Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Anna Maria Bresquar

Su alcuni criteri di oscillazione per le equazioni differenziali lineari del secondo ordine

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 63 (1980), p. 185-198

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1980__63__185_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 63 (1980)

Su alcuni criteri di oscillazione per le equazioni differenziali lineari del secondo ordine.

ANNA MARIA BRESQUAR (*)

SUMMARY - Sufficient conditions for oscillation of the equation $(r(t)y')' + q(t)y = 0$, when $\int^{+\infty} r^{-1}(s)\,ds < +\infty$, are given.

1. – Introduzione.

Si consideri l'equazione

$$(r(t)y'(t))' + q(t)y = 0 \qquad \left(' = \frac{d}{dt}\right) \tag{1}$$

dove $r(t) > 0$, $r(t) \in C^1[a, +\infty)$, $q(t) \in C[a, +\infty)$.

È noto che se

$$\int_a^{+\infty} \frac{dt}{r(t)} = +\infty\,, \qquad \int_a^{+\infty} q(t)\,dt = +\infty \tag{2}$$

l'equazione (1) è oscillante [1]; se invece

$$\int_a^{+\infty} \frac{dt}{r(t)} < +\infty\,, \qquad \left|\int_a^{+\infty} q(t)\,dt\right| < +\infty \tag{3}$$

l'equazione (1) non è oscillante.

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica Applicata dell'Università, Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del G.N.A.F.A.

[1] In questo lavoro, per comodità di studio, considero solo l'oscillazione su una semiretta.

Per ottenere criteri di oscillazione (o di non oscillazione) nel caso in cui uno solo degli integrali

$$\int_a^t \frac{ds}{r(s)}, \quad \int_a^t q(s)\,ds \tag{4}$$

diverga è spesso utile usare una trasformazione di Kummer

$$\begin{cases} \tau \quad = \varphi(t) \\ y(t) = \psi(t)x(\tau)\,. \end{cases} \tag{5}$$

Naturalmente si suppone ([2])

$$\varphi(t) \in C^2[a, +\infty)\,, \qquad \varphi'(t) > 0\,, \quad \lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = +\infty\,, \tag{5'}$$

$$\psi(t) \in C^2[a, +\infty)\,, \qquad \psi(t) \neq 0 \qquad t \geqslant a\,, \tag{5''}$$

di modo che il problema di sapere se l'equazione (1) è oscillante o no si trasporta nello stesso problema per l'equazione trasformata

$$\frac{d}{d\tau}\left(R(\tau)\frac{dx}{d\tau}\right) + Q(\tau)x = 0\,, \tag{6}$$

dove

$$R(\varphi(t)) = r(t)\varphi'(t)\psi^2(t)\,, \tag{6'}$$

$$Q(\varphi(t)) = \left[(r(t)\psi'(t))' + q(t)\psi(t)\right]\psi(t)[\varphi'(t)]^{-1}\,. \tag{6''}$$

Può accadere, come già puntualizzò Leighton [6], che quando uno solo degli integrali (4) è divergente i corrispondenti integrali per l'equazione (6) siano entrambi convergenti o entrambi divergenti, da cui l'utilità della trasformazione di Kummer. Scegliendo, come è sempre possibile,

$$\tau = \varphi(t) = \int^t \frac{ds}{r(s)\psi^2(s)} \tag{7}$$

([2]) In alcuni testi si trova $\varphi \in C^1[a, +\infty)$, il che è evidentemente una svista.

con l'ipotesi

$$(7') \qquad \int^{+\infty} \frac{dt}{r(t)\psi^2(t)} = +\infty,$$

l'equazione trasformata diventa

$$(8) \qquad \frac{d^2x}{d\tau^2} + p(\tau)x = 0 \qquad \tau \in [\varphi(a), +\infty)$$

dove

$$(8') \qquad p[\varphi(t)] = \left[\left(r(t)\psi'(t)\right)' + q(t)\psi(t)\right]\psi^3(t)r(t).$$

Di modo che la condizione

$$(9) \qquad \int^{+\infty} p(\tau)d\tau = +\infty$$

costituisce un criterio di oscillazione (³) per l'equazione (1).

Essa si può scrivere utilmente, tornando alla variabile t,

$$(10) \qquad \int^{+\infty} p(\tau)d\tau = \int^{+\infty}\left[\left(r(t)\psi'(t)\right)' + q(t)\psi(t)\right]\psi(t)dt = +\infty.$$

In questo ordine di idee variando la scelta della funzione ψ il Willett [13] ha scritto alcuni interessanti criteri.

Il criterio V a pag. 272 di [13] è sfortunatamente errato. Esso corrisponde al caso

$$\int_t^{+\infty} \frac{ds}{r(s)} < +\infty$$

ed alla scelta

$$(11) \qquad \psi(t) = L_n^{1/2}(\bar{R}(t)), \qquad \bar{R}(t) = \left\{\int_t^{+\infty} \frac{ds}{r(s)}\right\}^{-1},$$

(³) Il criterio è invertibile nel senso che: se l'equazione (1) è oscillante esiste una funzione $\psi > 0$, $\psi \in C^2[a, +\infty)$ tale che le (7'), (9) siano verificate, vedi Moore [8], p. 126.

dove si ponga

$$(11')\qquad \begin{cases} l_0(u) &= u \\ l_n(u) &= \log l_{n-1}(u) \qquad n = 1, 2, \ldots \\ L_n(u) &= \prod_{k=0}^{n} l_k(u) \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

Ponendo ancora

$$(11'')\qquad q_n(u) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{L_k^2(u)}, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

questa scelta porterebbe, secondo l'Autore, al criterio:
l'equazione (1) è oscillante se esiste un intero non negativo n tale che

$$(12)\qquad \int^{+\infty} \left[q(t) - \frac{\bar{R}^4(t)}{r(t)} q_n(\bar{R}(t))\right] L_n(\bar{R}(t))\, dt = +\infty,$$

condizione corrispondente alla verifica della (10) ([4]).

Sfortunatamente la (7') non è verificata, essendo

$$\int^{+\infty} \frac{dt}{r(t)\psi^2(t)} = \int^{+\infty} \frac{dt}{r(t)L_n(\bar{R}(t))} = \int^{+\infty} \frac{du}{u^2 L_n(u)} < +\infty,$$

dove si è posto $\bar{R}(t) = u$.

Oltre la dimostrazione, è il criterio stesso che non sussiste, come dimostra il controesempio del paragrafo 2.

Segue nel paragrafo 3 una proposta di sostituzione del criterio V di Willett, ottenuta mediante una scelta opportuna di $\psi(t)$. Inoltre nel paragrafo 4 viene proposto un altro criterio di oscillazione di tipo diverso dal precedente, ma ad esso collegato.

([4]) In realtà la (10) darebbe la condizione

$$\int^{+\infty} \left\{\left[q(t) - q_n(\bar{R}(t))\frac{\bar{R}^4(t)}{r(t)}\right] L_n(\bar{R}(t)) + \frac{\bar{R}^3(t)}{r(t)}\left[\frac{dL_n(\bar{R})}{d\bar{R}}\right] \circ \bar{R}(t)\right\} dt = +\infty$$

per la quale la (12) è condizione solo sufficiente.

2. – Controesempio.

L'equazione

$$(13)\qquad (t^2y')' + t^2 q_{n+1}(t)y = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

con $q_{n+1}(t)$ definita da (11″), non è oscillante mentre il corrispondente integrale (12) è divergente.

Infatti la (13) ammette la soluzione $y = t^{-1}L_{n+1}^{1/2}(t)$.

Mentre si ha

$$\bar{R}(t) = \left\{\int_t^{+\infty} \frac{ds}{r(s)}\right\}^{-1} = t$$

e la condizione (12) diviene

$$\int^{+\infty} t^2[q_{n+1}(t) - q_n(t)]L_n(t)\,dt = \int^{+\infty} \frac{t^2}{4L_n(t)\,l_{n+1}^2(t)}\,dt = +\infty .$$

3. – Proposta di un criterio sostitutivo.

Supposto come in Willett [13] criterio V (pag. 272)

$$(14)\qquad \int_t^{+\infty} \frac{ds}{r(s)} < +\infty , \qquad \bar{R}(t) = \left\{\int_t^{+\infty} \frac{ds}{r(s)}\right\}^{-1},$$

scegliamo

$$(14')\qquad \psi(t) = \frac{L_n^{1/2}(\bar{R}(t))}{\bar{R}(t)} .$$

Si ha allora, posto $\bar{R}(t) = u$,

$$\int^{+\infty} \frac{dt}{r(t)\psi^2(t)} = \int^{+\infty} \frac{\bar{R}^2(t)}{r(t)L_n(\bar{R}(t))}\,dt = \int^{+\infty} \frac{du}{L_n(u)} = +\infty ,$$

mentre la (10) diviene

$$(15)\quad \int^{+\infty} \left\{ q(t)\,\frac{L_n(\bar{R}(t))}{\bar{R}^2(t)} + L_n^{1/2}(\bar{R}(t))\left[\left(\frac{d^2}{d\bar{R}^2}\,L_n^{1/2}(\bar{R})\right)\circ \bar{R}(t)\right]\frac{d\bar{R}(t)}{dt}\right\} dt = +\infty\,.$$

La (15), ricordando che $L_n^{1/2}(t)$ è soluzione dell'equazione $u''(t) + q_n(t)u = 0$, fornisce per la (1) il seguente *criterio*:

l'equazione (1) è oscillante se esiste un intero n non negativo tale che

$$(16)\qquad \int^{+\infty} \left\{\frac{q(t)}{\bar{R}^2(t)} - \frac{\bar{R}^2(t)}{r(t)}\,q_n(\bar{R}(t))\right\} L_n(\bar{R}(t))\,dt = +\infty\,.$$

Esempio. Si consideri l'equazione

$$(17)\qquad (t^2y')' + t^2\left[q_{p-1}(t) + \frac{k^*}{4L_p^2(t)}\right] y = 0$$

$$(p = 1, 2, \ldots, k^* = 1 + 4c^2, c > 0)\,,$$

che con la condizione scritta per k^* è oscillante ed ammette le soluzioni

$$y_1 = t^{-1}L_p^{1/2}(t)\cos\left[cl_{p+1}(t)\right], \qquad y_2 = t^{-1}L_p^{1/2}(t)\sin\left[cl_{p+1}(t)\right].$$

Il criterio (16) è applicabile se si sceglie $n \geqslant p$, non è applicabile se si considera $n \leqslant p - 1$.

Si ha infatti dalle (14)

$$\bar{R}(t) = t$$

e la (16) per $n = p$ fornisce

$$c^2\int^{+\infty} \frac{dt}{L_p(t)} = +\infty\,,$$

mentre per $n = p - 1$ fornisce

$$\frac{k^*}{4}\int^{+\infty} \frac{dt}{L_{p-1}(t)l_p^2(t)} = \left[-\frac{k^*}{4l_p(t)}\right]^{+\infty} < +\infty\,.$$

Scelto ora $n = p + h$ con $h = 1, 2, \ldots$ la (16) diviene

$$\int^{+\infty} \left[q_{p-1}(t) + \frac{k^*}{4L_p^2(t)} - q_{p+h}(t) \right] L_{p+h}(t)\, dt > A \int^{+\infty} \frac{\prod_{\alpha=p+1}^{p+h} l_\alpha(t)}{L_p(t)}\, dt = +\infty ,$$

con A costante opportuna e su una opportuna semiretta.

Invece per $n = p - 1 - h$ con $h = 1, 2, \ldots$ la (16) diviene

$$\int^{+\infty} \left[q_{p-1}(t) + \frac{k^*}{4L_p^2(t)} - q_{p-1-h}(t) \right] L_{p-1-h}(t)\, dt < A \int^{+\infty} \frac{dt}{L_{p-h-1}(t)\, l_{p-h}^2(t)} < +\infty ,$$

con A costante opportuna e su una opportuna semiretta.

Ci si può chiedere il motivo della scelta (14′) di $\psi(t)$. Lo spirito del criterio V del Willett [13] era che per $n = 0$ $\psi(t)$ fosse di ordine $\{\bar{R}(t)\}^{1/2}$ e desse in questo caso un criterio di oscillazione per la (1) analogo a quello fornito dal criterio II del Willett [13] per $n = 0$ nel caso

$$\int^{+\infty} \frac{dt}{r(t)} = +\infty .$$

Come già detto tale scelta di $\psi(t)$ non è possibile perchè non soddisfa la (7′); si può invece scegliere $\psi(t) = \{\bar{R}(t)\}^{-1/2}$ come si ottiene dalla (14′) per $n = 0$.

Il criterio II del Willett è il seguente; posto

$$R(t) = \int^{t} r^{-1}(s)\, ds , \qquad \text{con} \quad \lim_{t \to +\infty} R(t) = +\infty ,$$

l'equazione (1) è oscillante se esiste un intero non negativo n tale che

$$\int^{+\infty} \left[q(t) - \frac{1}{r(t)} q_n(R(t)) \right] L_n(R(t))\, dt = +\infty . \tag{18}$$

Esso per $n = 0$ fornisce il criterio

$$\int^{+\infty} \left\{ q(t) \int^{t} \frac{ds}{r(s)} - \frac{1}{4r(t)} \left\{ \int^{t} \frac{ds}{r(s)} \right\}^{-1} \right\} dt = +\infty . \tag{19}$$

Effettivamente la (16) per $n = 0$ fornisce

$$\int^{+\infty} \left\{ q(t) \int_t^{+\infty} \frac{ds}{r(s)} - \frac{1}{4r(t)} \left[\int_t^{+\infty} \frac{ds}{r(s)} \right]^{-1} \right\} dt = +\infty , \tag{20}$$

analoga alla (19).

Tutto ciò in accordo con il lavoro di Moore [8] che contiene implicitamente nel teorema 7 quanto sarebbe sufficiente per stabilire i criteri (19) e (20), corrispondenti alle trasformazioni di Kummer da lui citate

$$\begin{cases} \tau = t \\ y(t) = \left\{ \int_t^{+\infty} \dfrac{ds}{r(s)} \right\}^{\frac{1}{2}} x(\tau) \end{cases} \qquad \begin{cases} \tau = t \\ y(t) = \left\{ \int^{t} \dfrac{ds}{r(s)} \right\}^{\frac{1}{2}} x(\tau) . \end{cases}$$

Ovviamente la funzione $\psi(t)$ data da (14′) non è l'unica che coincide con $[\bar{R}(t)]^{-1/2}$ per $n = 0$, ma tale funzione ha il vantaggio di rendere semplicissimo il calcolo della (10) e di avere ordine di infinitesimo decrescente al crescere di n. Questo ultimo fatto dovrebbe in generale rendere migliore il criterio (16) al crescere di n. Ad esempio la scelta $\psi(t) = L_n^{-1/2}(\bar{R}(t))$ dà un criterio che peggiora al crescere di n. Infatti, eliminati i termini ad integrale convergente, si riduce a

$$\int^{+\infty} \left\{ q(t) - \frac{\bar{R}^2(t)}{4r(t)} \right\} \frac{dt}{L_n(\bar{R}(t))} = +\infty .$$

4. – Secondo criterio di oscillazione.

Nel paragrafo 3 abbiamo visto che l'equazione (1) è oscillante se è verificata la (16) cioè se esiste un intero non negativo n tale che

$$\int^{+\infty} \left\{ \frac{q(t)}{\bar{R}^2(t)} - \frac{\bar{R}^2(t)}{r(t)} q_n(\bar{R}(t)) \right\} L_n(\bar{R}(t))\, dt = +\infty \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) .$$

Nel caso che questo integrale converga nel senso di Cauchy-Lebesgue, ferme restando le altre ipotesi su $r(t)$ e $q(t)$, vale il seguente *criterio*:

l'equazione (1) è oscillante se esiste un intero non negativo n tale che

$$(21) \qquad \int_t^{+\infty} \left\{ \frac{q(s)}{\bar{R}^2(s)} - \frac{\bar{R}^2(s)}{r(s)} q_n(\bar{R}(s)) \right\} L_n(\bar{R}(s))\, ds \geqslant \frac{k}{l_{n+1}(\bar{R}(t))}$$

con $k > \frac{1}{4}$, per $t > t_0 > a_{n+1}$ con $l_{n+1}(\bar{R}(a_{n+1})) = 0$ (⁵).

Si noti che questa ultima condizione, che è stata aggiunta per semplicità, può sempre essere verificata per ogni n purchè si moltiplichi l'equazione (1) per una costante opportuna, oppure è certamente verificabile dall'equazione (1) per n abbastanza grande.

Preliminare alla dimostrazione del criterio è il seguente teorema dovuto a Taam.

TEOREMA (Taam). Considerate le due equazioni differenziali

$$(22) \qquad (r_1(u)y')' + q_1(u)y = 0$$

$$(22') \qquad (r_2(u)y')' + q_2(u)y = 0$$

con $r_j \in C^1[a, +\infty)$, $q_j \in C[a, +\infty)$, $(j = 1, 2)$, esistano nel senso di Cauchy-Lebesgue gli integrali

$$\int_u^{+\infty} q_j(s)\, ds \qquad (j = 1, 2)\,.$$

Supposto che

$$0 < r_2(u) \leqslant r_1(u)\,, \qquad r_2(u) \leqslant A\,,$$

$$(23) \qquad \left| \int_u^{+\infty} q_1(s)\, ds \right| \leqslant \int_u^{+\infty} q_2(s)\, ds\,,$$

se la (22′) non è oscillante, non lo è nemmeno la (22).

Si utilizzerà per la dimostrazione del criterio (21) il seguente corollario al teorema di Taam.

(⁵) Precisamente nel caso $n = 0$ si suppone $l_1(\bar{R}(a_1)) = 0$; nei casi $n = 1, 2, 3, \ldots$ si suppone anche $l_n(\bar{R}(a_n)) = 0$.

COROLLARIO. Considerate le due equazioni

$$(h(t)y')' + k_1(t)y = 0 \tag{24}$$

$$(h(t)y')' + k_2(t)y = 0\,, \tag{24'}$$

con $0 < h(t) \in C^1[a, +\infty)$, $\int^{+\infty} h^{-1}(t)\,dt = +\infty$, $k_j \in C[a, +\infty)$, $j = 1, 2$, esistano nel senso di Cauchy-Lebesgue gli integrali $\int_t^{+\infty} k_j(s)\,ds$ e valga la disuguaglianza

$$\left|\int_t^{+\infty} k_1(s)\,ds\right| \leqslant \int_t^{+\infty} k_2(s)\,ds\,,$$

allora, se la (24) oscilla, oscilla anche la (24′).

Infatti il cambio di variabile

$$u = \int^t \frac{ds}{h(s)}$$

riduce questo enunciato al precedente nel caso particolare $r_1(u) = r_2(u) = 1$ ([6]).

DIMOSTRAZIONE DEL CRITERIO.

a) *Caso* $n = 0$. Si tratta di dimostrare che la condizione

$$\int_t^{+\infty} \left[\frac{q(s)}{\bar{R}(s)} - \frac{\bar{R}(s)}{4r(s)}\right] ds \geqslant \frac{k}{\log \bar{R}(t)} \tag{25}$$

con $k > \frac{1}{4}$, $t > t_0 > a_1$, $\log \bar{R}(a_1) = 0$ assicura l'oscillazione dell'equazione (1).

Eseguo il solito cambiamento di variabili:

$$\begin{cases} \tau = \varphi(t) = \displaystyle\int_{a_1}^{t} \{r(s)\psi^2(s)\}^{-1}\,ds & \text{con } \psi(t) = \dfrac{L_0^{1/2}(\bar{R}(t))}{\bar{R}(t)} = \{\bar{R}(t)\}^{-\frac{1}{2}}\,. \\ y(t) = \psi(t)x(\tau) \end{cases}$$

([6]) Questo corollario rientra nel teorema 10 a pag. 16 di [2].

In virtù dell'ipotesi $\log \bar{R}(a_1) = 0$, si ha $\tau = \log \bar{R}(t)$ e l'equazione (1) si muta nella (8) con

$$p(\varphi(t)) = \left[\frac{q(t)}{\bar{R}(t)} - \frac{\bar{R}(t)}{4r(t)}\right]\frac{r(t)}{\bar{R}(t)}$$

di modo che la (25), posto $u = \log \bar{R}(s)$, equivale a

$$\int_{\tau}^{+\infty} p(u)\,du \geqslant \frac{k}{\tau} \tag{26}$$

con $k > \frac{1}{4}$, $\tau > \log \bar{R}(t_0) > \log \bar{R}(a_1) = 0$.

D'altra parte la (26), vedi in sostanza Taam [9], costituisce un criterio di oscillazione per la (8) da cui la conclusione.

b) Casi $n = 1, 2, 3, \ldots$. Fissato un valore di n, si esegua il cambiamento di variabile

$$\left\{\begin{array}{l} \tau \;\; = \varphi(t) = \displaystyle\int_{a_n}^{t} \{r(s)\psi^2(s)\}^{-1}\,ds \qquad \text{con } \psi(t) = \frac{L_{n-1}^{1/2}(\bar{R}(t))}{\bar{R}(t)}\,. \\ y(t) = \psi(t)x(\tau) \end{array}\right.$$

L'ipotesi $l_n(\bar{R}(a_n)) = 0$ fornisce $\tau = l_n(\bar{R}(t))$ e l'equazione (1) si muta nella (8) con $p(\tau)$ fornita da (8'). Calcolo ora l'espressione

$$\tau p(\tau) - \frac{1}{4\tau}\,.$$

Utilizzando i calcoli fatti per ottenere la (16) si ha

$$\left\{\tau p(\tau) - \frac{1}{4\tau}\right\}\circ\varphi(t) = \left\{L_n(\bar{R}(t))\left[\frac{q(t)}{\bar{R}^2(t)} - \frac{\bar{R}^2(t)}{r(t)}\,q_{n-1}(\bar{R}(t))\right] - \right.$$
$$\left. - \frac{\bar{R}^2(t)}{4L_n(\bar{R}(t))r(t)}\right\}\frac{r(t)L_{n-1}(\bar{R}(t))}{\bar{R}^2(t)} =$$
$$= L_n(\bar{R}(t))\left\{\frac{q(t)}{\bar{R}^2(t)} - \frac{\bar{R}^2(t)}{r(t)}\,q_n(\bar{R}(t))\right\}\frac{r(t)L_{n-1}(\bar{R}(t))}{\bar{R}^2(t)}\,.$$

Di modo che la (21), posto $u = l_n(\bar{R}(s))$, equivale a

$$\int_{\tau}^{+\infty} \left\{ up(u) - \frac{1}{4u} \right\} du \geqslant \frac{k}{\log \tau} \tag{27}$$

con $k > \frac{1}{4}$, $\tau > l_n(\bar{R}(t_0)) > l_n(\bar{R}(a_{n+1})) = 1$ e tutto si riduce a dimostrare che la (27) è una condizione sufficiente per l'oscillazione dell'equazione (8)

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + p(\tau)x = 0 \,.$$

A tale scopo si considerino infatti le due equazioni

$$\frac{d}{d\tau}\left(\tau \frac{dy}{d\tau}\right) + \left[\tau p(\tau) - \frac{1}{4\tau}\right] y = 0 \,, \tag{28}$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(\tau \frac{dy}{d\tau}\right) + \frac{k}{\tau \log^2 \tau}\, y = 0 \qquad \left(k > \frac{1}{4}\right). \tag{28'}$$

La sostituzione $y(\tau) = \tau^{-1/2} x(\tau)$ muta la (28) nell'equazione

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + p(\tau)x = 0$$

e la (28′) nell'equazione

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \left[\frac{1}{4\tau^2} + \frac{k}{\tau^2 \log^2 \tau}\right] x = 0, \qquad \left(k > \frac{1}{4}\right),$$

che è notoriamente oscillante per $k > \frac{1}{4}$. L'applicazione del corollario del teorema di Taam alle (28) e (28′), resa possibile dalla (27), conduce alla conclusione.

Esempio. Si vede subito che il criterio (21) è applicabile all'equazione (17) per $n = p - 1$.

5. – Osservazioni.

La condizione (27)

$$\int_\tau^{+\infty} \left\{ u p(u) - \frac{1}{4u} \right\} du \geqslant \frac{k}{\log \tau} \qquad \left(k > \frac{1}{4}\right)$$

che assicura l'oscillazione dell'equazione $d^2x/d\tau^2 + p(\tau)x = 0$ migliora un risultato di Wray [15] che ha ottenuto come condizione di oscillazione la doppia disuguaglianza

$$\left(\mu - \frac{1}{2}\right)^2 + \varepsilon + \frac{1}{4} \leqslant \log \tau \int_\tau^{+\infty} \left\{ u p(u) - \frac{1}{4u} \right\} du \leqslant \left(\mu + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} - \varepsilon$$

supposta valida per qualche $\mu > 0$, $\varepsilon > 0$. Egli inoltre ha ottenuto il risultato che la condizione

$$\frac{1}{4} - \left(\mu + \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant \log \tau \int_\tau^{+\infty} \left\{ u p(u) - \frac{1}{4u} \right\} du \leqslant \frac{1}{4} - \left(\mu - \frac{1}{2}\right)^2$$

con $\mu > 0$, assicura la non oscillazione dell'equazione (8).

Si noti che mentre la condizione (26) di oscillazione per l'equazione (8)

$$\int_\tau^{+\infty} p(u)\, du \geqslant \frac{k}{\tau} \qquad \left(k > \frac{1}{4}\right)$$

rientra nel criterio di oscillazione di Hartman

$$\text{(29)} \qquad \int^{+\infty} \exp\left[-4 \int^{\tau} P(s)\, ds \right] d\tau < +\infty, \qquad P(\tau) = \int_\tau^{+\infty} p(u)\, du$$

ciò non è vero per la condizione di oscillazione (27). Infatti l'equazione

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \left\{ \frac{1}{4\,\tau^2} + \frac{k}{\tau^2 \log^2 \tau} \right\} x = 0 \qquad \left(k > \frac{1}{4}\right)$$

verifica la (27), ma non la (29).

BIBLIOGRAFIA

[1] S. Breuer - D. Gottlieb, *Hille-Wintner type oscillation criteria for linear ordinary differential equations of second order*, Ann. Polon. Math., **30** (1975), pp. 257-262.

[2] W. A. Coppel, *Disconjugacy*, Lecture Notes in Math., vol. 220, Springer (1971).

[3] P. Hartman, *On nonoscillatory linear differential equations of second order*, Proc. Amer. Math. Soc., **64**, n. 2 (1977), pp. 251-259.

[4] V. Komkov, *A technique for the detection of oscillation of second order ordinary differential equations*, Pacific J. Math., **42**, n. 1 (1972), pp. 105-115.

[5] K. Kreith, *Oscillation theory*, Lecture Notes in Math., vol. 324, Springer (1973).

[6] W. Leighton, *The detection of the oscillation of solutions of a second order linear differential equation*, Duke J. Math., **17** (1950), pp. 57-62.

[7] J. W. Macki - J. S. W. Wong, *Oscillation theorems for linear second order differential equations*, Proc. Amer. Math. Soc., **20** (1969), pp. 67-72.

[8] R. A. Moore, *The behavior of solutions of a linear differential equation of second order*, Pacific J. Math., **5** (1955), pp. 125-145.

[9] C. T. Taam, *Non-oscillatory differential equations*, Duke Math. J., **19** (1952), pp. 493-497.

[10] C. C. Travis, *Remarks on a comparison theorem for scalar Riccati equations*, Proc. Amer. Math. Soc., **52** (1975), pp. 311-314.

[11] D. Willett, *On the oscillatory behavior of the solutions of second order linear differential equations*, Ann. Polon. Math., **21** (1969), pp. 175-193.

[12] D. Willett, *Oscillation on finite or infinite intervals of second order linear differential equations*, Canad. Math. Bull., **14** (1971), pp. 539-550.

[13] D. Willett, da *Lectures on Ordinary Differential Equations*, Edited by R. McKelvey, Academic Press (1970).

[14] J. S. W. Wong, *Oscillation and nonoscillation of solutions of second order linear differential equations with integrable coefficients*, Trans. Amer. Math. Soc., **144** (1969), pp. 197-215.

[15] S. D. Wray, *Integral comparison theorems in oscillation theory*, J. London Math. Soc. (2), **8** (1974), pp. 595-606.

Manoscritto pervenuto in redazione il 2 ottobre 1979.