RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

CARMELO TOTARO

Questioni di dinamica del corpo rigido

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 61 (1979), p. 49-60

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1979__61__49_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 61 (1979)

Questioni di dinamica del corpo rigido.

CARMELO TOTARO (*)

Introduzione.

Mi propongo di stabilire vari risultati riguardanti il problema dinamico del moto di un corpo rigido $\mathcal{C}$, intorno ad un punto fisso O, nell'ipotesi che il momento $\boldsymbol{M}_0$ delle forze esterne rispetto ad O dipenda dalla velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ e da due vettori $\boldsymbol{c}$ ed $\boldsymbol{H}$ invariabili rispetto al riferimento $\mathcal{S}$.

Nella detta ipotesi rientrano il caso di un corpo rigido pesante, quando si vuole tenere conto anche degli effetti della forza di Coriolis e l'altro caso, pure rimarchevole, di un corpo rigido pesante elettricamente carico mobile in un campo magnetico uniforme (1).

Nel n. 1, scritte le equazioni fondamentali, prima in generale e poi con speciale riguardo al caso delle forze di Coriolis, si richiamano, per il sistema differenziale che governa il problema, tre integrali primi di natura geometrica e si stabiliscono condizioni per l'esistenza dell'integrale dell'energia e dell'integrale del momento assiale in un caso speciale. Si prova pure che, in generale, nell'ipotesi di forze del tipo di Coriolis, l'integrale del momento assiale non esiste.

Nel n. 2 si tratta il problema delle rotazioni uniformi. Trovo che tali rotazioni sono possibili solo ai poli dell'asse terrestre ($\boldsymbol{H} = \pm \boldsymbol{c}$) quando una generatrice del cono di Staude si dispone verticalmente

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica dell'Università - Via C. Battisti, 90 - Messina.

Lavoro eseguito nell'ambito della Sezione n. 3 del G.N.F.M. (Meccanica dei continui solidi) del C.N.R.

(1) G. GRIOLI, *Sul moto di un corpo rigido asimmetrico soggetto a forze di potenza nulla*, Rend. del Sem. Mat. dell'Univ. di Padova, vol. **27** (1957).

e gli si imprimono certe ben determinate velocità angolari. Le formule classiche sono rese più complicate dalla presenza della velocità angolare della Terra.

Nel n. 3 si ottiene, con riferimento ad un giroscopio, un integrale primo che generalizza quello classico di Lagrange-Poisson per il corpo pesante e si segnala un caso in cui il sistema dinamico fondamentale subisce una notevole semplificazione.

Nel n. 4 si caratterizzano le precessioni regolari dinamicamente possibili ad asse di precessione verticale e con asse di figura coincidente con l'asse giroscopico. Si trova che le dette precessioni sono possibili solo ai poli dell'asse terrestre.

1. Equazioni fondamentali ed integrali primi.

Il problema, cui si è accennato nell'introduzione, si traduce nel seguente sistema di equazioni

$$\left\{\begin{array}{l}\sigma\dot{\boldsymbol{\omega}}+\boldsymbol{\omega}\wedge\sigma\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{M}_0(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{c},\boldsymbol{H}),\\ \dot{\boldsymbol{c}}+\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{c}=0, \qquad \dot{\boldsymbol{H}}+\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{H}=0,\end{array}\right. \tag{1.1}$$

ove σ è l'omografia d'inerzia di $\mathcal{C}$ relativa ad O. Uno degli esempi notevoli è quello del corpo pesante sottoposto pure all'azione delle forze di Coriolis, nel qual caso le (1.1) si specializzano in questo modo

$$\left\{\begin{array}{l}\sigma\dot{\boldsymbol{\omega}}+\boldsymbol{\omega}\wedge\sigma\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{G}\wedge\boldsymbol{c}+\boldsymbol{\omega}\wedge\psi\boldsymbol{H},\\ \dot{\boldsymbol{c}}+\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{c}=0, \qquad \dot{\boldsymbol{H}}+\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{H}=0,\end{array}\right. \tag{1.2}$$

ove $\boldsymbol{G}=mgOG$ è il prodotto del modulo del peso, mg, per la coordinata vettoriale, OG, del baricentro G, $\boldsymbol{c}$ il versore della verticale discendente ed $\boldsymbol{H}$ il versore della velocità angolare della Terra $[\boldsymbol{\Omega}=\Omega\boldsymbol{H}]$ nel moto di rotazione intorno al proprio asse; si è posto inoltre $\psi=\Omega(\lambda-2\sigma)$, ove Ω è il modulo della detta velocità angolare e λ l'invariante lineare di σ. Poichè λ è una omotetia e σ una dilatazione, segue che anche ψ è una dilatazione.

Le (1.2) sono altresì valide, con un diverso significato di ψ ed $\boldsymbol{H}$, nel caso di forze di Lorentz.

Il sistema (1.1), e quindi anche (1.2), ammette questi tre integrali primi

$$c^2 = 1\,, \qquad H^2 = 1\,, \qquad \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{H} = k\,, \tag{1.3}$$

ove, per brevità, si è posto $k = \cos\widehat{\boldsymbol{cH}}$.

Col fine di stabilire per il sistema (1.1) un quarto integrale primo del tipo dell'integrale dell'energia

$$\sigma\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega} - 2U = 2E \tag{1.4}$$

(U potenziale della sollecitazione, E energia meccanica totale), moltiplichiamo la (1.1_1) scalarmente per $\boldsymbol{\omega}$; si ottiene

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\sigma\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{M}_0(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{H})\times\boldsymbol{\omega}\,. \tag{1.5}$$

Questa (2) dà luogo ad un integrale del tipo (1.4) se e solo se

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_0\times\boldsymbol{\omega} = \frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial c_i}\dot{c}_i + \frac{\partial U}{\partial H_i}\dot{H}_i = \\ = \operatorname{grad}_c U\times\boldsymbol{c}\wedge\boldsymbol{\omega} + \operatorname{grad}_H U\times\boldsymbol{H}\wedge\boldsymbol{\omega}\,,\end{aligned} \tag{1.6}$$

cioè

$$(\boldsymbol{M}_0 - \operatorname{grad}_c U\wedge\boldsymbol{c} - \operatorname{grad}_H U\wedge\boldsymbol{H})\times\boldsymbol{\omega} = 0\,. \tag{1.6'}$$

Pertanto, il sistema (1.1) ammette l'integrale dell'energia se $\boldsymbol{M}_0$ è del tipo

$$\boldsymbol{M}_0 = \operatorname{grad}_c U\wedge\boldsymbol{c} + \operatorname{grad}_H U\wedge\boldsymbol{H} + \boldsymbol{\beta}\wedge\boldsymbol{\omega}\,, \tag{1.7}$$

ove

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{H}) \tag{1.8}$$

è una funzione arbitraria.

Nel caso particolare (1.2) da (1.7) si giunge al ben noto integrale primo

$$\sigma\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega} - 2\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{c} = \text{cost}\,, \tag{1.9}$$

in accordo col fatto che le forze di Coriolis non lavorano.

(2) Cfr. G. Grioli, *Questioni di dinamica del corpo rigido*, Rend. Accad. dei Lincei, ser. VIII, **35**, fasc. 1-2 (1963), pp. 35-39.

Tentiamo adesso di ottenere un altro integrale primo, moltiplicando ambo i membri di (1.1_1) scalarmente per $\boldsymbol{c}$

$$\frac{d}{dt}(\sigma\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{M}_0\times\boldsymbol{c}\,. \tag{1.10}$$

Procedendo come sopra, osserviamo che la (1.10) dà luogo ad un integrale primo se esiste una funzione

$$L = L(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{H}) \tag{1.11}$$

tale che

$$\boldsymbol{M}_0\times\boldsymbol{c} = \frac{dL}{dt} \equiv \operatorname{grad}_c L\times\dot{\boldsymbol{c}} + \operatorname{grad}_H L\times\dot{\boldsymbol{H}}\,. \tag{1.12}$$

Premesso ciò, fissiamo l'attenzione sul sistema differenziale (1.2), distinguendo due casi $\boldsymbol{c}\parallel\boldsymbol{H}$ e $\boldsymbol{c}\nparallel\boldsymbol{H}$.

Primo caso. Supposto $\boldsymbol{H} = \pm\,\boldsymbol{c}$, scriviamo

$$\psi\boldsymbol{H} = \Psi\boldsymbol{c}\,. \tag{1.13}$$

In questo primo caso, L dipende solo da $\boldsymbol{c}$ e la (1.12), tenendo pure conto di (1.2_2), diviene

$$(\operatorname{grad}_c L - \Psi\boldsymbol{c})\wedge\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{c} = 0\,. \tag{1.14}$$

Prescindendo da un inessenziale termine proporzionale a $\boldsymbol{c}$, si può soddisfare la (1.14) ponendo

$$\operatorname{grad}_c L = \Psi\boldsymbol{c} \tag{1.15}$$

da cui si deduce

$$L = \tfrac{1}{2}\Psi\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{c}\,. \tag{1.16}$$

Quindi l'integrale primo che cerchiamo è

$$(\sigma\boldsymbol{\omega} - \tfrac{1}{2}\Psi\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{c} = \text{cost}\,. \tag{1.17}$$

Secondo caso. Se $\boldsymbol{c} \nparallel \boldsymbol{H}$, la (1.10), con riguardo al sistema (1.2), diviene

$$\frac{d}{dt}(\sigma\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{c}) = \psi\boldsymbol{H}\times\dot{\boldsymbol{c}}\,. \tag{1.18}$$

Generalizzando un poco il ragionamento del primo caso e prescindendo dagli integrali (1.3), si prova facilmente che il secondo membro non può essere una derivata temporale esatta di una funzione $L(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{H})$.

Proveremo ora che L non esiste neanche tenendo conto degli integrali (1.3). Imponendo al secondo membro di (1.18) di essere la derivata temporale di una funzione $L(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{H})$, si ottiene

$$\mathrm{grad}_H L\times\dot{\boldsymbol{H}} + (\mathrm{grad}_c L - \psi\boldsymbol{H})\times\dot{\boldsymbol{c}} = 0\,. \tag{1.19}$$

Riferendo i vettori di (1.19) agli assi principali d'inerzia di C relativamente al punto fisso O, si ha

$$\frac{\partial L}{\partial H_i}\dot{H}_i + \left(\frac{\partial L}{\partial c_i} - \overline{\psi_i H_i}\right)\dot{c}_i = 0\,, \tag{1.19'}$$

ove la sopralineatura serve a ricordare che in $\psi_i H_i$ non è sottintesa, contrariamente al solito, alcuna sommazione rispetto all'indice ripetuto; le ψ_i sono le tre componenti diverse da zero dell'omografia ψ.

Scritte le (1.3) in forma cartesiana, assieme alle equazioni derivate

$$\begin{cases} c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1\,, \\ H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 = 1\,, \\ c_1 H_1 + c_2 H_2 + c_3 H_3 = k\,, \end{cases} \tag{1.3'}$$

$$\begin{cases} c_1\dot{c}_1 + c_2\dot{c}_2 + c_3\dot{c}_3 = 0\,, \\ H_1\dot{H}_1 + H_2\dot{H}_2 + H_3\dot{H}_3 = 0\,, \\ \dot{c}_1 H_1 + \dot{c}_2 H_2 + \dot{c}_3 H_3 + c_1\dot{H}_1 + c_2\dot{H}_2 + c_3\dot{H}_3 = 0\,, \end{cases} \tag{1.20}$$

le ultime tre si possono risolvere rispetto a $\dot{c}_1$, $\dot{c}_2$, $\dot{H}_3$, ottenendo

$$\begin{cases} \dot{c}_1 = \dfrac{H_3\mathcal{T}_1\dot{c}_3 - c_2\mathcal{T}_2\dot{H}_1 + c_2\mathcal{T}_1\dot{H}_2}{H_3\mathcal{T}_3}\,, \\[2ex] \dot{c}_2 = \dfrac{H_3\mathcal{T}_2\dot{c}_3 + c_1\mathcal{T}_2\dot{H}_1 - c_1\mathcal{T}_1\dot{H}_2}{H_3\mathcal{T}_3}\,, \\[2ex] \dot{H}_3 = -\dfrac{H_1\dot{H}_1 + H_2\dot{H}_2}{H_3}\,, \end{cases} \tag{1.21}$$

ove, per brevità, si è posto

$$\mathfrak{T} \equiv (\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \mathfrak{T}_3) = \boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{H}. \tag{1.22}$$

Sostituendo le (1.21) in (1.19′) si ottiene

$$\begin{aligned}(1.23)\qquad & \frac{1}{\mathfrak{T}_3}\left[\mathfrak{T}_1\left(\frac{\partial L}{\partial c_1} - \psi_1 H_1\right) + \mathfrak{T}_2\left(\frac{\partial L}{\partial c_2} - \psi_2 H_2\right) + \mathfrak{T}_3\left(\frac{\partial L}{\partial c_3} - \psi_3 H_3\right)\right]\dot{c}_3 + \\ & + \frac{1}{H_3}\left[\left(H_3\frac{\partial L}{\partial H_1} - H_1\frac{\partial L}{\partial H_3}\right) - \frac{c_2\mathfrak{T}_2}{\mathfrak{T}_3}\left(\frac{\partial L}{\partial c_1} - \psi_1 H_1\right) + \frac{c_1\mathfrak{T}_2}{\mathfrak{T}_3}\left(\frac{\partial L}{\partial c_2} - \psi_2 H_2\right)\right]\dot{H}_1 + \\ & + \frac{1}{H_3}\left[\left(H_3\frac{\partial L}{\partial H_2} - H_2\frac{\partial L}{\partial H_3}\right) + \frac{c_2\mathfrak{T}_1}{\mathfrak{T}_3}\left(\frac{\partial L}{\partial c_1} - \psi_1 H_1\right) - \frac{c_1\mathfrak{T}_1}{\mathfrak{T}_3}\left(\frac{\partial L}{\partial c_2} - \psi_2 H_2\right)\right]\dot{H}_2 = 0 .\end{aligned}$$

Eseguiamo la seguente sostituzione di variabili

$$(1.24)\qquad \begin{cases} z = H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 - 1 , & \xi_1 = H_1 , \\ \eta = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 - 1 , & \xi_2 = H_2 , \\ \tau = c_1 H_1 + c_2 H_2 + c_3 H_3 - k , & \xi_3 = c_3 . \end{cases}$$

Con tale sostituzione di variabili abbiamo

$$(1.25)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial c_1} = 2c_1\dfrac{\partial L}{\partial \eta} + H_1\dfrac{\partial L}{\partial \tau}, & \dfrac{\partial L}{\partial H_1} = 2H_1\dfrac{\partial L}{\partial z} + c_1\dfrac{\partial L}{\partial \tau} + \dfrac{\partial L}{\partial \xi_1}, \\ \dfrac{\partial L}{\partial c_2} = 2c_2\dfrac{\partial L}{\partial \eta} + H_2\dfrac{\partial L}{\partial \tau}, & \dfrac{\partial L}{\partial H_2} = 2H_2\dfrac{\partial L}{\partial z} + c_2\dfrac{\partial L}{\partial \tau} + \dfrac{\partial L}{\partial \xi_2}, \\ \dfrac{\partial L}{\partial c_3} = 2c_3\dfrac{\partial L}{\partial \eta} + H_3\dfrac{\partial L}{\partial \tau} + \dfrac{\partial L}{\partial \xi_3}, & \dfrac{\partial L}{\partial H_3} = 2H_3\dfrac{\partial L}{\partial z} + c_3\dfrac{\partial L}{\partial \tau} . \end{cases}$$

Da (1.23), data l'arbitrarietà di $\dot{c}_3$, $\dot{H}_1$, $\dot{H}_2$, si ottiene

$$(1.26)\qquad \begin{cases} \mathfrak{T}_1\dfrac{\partial L}{\partial c_1} + \mathfrak{T}_2\dfrac{\partial L}{\partial c_2} + \mathfrak{T}_3\dfrac{\partial L}{\partial c_3} = \psi_1 H_1\mathfrak{T}_1 + \psi_2 H_2\mathfrak{T}_2 + \psi_3 H_3\mathfrak{T}_3 , \\ H_3\dfrac{\partial L}{\partial H_1} - H_1\dfrac{\partial L}{\partial H_3} - \dfrac{c_2\mathfrak{T}_2}{\mathfrak{T}_3}\dfrac{\partial L}{\partial c_1} + \dfrac{c_1\mathfrak{T}_2}{\mathfrak{T}_3}\dfrac{\partial L}{\partial c_2} = \\ \qquad\qquad = -\psi_1 H_1\dfrac{c_2\mathfrak{T}_2}{\mathfrak{T}_3} + \psi_2 H_2\dfrac{c_1\mathfrak{T}_2}{\mathfrak{T}_3} , \\ H_3\dfrac{\partial L}{\partial H_2} - H_2\dfrac{\partial L}{\partial H_3} + \dfrac{c_2\mathfrak{T}_1}{\mathfrak{T}_3}\dfrac{\partial L}{\partial c_1} - \dfrac{c_1\mathfrak{T}_1}{\mathfrak{T}_3}\dfrac{\partial L}{\partial c_2} = \\ \qquad\qquad = \psi_1 H_1\dfrac{c_2\mathfrak{T}_1}{\mathfrak{T}_3} - \psi_2 H_2\dfrac{c_1\mathfrak{T}_1}{\mathfrak{T}_3} . \end{cases}$$

Posto

$$Q = c \wedge \psi H \tag{1.27}$$

e tenuto conto delle (1.25), le (1.26) divengono

$$\frac{\partial L}{\partial \xi_1} = \frac{\mathcal{T}_2 Q_3}{\mathcal{T}_3 H_3}, \qquad \frac{\partial L}{\partial \xi_2} = -\frac{\mathcal{T}_1 Q_3}{\mathcal{T}_3 H_3}, \qquad \frac{\partial L}{\partial \xi_3} = \frac{\psi H \times \mathcal{T}}{\mathcal{T}_3}. \tag{1.28}$$

Le (1.28) devono soddisfare le seguenti condizioni di compatibilità

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \xi_i \, \partial \xi_j} = \frac{\partial^2 L}{\partial \xi_j \, \partial \xi_i} \qquad (i, j = 1, 2, 3). \tag{1.29}$$

Le (1.29) devono verificarsi in qualunque punto dei domini di variabilità di ξ_1, ξ_2, ξ_3, che sono variabili tra loro indipendenti.

Mostreremo che la condizione

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \xi_1 \, \partial \xi_2} = \frac{\partial^2 L}{\partial \xi_2 \, \partial \xi_1} \tag{1.30}$$

non si verifica nei punti ($\xi_1 \neq 0$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 0$).

A tale scopo notiamo che dalle (1.3′) per $\xi_3 = 0$ si ottiene

$$c_1 = \frac{k\xi_1 \pm \xi_2 \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 - k^2}}{\xi_1^2 + \xi_2^2}, \qquad c_2 = \frac{k\xi_2 \mp \xi_1 \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 - k^2}}{\xi_1^2 + \xi_2^2} \tag{1.31}$$

e le (1.28_1) e (1.28_2) divengono

$$\frac{\partial L}{\partial \xi_1} = \frac{\psi_1 \xi_1 c_1 c_2 - \psi_2 \xi_2 c_1^2}{\xi_2 c_1 - \xi_1 c_2}, \qquad \frac{\partial L}{\partial \xi_2} = \frac{\psi_1 \xi_1 c_2^2 - \psi_2 \xi_2 c_1 c_2}{\xi_2 c_1 - \xi_1 c_2}. \tag{1.32}$$

Con un pò di calcoli si ottiene

$$\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \xi_1 \, \partial \xi_2}\right)_{\substack{\xi_2=0\\ \xi_3=0}} = -\psi_1 \left(\frac{\partial c_2}{\partial \xi_1}\right)_{\substack{\xi_2=0\\ \xi_3=0}} = \frac{-\psi_1 k^2}{\mp \xi_1^2 \sqrt{\xi_1^2 - k^2}}, \\ &\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \xi_2 \, \partial \xi_1}\right)_{\substack{\xi_2=0\\ \xi_3=0}} = \left[(\psi_2 - \psi_1)\frac{c_1^2}{\xi_1 c_2} - \psi_1 \frac{\partial c_1}{\partial \xi_2}\right]_{\substack{\xi_2=0\\ \xi_3=0}} = \\ &\qquad\qquad = \frac{\psi_1 \xi_1^2 + (\psi_2 - 2\psi_1) k^2}{\mp \xi_1^2 \sqrt{\xi_1^2 - k^2}}. \end{aligned}\right. \tag{1.33}$$

Pertanto la condizione (1.30) dà

$$\psi_1\xi_1^2 = (\psi_1 - \psi_2)k^2 \,. \tag{1.34}$$

Questa, data l'arbitrarietà di ξ_1, non può ritenersi soddisfatta. Concludiamo che non esiste una funzione L soddisfacente la (1.19).

2. Rotazioni permanenti.

Cerchiamo ora i movimenti che avvengono con velocità angolare, $\boldsymbol{\omega}$, costante rispetto ad $\mathcal{S}$; segue che $\boldsymbol{\omega}$ è costante rispetto a $\mathcal{C}$ e pertanto anche $\sigma\boldsymbol{\omega}$ è costante rispetto a $\mathcal{C}$. Conseguentemente la (1.2) diviene

$$\boldsymbol{G}\wedge\boldsymbol{c} + \boldsymbol{\omega}\wedge\psi\boldsymbol{H} = \boldsymbol{\omega}\wedge\sigma\boldsymbol{\omega} \,. \tag{2.1}$$

Moltiplicando scalarmente per $\boldsymbol{\omega}$, si ha

$$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{G}\wedge\boldsymbol{c} = 0 \,. \tag{2.2}$$

Quindi $\boldsymbol{\omega}$ è combinazione lineare di $\boldsymbol{c}$ e $\boldsymbol{G}$

$$\boldsymbol{\omega} = \mu\boldsymbol{G} + \nu\boldsymbol{c} \,, \tag{2.3}$$

ove μ e ν sono due quantità scalari.

Dato che, per l'integrale dell'energia (1.9), è $\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{c} = \text{cost}$, la (2.3) rappresenta effettive rotazioni (e non precessioni) solo per

$$\boldsymbol{\omega} = \nu\boldsymbol{c} \,. \tag{2.4}$$

Supporremo pertanto, senza ledere la generalità, $\mu = 0$.

L'equazione (1.2_2) è senz'altro soddisfatta perchè, appartenendo $\boldsymbol{c}$ all'asse di rotazione, risulta $\dot{\boldsymbol{c}} = 0$ e si ha pure $\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{c} = 0$. Le altre due equazioni (1.2_1) e (1.2_3) divengono

$$\begin{cases} \boldsymbol{c}\wedge(\nu^2\sigma\boldsymbol{c} + \boldsymbol{G} - \nu\psi\boldsymbol{H}) = 0 \,, \\ \dot{\boldsymbol{H}} + \nu\boldsymbol{c}\wedge\boldsymbol{H} = 0 \,. \end{cases} \tag{2.5}$$

Eseguendo la derivata temporale relativa di (2.5_1) si ha

$$\boldsymbol{c}\wedge\psi\dot{\boldsymbol{H}}=0 \tag{2.6}$$

ossia

$$\dot{\boldsymbol{H}}=\varrho\psi^{-1}\boldsymbol{c}\,, \tag{2.7}$$

ove ϱ è un coefficiente di proporzionalità.

Sostituendo in (2.5_2), segue

$$\varrho\psi^{-1}\boldsymbol{c}=\nu\boldsymbol{H}\wedge\boldsymbol{c}\,. \tag{2.8}$$

Questa relazione mostra che ψ^{-1} muta $\boldsymbol{c}$ in un vettore ad esso ortogonale o nullo. Quindi ψ^{-1} dovrebbe essere un'omografia degenere; poichè ciò non è, dev'essere $\varrho=0$.

Si conclude che

$$\boldsymbol{H}=\pm\boldsymbol{c}\,. \tag{2.9}$$

Tenendo conto di questo risultato e dell'espressione di ψ, la (2.5_1) diviene

$$\nu(\nu\pm 2\Omega)\sigma\boldsymbol{c}\wedge\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{G}\wedge\boldsymbol{c}\,. \tag{2.10}$$

Questa equazione è soddisfatta da opportuni valori di ν se

$$\boldsymbol{G}\times\sigma\boldsymbol{c}\wedge\boldsymbol{c}=0 \tag{2.11}$$

e si ha

$$\nu=-\Omega\pm\sqrt{\Omega^2-\frac{\boldsymbol{c}\wedge\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{J}_i}{\boldsymbol{c}\wedge\sigma\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{J}_i}}\,,\qquad \nu=+\Omega\pm\sqrt{\Omega^2-\frac{\boldsymbol{c}\wedge\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{J}_i}{\boldsymbol{c}\wedge\sigma\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{J}_i}}\,, \tag{2.12}$$

ove $\boldsymbol{J}_i$ $(i=1,2,3)$ sono i versori degli assi cartesiani solidali con $\mathcal{C}$.

Si noti che in realtà si è ricondotti alla teoria del cono di Staude del solido pesante e la (2.11) ne è l'equazione; però le velocità angolari ν sono diverse per la presenza di Ω nelle (2.12).

Se in (2.12) il radicando risultasse negativo si invertirebbe l'orientamento della generatrice del cono di Staude, che si è portata a coincidere con la verticale discendente e si otterrebbe senz'altro un radicando positivo.

Abbiamo dimostrato così che le rotazioni permanenti possono aversi solo intorno alle generatrici del cono di Staude disposte verticalmente.

Corrispondentemente ad ogni generatrice le velocità angolari possibili non differiscono solo per il segno come nel caso di un corpo sottoposto alla sola forza peso. Ad esempio, intorno a $\boldsymbol{G}$ le velocità possibili sono $\nu = 0$ e $\nu = 2\Omega$ o -2Ω a seconda del polo terrestre ove si sperimenta.

Altra differenza da segnalare è che esistono la retta baricentrale ed altre, appartenenti sempre al cono di Staude, per le quali è indifferente il senso della generatrice che si porta a coincidere con la verticale discendente. Con riferimento a tali rette, esclusa la baricentrale, le velocità angolari possibili sono quattro.

3. Caso giroscopico.

Abbandonando ormai il caso di un corpo $\mathcal{C}$ di struttura assolutamente arbitraria, vogliamo fissare l'attenzione su un giroscopio fissato per un punto O diverso da G ma appartenente all'asse giroscopico.

Proveremo che si può costruire subito un quinto integrale primo che generalizza quello di Lagrange-Poisson.

Detto $O\xi_3$ l'asse giroscopico, nelle condizioni in cui ci siamo posti, si ha

$$(3.1) \qquad A_1 = A_2 \neq A_3\,, \qquad \xi_1 = \xi_2 = 0\,, \qquad \xi_3 > 0\,,$$

ove A_1, A_2, A_3 sono i momenti principali d'inerzia, ξ_1, ξ_2, ξ_3 le componenti di $\boldsymbol{G}$ rispetto agli assi $O\xi_1\xi_2\xi_3$ solidali con $\mathcal{C}$ e coincidenti con gli assi principali d'inerzia; la condizione $\xi_3 > 0$ si ottiene con opportuno orientamento dell'asse giroscopico.

Fra le nove equazioni cartesiane che si ottengono da (1.2) proiettando sugli assi $O\xi_1\xi_2\xi_3$, per dedurre l'integrale preannunciato, interessano solo queste due

$$(3.2) \qquad \dot{p}_3 = \Omega(H_2 p_1 - H_1 p_2)\,, \qquad \dot{H}_3 = H_1 p_2 - H_2 p_1\,,$$

ove p_1, p_2, p_3 sono le componenti di $\boldsymbol{\omega}$ rispetto a $O\xi_1\xi_2\xi_3$. Dalle (3.2) segue

$$(3.3) \qquad \dot{p}_3 + \Omega \dot{H}_3 = 0$$

da cui, integrando, si ottiene

$$p_3 + \Omega H_3 = p_{30} + \Omega H_{30} = \text{cost}\,, \tag{3.4}$$

essendo p_{30} ed H_{30} i valori iniziali di p_3 ed H_3; è questo il quinto integrale primo del sistema (1.2) scritto per un giroscopio vincolato in un punto O diverso da G ma appartenente all'asse giroscopico; naturalmente, esso generalizza quello di Lagrange-Poisson al caso in cui all'azione del peso si sovrappongono le forze di Coriolis o altre forze di analoga struttura.

Vogliamo segnalare, sempre con riferimento ad un giroscopio, un caso particolare in cui le equazioni (1.2) si semplificano notevolmente.

Se l'ellissoide centrale d'inerzia, oltre che rotondo, è schiacciato nella direzione dell'asse giroscopico esistono, sul detto asse, due punti O e O' simmetricamente posti rispetto a G relativamente ai quali gli ellissoidi sono sferici. Fissata l'attenzione su uno di questi punti, ad esempio su O, le (1.2) divengono

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\omega}} = \dfrac{1}{A}\,\boldsymbol{G}\wedge\boldsymbol{c} + \boldsymbol{\omega}\wedge\Omega\boldsymbol{H}\,, \\ \dot{\boldsymbol{c}} + \boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{c} = 0\,, \qquad \dot{\boldsymbol{H}} + \boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{H} = 0\,, \end{cases} \tag{3.5}$$

ove con A si indica il valore comune dei momenti d'inerzia di $\mathcal{C}$ rispetto a qualsiasi retta per O.

4. Precessioni regolari nel caso giroscopico.

Utilizzando anche l'integrale (3.4) possiamo determinare tutte le precessioni regolari, dinamicamente possibili, ad asse di precessione verticale e con asse di figura coincidente con l'asse giroscopico.

Poniamo

$$\boldsymbol{\omega} = \nu\boldsymbol{c} + \mu\boldsymbol{k}\,, \tag{4.1}$$

ove ν è la velocità di precessione, μ la velocità di rotazione propria e $\boldsymbol{k}$ il versore dell'asse giroscopico che orientiamo come $O\xi_3$.

Sostituendo la (4.1) nelle (1.2), ed eliminando pure $\dot{\boldsymbol{c}}$ dalla prima equazione, si ottiene

$$\begin{cases} \mu\nu\sigma(\boldsymbol{c}\wedge\boldsymbol{k}) + (\nu\boldsymbol{c} + \mu\boldsymbol{k})\wedge\sigma(\nu\boldsymbol{c} + \mu\boldsymbol{k}) = \xi_3\boldsymbol{k}\wedge\boldsymbol{c} + (\nu\boldsymbol{c} + \mu\boldsymbol{k})\wedge\psi\boldsymbol{H}\,, \\ \dot{\boldsymbol{c}} = \mu\boldsymbol{c}\wedge\boldsymbol{k}\,, \qquad \dot{\boldsymbol{H}} + (\nu\boldsymbol{c} + \mu\boldsymbol{k})\wedge\boldsymbol{H} = 0\,. \end{cases} \tag{4.2}$$

Dopo qualche sviluppo, la (4.2_1) può scriversi così

$$[(A_3 - A_1)c_3\nu + A_3\mu]\nu\boldsymbol{c}\wedge\boldsymbol{k} = \xi_3\boldsymbol{k}\wedge\boldsymbol{c} + (\nu\boldsymbol{c} + \mu\boldsymbol{k})\wedge\psi\boldsymbol{H}\,. \tag{4.3}$$

Da questa segue

$$\boldsymbol{k}\wedge\psi\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{c} = 0\,, \tag{4.4}$$

ossia

$$\Omega A_3(H_1c_2 - H_2c_1) = 0\,. \tag{4.4'}$$

Dalla (4.4′) discende che

$$\boldsymbol{H}\wedge\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{k} = 0\,. \tag{4.5}$$

Poichè $\boldsymbol{H}$ e $\boldsymbol{c}$ sono invariabili in S, mentre $\boldsymbol{k}$ varia rispetto ad S, segue

$$\boldsymbol{H} = \pm\boldsymbol{c}\,. \tag{4.6}$$

Tenendo conto di questa e delle componenti di ψ, si ha

$$(\nu\boldsymbol{c} + \mu\boldsymbol{k})\wedge\psi\boldsymbol{H} = \mp(A_3 - A_1)c_3\nu 2\Omega\boldsymbol{c}\wedge\boldsymbol{k} \mp A_3\mu\Omega\boldsymbol{c}\wedge\boldsymbol{k}\,. \tag{4.7}$$

Sostituendo in (4.3), si ottiene

$$[(A_3 - A_1)c_3\nu(\nu \pm 2\Omega) + A_3(\nu \pm \Omega)\mu + \xi_3]\boldsymbol{c}\wedge\boldsymbol{k} = 0\,. \tag{4.8}$$

Si noti la completa analogia della (4.8) con le ben note equazioni che caratterizzano le precessioni regolari nel caso del giroscopio pesante.

Si può soddisfare la (4.8) ponendo

$$\mu = \frac{(A_1 - A_3)c_3(\nu \pm 2\Omega)\nu - \xi_3}{A_3(\nu \pm \Omega)}\,. \tag{4.9}$$

Premesso ciò, la ricerca delle precessioni regolari soddisfacenti le equazioni (1.2) non presenta alcuna difficoltà; le componenti di $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{c}$ ed $\boldsymbol{H}$ si esprimono elementarmente in funzione del tempo.

Concludiamo che le precessioni regolari di un giroscopio pesante, quando si tiene pure conto delle forze di Coriolis, sono possibili solo ai poli dell'asse terrestre.

Manoscritto pervenuto in redazione il 6 aprile 1978.