_i(G)/Z_{i-2}(G)\big)$, contro l'eccezionalità di G. Dunque $y \in Z_3(G)$, ma per la scelta di m è $[e, y] = \gamma(y) \notin \langle m\rangle$, un assurdo.

Anche in G^φ si vede che $N_{G^\varphi}(\langle e, m\rangle^\varphi) \leqslant \Omega_1(G)^\varphi$, e dunque per il lemma 9

$$N_{G^\varphi}(\langle e, m\rangle^\varphi) = C_{G^\varphi}(\langle e\rangle^\varphi) = \langle e\rangle^\varphi Z_2(G)^\varphi .$$

Nel quoziente $G^\varphi/\langle m\rangle^\varphi$ si ha che il sottogruppo, di ordine p, $\langle e, m\rangle^\varphi/\langle m\rangle^\varphi$ ha centralizzante

$$C_{G^\varphi/\langle m\rangle^\varphi}(\langle e, m\rangle^\varphi/\langle m\rangle^\varphi) = N_{G^\varphi/\langle m\rangle^\varphi}(\langle e, m\rangle^\varphi/\langle m\rangle^\varphi) = \langle e\rangle^\varphi Z_2(G)^\varphi/\langle m\rangle^\varphi$$

di ordine p^2. Per il criterio già ricordato $G^\varphi/\langle m\rangle^\varphi$ è di classe massimale, e non eccezionale per [3], III.14.6(b). Esiste allora un $M^\varphi <\cdot\, G^\varphi$ definito da

$$M^\varphi/\langle m\rangle^\varphi = (G^\varphi/\langle m\rangle^\varphi)_1 = C_{G^\varphi}(G_2^\varphi/G_4^\varphi)/\langle m\rangle^\varphi ,$$

$$M^\varphi/Z(G)^\varphi = \big(G^\varphi/Z(G)^\varphi\big)_1 = C_{G^\varphi}(G_2^\varphi/G_4^\varphi)/Z(G)^\varphi ,$$

per cui valgono le relazioni di non eccezionalità

$$[M^\varphi, Z_3(G)^\varphi] \leqslant \langle m\rangle^\varphi ,$$

$$[M^\varphi, Z_3(G)^\varphi] \leqslant Z(G)^\varphi ,$$

che implicano $[M^\varphi, Z_3(G)^\varphi] = 1$. In particolare $[G_2^\varphi, Z_3(G)^\varphi] = 1$ e, per il lemma 9, $[G_2, Z_3(G)] = 1$. Ora si ha

$$Z(G) \neq \operatorname{im}\gamma = [\langle e\rangle, Z_3(G)] = [\langle e\rangle G_2, Z_3(G)] = [\Omega_1(G), Z_3(G)] \lhd G\,,$$

e questo assurdo conclude la dimostrazione.

11. Proposizione. *Sia G un p-gruppo di classe massimale, φ: $G \to G^\varphi$ una proiettività di G su G^φ, con* $\mathrm{cl}\,(G^\varphi) = \mathrm{cl}\,(G) - 1$. *Allora G è regolare e quindi* $\big([3], \mathrm{III}.14.21\big)$ $|G| \leqslant p^p$.

Dimostrazione. È chiaro dalla dimostrazione del lemma 8 che un controesempio G può avere solamente ordine p^{p+1}. Si tratta ora di rileggere i calcoli della dimostrazione di [3], III.14.21, alla luce del lemma 8 e della proposizione 10. Con le notazioni di [3],

$$s^p = s^p s_1^p = (ss_1)^p s_p^{-1}[s_1, s, \ldots, s, s_1]^b\,.$$

L'ultimo commutatore è $[s_{p-1}, s_1] = 1$, poichè $s_1 \in G_1 = C_G\big(Z_2(G)\big) = C_G(s_{p-1})$, e dunque $(ss_1)^p = s^p s_p$. Sia ora $s_p = s^{pu}$, per qualche intero u, e v per cui $uv \equiv -1 (\mathrm{mod}\, p)$. Come in [3] la sostituzione di s_1 con s_1^v ci da

$$(ss_1^v)^p = s^p[s_1^v, s, \ldots, s] = s^p[s_1, s, \ldots, s]^v = s^p s_p^v = s^p s^{puv} = 1\,,$$

mentre $ss_1^v \notin G_1 = \Omega_1(G)$, un assurdo.

12. Teorema. *Sia G un p-gruppo di classe massimale, $|G| = p^n$, φ: $G \to G^\varphi$ una proiettività di G su G^φ, con* $\mathrm{cl}\,(G^\varphi) = \mathrm{cl}\,(G) - 1$. *Allora G è metabeliano e $\Omega_1(G)' \leqslant Z(G)$. Inoltre*

(i) *se $\Omega_1(G)$ è abeliano, G ha la presentazione* $\langle s, s_1, s_2, \ldots, s_{n-1} / s^p = s_{n-1};\ s_i^p = 1,$ *per* $1 \leqslant i \leqslant n-1;\ [s_i, s] = s_{i+1},$ *per* $1 \leqslant i \leqslant n-2;\ [s_i, s_j] = 1,$ *per* $1 \leqslant i, j \leqslant n-1\rangle$, *ove* $3 \leqslant n \leqslant p$;

(ii) *se $\Omega_1(G)' = Z(G)$, G ha la presentazione* $\langle s, s_1, s_2, \ldots, s_{n-1} / s^p = s_{n-1};\ s_i^p = 1,$ *per* $1 \leqslant i \leqslant n-1;\ [s_i, s] = s_{i+1},$ *per* $1 \leqslant i \leqslant n-2;\ [s_2, s_1] = s_{n-1}^a,$ *e* $[s_i, s_j] = 1$ *per* $\{i, j\} \neq \{1, 2\}\rangle$, *ove* $5 \leqslant n \leqslant p$, $a \not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\, p)$.

Per G^φ si hanno nei due casi le seguenti presentazioni:

(i') $\langle t, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1} / t^p = t_{n-1};\ t_i^p = 1,$ *per* $1 \leqslant i \leqslant n-1;\ [t_i, t] = t_{i+1},$ *per* $1 \leqslant i \leqslant n-3;\ [t_{n-2}, t] = 1;\ [t_i, t_j] = 1,$ *per* $1 \leqslant i, j \leqslant n-1\rangle$, *ove* $3 \leqslant n \leqslant p$;

(ii$'$) $\langle t, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1} / t^p = t_{n-1}; \; t_i^p = 1, \; per \; 1 \leqslant i \leqslant n-1; \; [t_i, t] = t_{i+1}, \; per \; 1 \leqslant i \leqslant n-3; \; [t_{n-2}, t] = 1; \; [t_2, t_1] = t_{n-1}^b; \; [t_i, t_j] = 1 \; per \; \{i, j\} \neq \{1, 2\} \rangle$, *ove* $5 \leqslant n \leqslant p$, $b \not\equiv 0 \pmod p$.

Viceversa, la mappa

$$s^i s_1^{i_1} \ldots s_{n-2}^{i_{n-2}} \mapsto t^i t_1^{i_1} \ldots t_{n-2}^{i_{n-2}}$$

induce una proiettività fra i gruppi in (i) *e* (i$'$); *la mappa*

$$s^i s_1^{i_1} \ldots s_{n-2}^{i_{n-2}} \mapsto t^i t_1^{i_1 ac} \ldots t_{n-2}^{i_{n-2}},$$

ove $bc \equiv 1 \pmod p$, *induce una proiettività fra i gruppi in* (ii) *e* (ii$'$).

Dimostrazione. L'ultima parte si vede agevolmente, con l'aiuto di un adattamento al caso di proiettività qualsiasi del lemma 1 di [1].

Veniamo allora alla parte diretta della dimostrazione. Nel seguito adotteremo le notazioni di [3], III.14.8, tenendo conto della proposizione 10. Dalla proposizione 11 si ha $n \leqslant p$.

Per il lemma 8, $\Omega_1(G) < \cdot G$. Se $\Omega_1(G)$ è abeliano, la presentazione (i) discende allora facilmente da [3], III. 14.8. G è dunque estensione non spezzante del $GF(p)$-spazio vettoriale $(n-1)$-dimensionale $\Omega_1(G)$ mediante un automorfismo d'ordine p che ha per matrice $\bar{s}$ nella base degli s_i un blocco di Jordan unipotente. Nella proposizione 7 si è visto che $G^\varphi / Z(G)^\varphi$ è di classe massimale, e dunque si presenta come (i). La considerazione della forma canonica di Jordan per la matrice $\bar{t}$ di t su $\Omega_1(G^\varphi)$, ove $t \in \langle s \rangle^\varphi$, conduce alla (i$'$).

Analizziamo il caso in cui G_2 è abeliano, ma $\Omega_1(G)$ non è abeliano. $\langle G_2, s \rangle < \cdot G$ ricade sotto (i), dunque s ha matrice $\bar{s}$ come prima sul $GF(p)$-spazio vettoriale G_2, nella base degli s_i. Esaminiamo la rappresentazione fedele di G/G_2 su G_2 indotta dal coniugio. Per la proposizione 10, G non è eccezionale e $G_1 = \Omega_1(G)$, sicchè la matrice $\bar{s}_1 = [a_{ij}]$ di s_1 nella base degli s_i è sottotriangolare, unipotente e $a_{i+1,i} = 0$ per ogni i. Nell'eguaglianza $\bar{s}_1 \bar{s} = \bar{s} \bar{s}_1$ la prima matrice ha elemento di posto (i, j).

$$a_{ij} + a_{i,j+1} \; ,$$

mentre la seconda ha

$$a_{i-1,j} + a_{ij} \; ,$$

sicchè $a_{i-1,j} = a_{i,j+1} = a_{i-j}$. Per quanto riguarda la rappresentazione fedele per coniugio di G^φ/G_2^φ su G_2^φ, c'è una base di G_2^φ il cui ultimo vettore genera $Z(G)^\varphi$ e rispetto a cui un fissato $t \in \langle s\rangle^\varphi$ ha matrice $\bar{t}$ come prima. $G^\varphi/Z(G)^\varphi$ è di classe massimale e non eccezionale, per il lemma 9, dunque $t_1 \in \langle s_1\rangle$ ha matrice $\bar{t}_1 = [\alpha_{ij}]$ analoga a $\bar{s}_1$. Confrontando l'ultima riga delle matrici ai due lati dell'eguaglianza $\bar{t}_1\bar{t} = \bar{t}\bar{t}_1$ si ha

$$\alpha_{n-2,j} + \alpha_{n-2,j+1} = \alpha_{n-2,j}\,, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n-5\,,$$

ovvero

$$\alpha_{n-2,2} = \alpha_{n-2,3} = \ldots = \alpha_{n-2,n-4} = 0\,.$$

Osserviamo ora che il sottospazio di G_2^φ generato dagli ultimi $n-3$ vettori della base scelta è $(n-3)$-dimensionale, G^φ-invariante e contiene $Z(G)^\varphi$: per il lemma 5 coincide con G_3^φ. Pertanto l'annullarsi degli $\alpha_{n-2,j}$ fornisce

$$Z(G)^\varphi \nleqslant [\langle t_1\rangle, G_3^\varphi]$$

che per il lemma 9 implica

$$Z(G) \nleqslant [\langle s_1\rangle, G_3]$$

e dunque $a_3 = a_4 = \ldots = a_{n-3} = 0$. Ponendo $a_{n-2} = a$ si ottiene (ii) Per (ii′) ci occorre un raffinamento dell'osservazione appena fatta, che ci sarà utile anche in seguito. Cominciamo col notare che se P è un p-gruppo di classe massimale, $s \in P$ per cui $|C_P(s)| = p^2$ e $H \leqslant P_2$, $|P:H| = p^i$, è normalizzato da s, allora $H = P_i$. Difatti, procediamo per induzione su $|H|$, il caso $|H| = p$ essendo ovvio. Sia allora $|H| \geqslant p^2$, e si prenda $K < \cdot H$ normalizzato da s: per ipotesi induttiva $K = P_{i+1}$, ed è chiaro che $H/P_{i+1} = Z(P/P_{i+1}) = P_i/P_{i+1}$ per il lemma 2. La forma sotto cui useremo questo argomento è quella di

OSSERVAZIONE. Sia P un p-gruppo di classe massimale, $\varphi\colon P \to P^\varphi$ una proiettività, $s \in P$ per cui $|C_P(s)| = p^2$ e $Z(P) \leqslant H \leqslant P_2$, $|P:H| = p^i$, con H^φ normalizzato da $\langle s\rangle^\varphi$; allora $H = P_i$. Ciò segue dall'argomento precedente poichè $\langle s\rangle Z(P)/Z(P)$ normalizza $H/Z(P)$.

Ora per ottenere (ii′), dal caso (i′) si trae che $t \in \langle s\rangle^\varphi$ ha matrice $\bar{t}$ su G_2^φ come prima, rispetto a una base opportuna il cui ultimo vettore generi $Z(G)^\varphi$. Per l'osservazione il sottospazio di G_2^φ generato dagli ultimi $n-3$ vettori coincide con G_3: ma per il lemma 9 le relazioni

$$[\langle s_1\rangle, G_3] = 1\,, \qquad [\langle s_1\rangle, G_2] = Z(G)$$

implicano

$$[\langle s_1\rangle^\varphi, G_2^\varphi] = 1\,, \qquad [\langle s_1\rangle^\varphi, G_3^\varphi] = Z(G)^\varphi\,,$$

ottenendo (ii′), per $t_1 \in \langle s_1\rangle^\varphi$.

Resta ora da mostrare che un gruppo come nelle ipotesi del teorema è sempre metabeliano: sia d'ora in poi G un minimo controesempio. Allora G_3 è elementare abeliano e G/G_3, che è isomorfo per il lemma 1 al gruppo non abeliano d'ordine p^3 ed esponente p, agisce fedelmente per coniugio su G_3. $\langle G_2, s\rangle$ ricade sotto (ii), dunque s ha matrice $\bar{s}$ su G_3 come in quel caso, nella base degli s_i, e s_2 ha matrice $\bar{s}_2 = 1 + aE_{n-3,1}$, ove $E_{n-3,1}$ è la matrice che ha 0 ovunque, e 1 al posto $(n-3, 1)$. Per la non eccezionalità di G, s_1 ha matrice $\bar{s}_1 = [b_{ij}]$ sottotriangolare, unipotente e $b_{i+1,i} = 0$. Dalla relazione di definizione di s_2 si ha $\bar{s}_1\bar{s} = \bar{s}\bar{s}_1\bar{s}_2$; la prima matrice ha elemento di posto (i, j)

$$b_{ij} + b_{i,j+1}\,,$$

la seconda

$$\begin{aligned} &b_{i-1,j} + b_{ij}\,, && \text{se } (i, j) \neq (n-3, 1) \\ &b_{n-4,1} + b_{n-3,1} + a\,, && \text{se } i = n-3,\ j = 1\,. \end{aligned}$$

Dal confronto si ottiene

$$\begin{aligned} &b_{i-1,j} = b_{i,j+1} = b_{i-j}\,, \qquad \text{per } 3 \leq i-j \leq n-5\,, \\ &b_{n-4,1} = b_2\,, \qquad b_{n-3,2} = b_2 + a\,, \\ &b_{n-3,1} = b_1\,. \end{aligned}$$

Ora $G^\varphi/G_3^\varphi \simeq G/G_3$ agisce fedelmente per coniugio su G_3. Posso scegliere

$$t \in \langle s\rangle^\varphi\,, \qquad t_1 \in \langle s_1\rangle^\varphi\,, \qquad t_2 \in \langle s_2\rangle^\varphi$$

in modo che si abbia ancora fra gli automorfismi di G_3^φ associati $\bar{t}_1\bar{t} = \bar{t}\bar{t}_1\bar{t}_2$. In una opportuna base di G_3^φ, il cui ultimo vettore generi $Z(G)^\varphi$, $\bar{t}$ si può porre nella forma vista in (i′), e $\bar{t}_2$ nella forma $1 + \alpha E_{n-3,1}$.

Per il lemma 9 e l'osservazione, $t_1 = [\beta_{ij}]$ è sottotriangolare, unipotente e $\beta_{i+1,i} = 0$. Ora nell'eguaglianza $\bar{t}_1\bar{t} = \bar{t}\bar{t}_1\bar{t}_2$ la prima matrice ha elemento di posto $(n-3, j)$

$$\beta_{n-3,j} + \beta_{n-3,j+1} ,$$

la seconda

$$\begin{aligned} &\beta_{n-3,j} , && \text{se } j > 1 , \\ &\beta_{n-3,1} + \alpha , && \text{se } j = 1 . \end{aligned}$$

Confrontando si ha

$$\beta_{n-3,3} = \ldots = \beta_{n-3,n-5} = 0$$

ovvero, per l'osservazione,

$$Z(G)^\varphi \nleq [\langle t_1 \rangle, G_5^\varphi]$$

e per il lemma 9

$$Z(G) \nleq [\langle s_1 \rangle, G_5] ,$$

sicchè

$$b_3 = b_4 = \ldots = b_{n-5} = 0 .$$

I calcoli precedenti ci hanno fornito le seguenti relazioni in G, in aggiunta a quelle di definizione degli s_i,

$$\begin{aligned} [s_3, s_2] &= s_{n-1}^{a} \\ [s_3, s_1] &= s_{n-2}^{b_2} s_{n-1}^{b_1} \\ [s_4, s_1] &= s_{n-1}^{b_2+a} , \end{aligned}$$

e $[s_i, s_j] = 1$ per gli altri valori di i, j. Utilizzando queste relazioni è adesso facile ottenere dall'identità di Witt

$$\begin{aligned} 1 &= [s_3, s, s_1]^{s^{-1}} [s^{-1}, s_1^{-1}, s_3]^{s_1} [s_1, s_3^{-1}, s^{-1}]^{s_3} = \\ &= \quad s_{n-1}^{b_2+a} \qquad s_{n-1}^{a} \qquad s_{n-1}^{-b_2} \quad = \\ &= s_{n-1}^{2a} \qquad , \end{aligned}$$

sicchè $2a \equiv 0 \pmod p$, e poichè p è dispari $a \equiv 0 \pmod p$, un assurdo.

BIBLIOGRAFIA

[1] D. W. BARNES - G. E. WALL, *On normaliser preserving lattice isomorphisms between nilpotent groups*, J. Australian Math. Soc., **4** (1964), pp. 454-469,

[2] N. BLACKBURN, *On a special class of p-groups*, Acta Math., **100** (1958). pp. 45-92.

[3] B. HUPPERT, *Endliche Gruppen I*, Springer, Berlin, 1967.

[4] A. MANN, *The power structure of p-groups I*, J. Algebra, **42** (1976), pp. 121-135.

[5] R. SCHMIDT, *Normal subgroups and lattice isomorphisms of finite groups*, Proc. London Math. Soc. (3), **30** (1975), pp. 287-300.

[6] M. SUZUKI, *Structure of a Group and the Structure of its Lattice of Subgroups*, Springer, Berlin, 1956.

Manoscritto pervenuto in redazione il 17 novembre 1978
e in forma revisionata il 2 marzo 1979.