Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Paolo Malesani

Tecniche per risolvere problemi di Testa e Croce

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 63 (1980), p. 247-267
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1980__63__247_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 63 (1980)

Tecniche per risolvere problemi di Testa e Croce.

PAOLO MALESANI (*)

Nel capitolo 14 del volume [1] F. S. Hillier-G. J. Lieberman considerano un gioco di Testa e Croce arricchendo di pagamenti monetari il processo stocastico.

Anche B. de Finetti nel capitolo 7 del volume [2] prende in esame molte questioni legate a processi stocastici di lanci ripetuti di monete perfette.

Nel presente lavoro, partendo dalle considerazioni di questi Autori, studio due classi di giochi così definiti:

> si lancia più volte una moneta perfetta. Prima di ogni lancio bisogna pagare 1 unità monetaria per partecipare al gioco. Non è permesso ritirarsi prima che termini una partita. Quando una partita termina si ricevono α unità monetarie.

Le due classi di giochi ai quali farò riferimento nel seguito sono definite dalla regola secondo la quale termina una partita; più precisamente indicherò con

$\mathcal{T}_m$ quel gioco nel quale una partita termina quando m è il valore assoluto della differenza tra il numero di Teste e il numero di Croci;

$\mathcal{Q}_m$ quel gioco nel quale una partita termina quando m risultati consecutivi sono uguali (tutte Teste oppure tutte Croci).

$\mathcal{T}_3$ è il gioco di cui trattano Hillier-Lieberman, i quali lo propongono per introdurre la simulazione. In questo lavoro il gioco $\mathcal{T}_3$ sarà studiato

(*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico dell'Università, via Belzoni 7, 35100 Padova.

secondo molteplici metodologie e tale studio servirà per introdurre le successive considerazioni.

Invece De Finetti ha affrontato questioni relative a processi stocastici simili ai giochi $\mathcal{Q}_m$, però distinguendo Testa (chiamata anche Successo) da Croce (chiamata Insuccesso).

Affronterò due tipi di questioni:

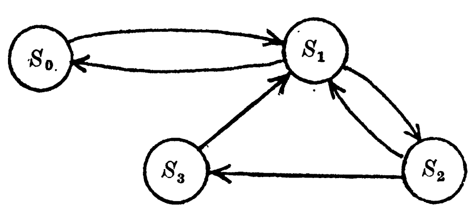
1) per quale valore di α un gioco $\mathcal{T}_m$ o $\mathcal{Q}_m$ è equo?

2) indagare quale sia la probabilità p_n che la durata di un gioco $\mathcal{T}_m$ o $\mathcal{Q}_m$ sia n, cioè che una partita termini dopo n lanci della moneta.

1. – Equità di $\mathcal{T}_3$.

Se il gioco $\mathcal{T}_3$ viene reiterato indefinitamente per un numero illimitato di partite, un modello matematico atto a descriverlo è una catena finita di Markov con gli stati S_0, S_1, S_2, S_3. Il sistema si trova in S_k quando, nel corso di una partita, k è il valore assoluto della differenza fra il numero di Teste e quello di Croci. Si ha una transizione ogni volta che viene lanciata la moneta. S_0 è lo stato iniziale, prima dell'inizio della prima partita. La matrice di transizione $P_3 = [p_{ij}]$ e il digrafo $\mathcal{G}_3$ delle possibili transizioni sono:

$$P_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$



Il digrafo $\mathcal{G}_3$ è fortemente connesso: ne consegue che gli stati sono tutti comunicanti e la catena è irriducibile. In $\mathcal{G}_3$ il massimo comun divisore delle lunghezze dei circuiti è 1: dunque la catena è aperiodica.

Pertanto la catena è regolare e perciò completamente ergodica. Posto

(1) $$\Pi = [\pi_0 \ \pi_1 \ \pi_2 \ \pi_3]$$

il vettore-riga delle probabilità asintotiche, queste costituiscono allora l'unica distribuzione stazionaria di probabilità sugli stati e dunque le π_k possono essere calcolate risolvendo il sistema

(2) $$\Pi P_3 = \Pi$$

con la condizione

(3) $$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

Si trova

(4) $$\Pi = [2/9 \ 4/9 \ 2/9 \ 1/9] .$$

Ad ogni transizione è associato un guadagno, che è -1 per tutte le transizioni fuorchè per la $S_2 \dashrightarrow S_3$ alla quale compete il guadagno $\alpha - 1$. Associamo il guadagno -1 anche alle transizioni impossibili (oppure qualunque altro valore; la cosa è irrilevante come si vedrà dalle formule che seguiranno); costruiamo così la matrice R dei guadagni associati a tutte le transizioni:

$$R = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \alpha-1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = [r_{ij}] .$$

Diciamo q_k il guadagno atteso dalla prossima transizione, posto che prima di essa il sistema si trovi in S_k. Allora

(5) $$q_k = \sum_{j=0}^{3} r_{kj} p_{kj}$$

da cui

(6) $$q_0 = q_1 = q_3 = -1 \qquad q_2 = \alpha/2 - 1$$

e di qui immediatamente si calcola il guadagno medio g per ogni transizione

(7) $$g = \sum_{k=0}^{3} q_k \pi_k = (\alpha - 9)/9$$

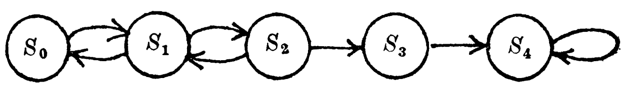
concludendo che il gioco $\mathcal{T}_3$ è equo se e solo se $\alpha = 9$. Si intuisce che 9 è la durata media di una partita, visto che il gioco risulta equo se alla fine di una partita ci si aspetta di ricevere quanto versato in precedenza prima di ogni lancio della moneta.

2. – Una partita di $\mathcal{T}_3$: studio analitico.

Per esaminare una singola partita di $\mathcal{T}_3$ conviene atteggiarla a catena di Markov con gli stati S_0, S_1, S_2, S_3 (definiti come a paragrafo 1) ed S_4: questo ultimo è uno stato fittizio, definito come quello a cui il sistema perviene e in cui rimane indefinitamente dopo essere pervenuto in S_3, cioè dopo la fine della partita.

La matrice di transizione e il digrafo $\overline{\mathcal{G}}_3$ delle transizioni possi bili sono:

$$\overline{P}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



Ci serviranno le potenze $\overline{P}_3^n$ della matrice di transizione. Notoriamente $(I - z\overline{P}_3)^{-1}$ è la Z-trasformata di $\overline{P}_3^n$, e con calcoli elementari si trova

$$(I - z\overline{P}_3)^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{1-z^2/4}{1-3z^2/4} & \dfrac{z}{1-3z^2/4} & \dfrac{z^2/2}{1-3z^2/4} & \dfrac{z^3/4}{1-3z^2/4} & \dfrac{z^2/4}{(1-z)(1-3z^2/4)} \\[2ex] \dfrac{z/2}{1-3z^2/4} & \dfrac{1}{1-3z^2/4} & \dfrac{z/2}{1-3z^2/4} & \dfrac{z^2/4}{1-3z^2/4} & \dfrac{z^3/4}{(1-z)(1-3z^2/4)} \\[2ex] \dfrac{z^2/4}{1-3z^2/4} & \dfrac{z/2}{1-3z^2/4} & \dfrac{1-z^2/2}{1-3z^2/4} & \dfrac{z/2-z^3/4}{1-3z^2/4} & \dfrac{z^2/2-z^4/4}{(1-z)(1-3z^2/4)} \\[2ex] 0 & 0 & 0 & 1 & \dfrac{z}{1-z} \\[2ex] 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{1-z} \end{bmatrix}.$$

Gli elementi di $(I - z\overline{P}_3)^{-1}$ sono funzioni razionali in z i cui denominatori si possono scrivere come prodotti di polinomi di primo grado a coefficienti reali. Pertanto ogni elemento di $(I - z\overline{P}_3)^{-1}$ può essere scritto come somma di un polinomio in z (a coefficienti razionali) e di funzioni razionali, ciascuna delle quali ha un numero reale come numeratore e un polinomio di primo grado (a coefficienti reali) come denominatore.

Si ottiene così:

$$(I - z\overline{P}_3)^{-1} = zA + B + \frac{1}{1-z}C + \frac{1}{1+\sqrt{3}z/2}D + \frac{1}{1-\sqrt{3}z/2}E \tag{9}$$

cone le matrici A, B, C, D, E definite come segue:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & -2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & -1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 0 & 2/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/\sqrt{3} & 1/3 & -1/(3\sqrt{3}) & -2/3 + 4/(3\sqrt{3}) \\ -1/(2\sqrt{3}) & 1/2 & -1/(2\sqrt{3}) & 1/6 & -2/3 + 1/\sqrt{3} \\ 1/6 & -1/(2\sqrt{3}) & 1/6 & -1/(6\sqrt{3}) & -1/3 + 2/(3\sqrt{3}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/\sqrt{3} & 1/3 & 1/(3\sqrt{3}) & -2/3 - 4/(3\sqrt{3}) \\ 1/(2\sqrt{3}) & 1/2 & 1/(2\sqrt{3}) & 1/6 & -2/3 - 1/\sqrt{3} \\ 1/6 & 1/(2\sqrt{3}) & 1/6 & 1/(6\sqrt{3}) & -1/3 - 2/(3\sqrt{3}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Invertendo la trasformazione Z e utilizzando gli indici δ_{ij} di Kronecker si ha

$$\bar{P}_3^n = \delta_{1n}A + \delta_{0n}B + C + (-1)^n(\sqrt{3}/2)^n D + (\sqrt{3}/2)^n E = [p_{ij}^n] \tag{10}$$

Poichè S_0 è lo stato iniziale, la probabilità p_n che n sia la durata della partita è

$$p_n = p_{03}^n = -\delta_{1n}/3 - (-1)^n(\sqrt{3}/2)^n/(3\sqrt{3}) + (\sqrt{3}/2)^n/(3\sqrt{3}) \tag{11}$$

e si conclude allora che $p_1 = 0$ e

$$\begin{cases} p_{2r} = 0 \\ p_{2r+1} = (1/4)(3/4)^{r-1} \end{cases} \qquad [r = 1, 2, 3, \ldots]\,. \tag{12}$$

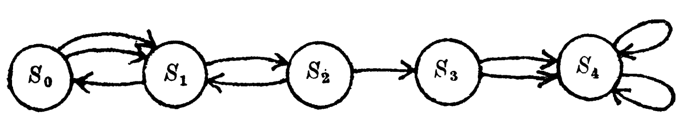
Abbiamo così provato che le possibili durate di una partita del gioco $\mathcal{T}_3$ sono $2r+1$ $[r = 1, 2, 3, \ldots]$ e che la durata di una partita è una variabile aleatoria a distribuzione geometrica con parametro $1/4$.

Notoriamente, allora, 9 è la media di tale variabile aleatoria. Se una partita dura $2r+1$ lanci, $\alpha - (2r+1)$ è il guadagno; anch'esso è una variabile aleatoria a distribuzione geometrica con media $\alpha - 9$. Si conferma così che $(\alpha - 9)/9$ è il guadagno medio per ogni transizione.

3. – Una partita di $\mathcal{T}_3$: studio mediante grafi.

Poichè ad ogni lancio di moneta sono possibili due risultati, costruiamo un multidigrafo $\mathcal{G}_3^*$, analogo a $\mathcal{G}_3$ tranne che gli archi a cui in $\mathcal{G}_3$ era associata la probabilità 1 verranno ora rappresentati da una coppia di archi. La matrice associata a $\mathcal{G}_3^*$ e lo stesso $\mathcal{G}_3^*$ sono:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$



Indichiamo con x_i^k il numero dei cammini di $\mathcal{G}_3^*$ che hanno lunghezza k, origine in S_0 e termine in S_i Posto.

$$X^k = [x_0^k\ x_1^k\ x_2^k\ x_3^k\ x_4^k] \tag{13}$$

è evidentemente

$$X^{k+1} = X^k M \tag{14}$$

cioè in forma scalare

$$\begin{cases} x_0^{k+1} = x_1^k \\ x_1^{k+1} = 2x_0^k + x_2^k \\ x_2^{k+1} = x_1^k \\ x_3^{k+1} = x_2^k \\ x_4^{k+1} = 2x_3^k + 2x_4^k \end{cases} \tag{15}$$

In n lanci della moneta sono possibili 2^n sequenze di risultati, a ciascuna delle quali corrisponde in $\mathcal{G}_3^*$ un cammino di origine S_0 e lunghezza n. Ma anche viceversa: ogni siffatto cammino identifica una ben determinata sequenza di risultati di n lanci.

La partita termina in n lanci se e solo se quel cammino di lunghezza n ha termine in S_3. Risulta dunque, indicando anche con A_n il numero dei cammini di lunghezza n con origine in S_0 e termine in S_3,

$$P_n = x_3^n/2^n = A_n/2^n \tag{16}$$

Applicando ripetutamente le (15) e le loro inverse si ottiene

$$\begin{aligned} x_3^n = x_2^{n-1} = x_1^{n-2} = 2x_0^{n-3} + x_2^{n-3} = 2x_1^{n-4} + x_2^{n-3} = \\ = 2x_2^{n-3} + x_2^{n-3} = 3x_2^{n-3} = 3x_3^{n-2} \end{aligned} \tag{17}$$

cioè

$$A_n = 3A_{n-2} \tag{18}$$

La (18) insieme con le ovvie condizioni iniziali

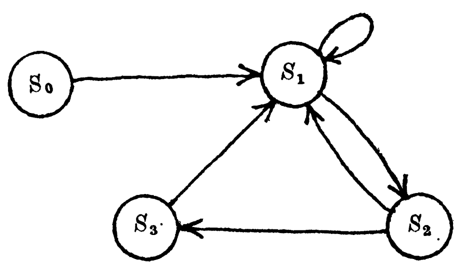
$$A_1 = A_2 = 0 \qquad A_3 = 2 \tag{19}$$

permette di calcolare la successione $\{A_n\}$ da cui, per la (16), le probabilità delle possibili durate della partita, riottenendo i risultati di paragrafo 2.

4. – Equità di $\mathfrak{Q}_3$.

Analogamente a quanto fatto a paragrafo 1, ci riferiamo alla catena di Markov con la matrice di transizione Q_3 e il digrafo $\mathcal{H}_3$ delle possibili transizioni:

$$Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$



Il digrafo $\mathcal{H}_3$ non è fortemente connesso, ma i suoi nodi S_1, S_2, S_3 costituiscono una classe fortemente connessa che è l'unica classe finale: dunque la catena di Markov è irriducibile con i tre stati nominati che sono persistenti mentre S_0 è transitorio. In $\mathcal{H}_3$ il massimo comune divisore delle lunghezze dei circuiti è 1: dunque la catena è aperiodica.

Essa è allora regolare e perciò completamente ergodica. Procedendo come a paragrafo 1 si trovano le probabilità asintotiche

$$\Pi = [0 \;\; 4/7 \;\; 2/7 \;\; 1/7] \tag{20}$$

e, definita esattamente come un paragrafo 1 la matrice R dei guadagni, si trovano anche i guadagni attesi dalla prossima transizione che sono gli stessi della (6). Ne consegue, dalla prima uguaglianza contenuta nella (7) e dalla (20), che

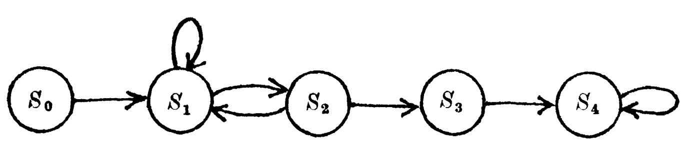
$$g = \sum_{k=0}^{3} q_k \pi_k = (\alpha - 7)/7 . \tag{21}$$

Dunque Q_3 è equo se e solo se $\alpha = 7$.

5. – Una partita di $\mathcal{Q}_3$: studio analitico.

Procedendo come a paragrafo 2, ma per il gioco Q_3, si hanno la matrice di transizione $\bar{Q}_3$ e il digrafo $\mathcal{K}_3$:

$$\bar{Q}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$



Si calcola quindi, senza difficoltà,

$$(I - z\bar{Q}_3)^{-1} = zA + B + \frac{1}{1-z} C + \tag{22}$$

$$+ \frac{1}{1 + (\sqrt{5} - 1)z/4} D + \frac{1}{1 - (\sqrt{5} + 1)z/4} E$$

con le matrici A, B, C, D, E ora definite:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -2/\sqrt{5} & (\sqrt{5}+1)/\sqrt{5} & -(\sqrt{5}+3)/\sqrt{5} & 4/\sqrt{5} \\ 0 & (\sqrt{5}-1)/(2\sqrt{5}) & -1/\sqrt{5} & (\sqrt{5}+1)/(2\sqrt{5}) & (1-\sqrt{5})/\sqrt{5} \\ 0 & -1/\sqrt{5} & (\sqrt{5}+1)/(2\sqrt{5}) & -(\sqrt{5}+3)/(2\sqrt{5}) & 2/\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 2/\sqrt{5} & (\sqrt{5}-1/\sqrt{5} & (3-\sqrt{5})/\sqrt{5} & -4/\sqrt{5} \\ 0 & (1+\sqrt{5})/(2\sqrt{5}) & 1/\sqrt{5} & (\sqrt{5}-1)/(2\sqrt{5}) & -(1+\sqrt{5})/\sqrt{5} \\ 0 & 1/\sqrt{5} & (\sqrt{5}-1)/(2\sqrt{5}) & (3-\sqrt{5})/(2\sqrt{5}) & -2/\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Di qui, invertendo la trasformazione Z,

$$\bar{Q}_3^n = \delta_{1n}A + \delta_{0n}B + C + \\ + (-1)^n\big((\sqrt{5}-1)/4\big)^n D + \big((\sqrt{5}+1/4)\big)^n E \tag{23}$$

e, infine, la probabilità p_n che n sia la durata della partita:

$$(24) \qquad p_n = -\delta_{1n} + 2\delta_{0n} - (-1)^n\big((\sqrt{5}-1)/4\big)^n(\sqrt{5}+3)/\sqrt{5} + \\ + \big((\sqrt{5}+1)/4\big)^n(3-\sqrt{5})/\sqrt{5}$$

In particolare si ottiene

$$p_1 = p_2 = 0 \qquad p_3 = 1/(2^2) \qquad p_4 = 1/(2^3) \qquad p_5 = 2/(2^4) \qquad p_6 = 3/(2^5)$$
$$p_7 = 5/(2^6) \qquad p_8 = 8/(2^7) \qquad p_9 = 13/(2^8) \text{ ecc .}$$

Si intuisce che le probabilità p_n sono rapporti con denominatori le successive potenze di 2 e i cui numeratori sono gli elementi di una successione di Fibonacci:

$$(25) \qquad p_n = a_{n-3}/2^{n-1} \qquad [n = 3, 4, 5, \ldots]$$

dove appunto

$$(26) \qquad \begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \qquad [n = 2, 3, 4, \ldots] . \end{cases}$$

Questa intuizione è facilmente verificabile, attese le (24), in quanto sussiste la

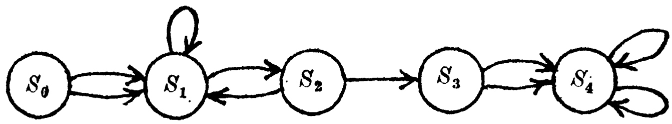
$$(27) \qquad 4p_{n+3} = 2p_{n+2} + p_{n+1}$$

ma può essere messa meglio in evidenza mediante considerazioni sulla numerosità di certi cammini in un multigrafo, come vedremo al successivo paragrafo.

6. – Una partita di Q_3: studio mediante grafi.

Analogamente a quanto esposto a paragrafo 3, la matrice associata al multidigrafo $\mathcal{K}_3^*$ e il multidigrafo stesso sono:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} .$$



Sia ancora x_i^k il numero dei cammini che in $\mathcal{K}_3^*$ hanno lunghezza k, origine in S_0 e termine in S_i; allora sussistono le (14) che in forma scalare si scrivono

$$(28) \qquad \begin{cases} x_0^{k+1} = 0 \\ x_1^{k+1} = 2x_0^k + x_1^k + x_2^k \\ x_2^{k+1} = x_1^k \\ x_3^{k+1} = x_2^k \\ x_4^{k+1} = 2x_3^k + 2x_4^k . \end{cases}$$

Applicando ripetutamente le (28) e le loro inverse si ottiene

$$(29) \qquad x_3^n = x_2^{n-1} = x_1^{n-2} = 2x_0^{n-3} + x_1^{n-3} + x_2^{n-3} = \\ = x_2^{n-2} + x_3^{n-2} = x_3^{n-1} + x_3^{n-2}$$

cioè, posto ancora $A_n = x_3^n$,

$$(30) \qquad A_n = A_{n-1} + A_{n-2} .$$

La (30) con le ovvie condizioni iniziali

$$(31) \qquad A_1 = A_2 = 0$$

permette di calcolare la successione $\{A_n\}$ da cui, essendo

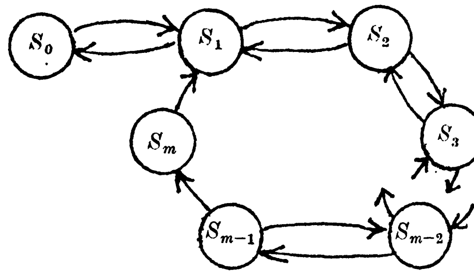
$$(32) \qquad p_n = A_n/2^n$$

si conclude come a paragrafo precedente.

7. – Equità di $\mathcal{T}_m$.

La matrice di transizione $P_m = [p_{ij}]$ ha nulli tutti gli elementi ad eccezione di quelli qui sotto indicati, e il digrafo $\mathcal{G}_m$ ha l'aspetto qui raffigurato:

$$\begin{cases} p_{01} = p_{m1} = 1 \\ p_{k,k-1} = p_{k,k+1} = 1/2 \qquad [k = 1\ 2, \ldots, m-1] \end{cases}$$



Il digrafo è fortemente connesso: la catena è irriducibile e i suoi stati sono tutti persistenti. Però il massimo comun divisore delle lunghezze dei circuiti di $\mathcal{G}_m$ è 1 se e solo se m è dispari, altrimenti è 2; nel primo caso la catena è aperiodica e dunque regolare, nel secondo caso è periodica di periodo 2.

Il sistema

$$\Pi = \Pi P_m \tag{33}$$

con la condizione

$$\sum_{i=0}^{m} \pi_i = 1 \tag{34}$$

ammette sempre l'unica soluzione

$$\begin{cases} \pi_0 = \dfrac{m-1}{m^2} \\ \pi_k = \dfrac{2(m-k)}{m^2} \qquad [k = 1, 2, \ldots, m-1] \\ \pi_m = \dfrac{1}{m^2} \end{cases} \tag{35}$$

che dunque è, per la (33), l'unica distribuzione stazionaria di probabilità sugli stati, ma essa è anche la distribuzione asintotica solo se m è dispari. In questo ultimo caso, dopo aver osservato che la matrice

$R = [r_{ij}]$ ha tutti gli elementi uguali a -1 fuorchè $r_{m-1,m}$ che ha il valore $(\alpha/2)-1$, e che pertanto i guadagni q_k attesi dalla prossima transizione se essa avviene a partire dallo stato S_k sono definiti dalle

$$(36) \qquad q_k = \begin{cases} -1 & [k \neq m-1] \\ (\alpha/2)-1 & [k = m-1] \end{cases}$$

è certamente corretto calcolare il guadagno medio per ogni transizione con la

$$(37) \qquad g = \sum_{k=0}^{m} q_k \pi_k = \frac{\alpha - m^2}{m^2}$$

e tale risultato è valido anche se invece m è pari, come vedremo tra breve.

Anche in questo caso è possibile assegnare un significato probabilistico alle π_i, in modo da giustificare la (37). Ma è preferibile sfuggire a questioni un po' delicate, affidandosi al procedimento indicato da Howard che abbisogna (ma non è nemmeno indispensabile) solo dell'irriducibilità della catena di Markov. Si consideri dunque il sistema

$$(38) \qquad g + v_i = q_i + \sum_{j=0}^{m} p_{ij} v_j \qquad [i = 0, 1, 2, \ldots, m]$$

nelle incognite g, v_i. Posto $v_m = 0$ è immediato verificare che la soluzione si ha con

$$(39) \qquad v_k = \frac{k^2 \alpha}{m^2} \qquad [k = 0, 1, ,.., m-1]$$

da cui, per l'ultima delle (38)

$$(40) \qquad g = -1 + v_1 = \frac{\alpha - m^2}{m^2}$$

come avevamo asserito. Dunque il gioco è equo se e solo se $\alpha = m^2$. Inoltre m^2 è la durata media di una partita.

8. – Una partita di $\mathcal{T}_m$.

A meno che non sia $m = 2$ oppure $m = 3$ non è possibile (o almeno non è facile) studiare una partita di $\mathcal{T}_m$ con la metodologia utilizzata a paragrafo 2. Infatti per una tale metodologia occorre scomporre in fattori i denominatori di $(I - z\overline{P}_m)^{-1}$, cioè il determinante di $I - z\overline{P}_m$; e quando $m > 3$ non è sufficiente sapere che esso si annulla per $z = 1$.

Ci rifaremo dunque alla metodologia che utilizza nozioni di teoria dei grafi, come l'abbiamo esposta a paragrafo 3 ma con i ritocchi e le complicazioni che si renderanno necessari.

La matrice $M = [m_{ij}]$ associata al multidigrafo $\mathcal{G}_m^*$ ha tutti gli elementi nulli, ad eccezione di quelli ora specificati:

$$(41)\qquad \begin{cases} m_{01} = m_{m-1,m} = m_{m,m} = 2 & \\ m_{k,k-1} = m_{k,k+1} = 1 & [k = 1, 2, \dots, m-2]\,. \end{cases}$$

Risulta allora, con le notazioni di paragrafo 3,

$$(42)\qquad \begin{cases} x_0^k = x_1^{k-1} & \\ x_1^k = 2x_0^{k-1} + x_2^{k-1} & \\ x_r^k = x_{r-1}^{k-1} + x_{r+1}^{k-1} & [r = 2, 3, \dots, m-2] \\ x_{m-1}^k = x_{m-2}^{k-1} & \\ x_m^k = x_{m-1}^{k-1} & \\ x_{m+1}^k = 2x_m^{k-1} + 2x_{m+1}^{k-1} & \end{cases}$$

e da queste conseguono le

$$(43)\qquad \begin{cases} x_0^k = 2x_0^{k-2} + x_2^{k-2} & \\ x_1^k = 3x_1^{k-2} + x_3^{k-2} & \\ x_2^k = 2x_0^{k-0} + 2x_2^{k-2} + x_4^{k-2} & \\ x_r^k = x_{r-2}^{k-2} + 2x_r^{k-2} + x_{r+2}^{k-2} & [r = 3, 4, \dots, m-3] \\ x_{m-2}^k = x_{m-4}^{k-2} + 2x_{m-2}^{k-2} & \\ x_{m-1}^k = x_{m-3}^{k-2} + x_{m-1}^{k-2} & \\ x_m^k = x_{m-2}^{k-2}\,. & \end{cases}$$

Supponiamo ora che m sia dispari

$$m = 2t + 1 \qquad [t = 1, 2, 3, \ldots] \tag{44}$$

Allora dalle (43) segue subito che

$$\sum_{r=0}^{t} (-1)^r (2r + 1) x_{2r+1}^k = 0 \tag{45}$$

D'altronde dalle (43) si ha

$$\left\{\begin{aligned} x_{2t-1}^k &= x_{2t+1}^{k+2} \\ x_{2t-3}^k &= x_{2t-1}^{k+2} - 2x_{2t-1}^k \\ x_{r-2}^k &= x_r^{k+2} - 2x_r^k - x_{r+2}^k \qquad [r = 3, 5, 7, \ldots, 2t-3]\,. \end{aligned}\right. \tag{46}$$

Allora, essendo $A_k = x_m^k$, posto

$$n = k + 2t$$

se n è abbastanza grande la (45) tramite le (46) diventa una relazione lineare fra

$$A_n, A_{n-2}, A_{n-4}, \ldots, A_{n-2t}$$

con i coefficienti tutti diversi da zero; poichè 1 è il coefficiente di A_n risulta dunque

$$A_n = \sum_{r=1}^{t} \xi_r A_{n-2r} \tag{47}$$

dove i combinatori ξ_r sono facilmente determinabili e risulta che m è il coefficiente di A_{n-2}, che i loro segni sono alterni e che il coefficiente di A_{n-2t} è m.

La (47) è una formula ricorrente che, dato m, permette di calcolare ogni A_n quando siano già state calcolate le A con indice minore. Poichè evidentemente $A_n = 0$ se $n < m$, mentre $A_m = 2$, consegue subito che sono nulle tutte le A con indice pari. Per quelle con indice dispari risulta, ad esempio

$$m = 3 \Rightarrow A_n = 3A_{n-2}$$

$$m = 5 \Rightarrow A_n = 5A_{n-2} - 5A_{n-4}$$

$$m = 7 \Rightarrow A_n = 7A_{n-2} - 14A_{n-4} + 7A_{n-6}$$

$$m = 9 \Rightarrow A_n = 9A_{n-2} - 27A_{n-4} + 30A_{n-6} - 9A_{n-8}$$

$$m = 11 \Rightarrow A_n = 11A_{n-2} - 46A_{n-4} + 77A_{n-6} - 55A_{n-8} + 11A_{n-10}$$

da cui, sempre come esempio, ecco alcuni dei valori delle A_n:

m	A_3	A_5	A_7	A_9	A_{11}	A_{13}	A_{15}
3	2	6	18	54	162	486	1458
5	0	2	10	40	150	550	2000
7	0	0	2	14	70	308	1274
9	0	0	0	2	18	108	546
11	0	0	0	0	2	22	150

Calcolate le A_n risulta poi molto agevole la determinazione della probabilità $p_n = A_n/2^n$ che n sia la durata della partita.

Se, invece della (44) sussiste la

$$m = 2t + 2 \qquad [t = 1, 2, 3, \ldots] \tag{48}$$

e dunque se m è pari, dalle (43) segue subito la

$$\sum_{r=0}^{t+1} (-1)^r 2x_{2r}^k = 0 \tag{49}$$

Ma per le (43)

$$\left\{\begin{array}{lll} x_{2t}^k & = x_{2t+2}^{k+2} & \\ x_{2t-2}^k & = x_{2t}^{k+2} - 2x_{2t}^k & \text{solo se } t \geqslant 2 \\ x_{r-2}^k & = x_r^{k+2} - 2x_r^k - x_{r+2}^k & [r = 4, 6, 8, \ldots, 2t-2] \\ 2x_0^k & = x_2^{k+2} - 2x_2^k - x_4^k \,. & \end{array}\right. \tag{50}$$

Allora, posto

$$n = k + 2t + 2$$

se n è abbastanza grande si ottiene

$$A_n = \sum_{r=1}^{t+1} \xi_r A_{n-2r} \tag{51}$$

e si conclude, analogamente all'altro caso, che le A_n sono nulle se n è dispari, mentre se n è pari, ad esempio:

$$m = 4 \Rightarrow A_n = 4A_{n-2} - 2A_{n-4}$$

$$m = 6 \Rightarrow A_n = 6A_{n-2} - 9A_{n-4} + 2A_{n-6}$$

$$m = 8 \Rightarrow A_n = 8A_{n-2} - 20A_{n-4} + 16A_{n-6} - 2A_{n-8}$$

$$m = 10 \Rightarrow A_n = 10A_{n-2} - 35A_{n-4} + 50A_{n-6} - 25A_{n-8} + 2A_{n-10}$$

$$m = 12 \Rightarrow A_n = 12A_{n-2} - 54A_{n-4} + 112A_{n-6} - 105A_{n-8} + 36A_{n-10} - 2A_{n-12}$$

da cui seguono alcuni valori delle A_n:

m	A_4	A_6	A_8	A_{10}	A_{12}	A_{14}	A_{16}
4	2	8	28	96	328	1120	3824
6	0	2	12	54	220	858	5900
8	0	0	2	16	88	416	1820
10	0	0	0	2	20	130	700
12	0	0	0	0	2	24	180

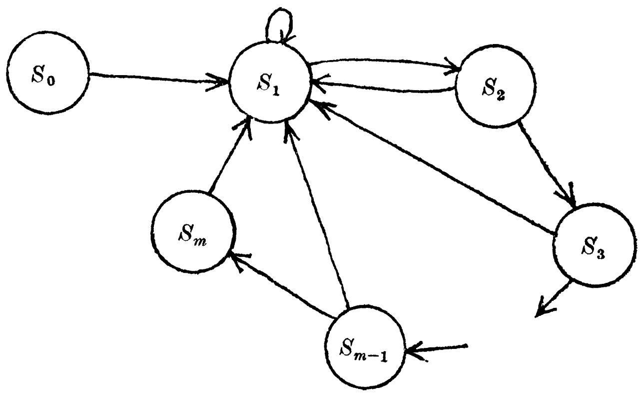
e risulta poi facile calcolare le probabilità p_n che n sia la durata di una partita.

9. - Equità di $\mathcal{Q}_m$.

La matrice di transizione $Q_m = [p_{ij}]$ ha nulli tutti gli elementi ad eccezione di

$$\begin{cases} p_{01} = p_{m1} = 1 \\ p_{k,1} = p_{k,k+1} = 1/2 \qquad [k = 1, 2, \dots, m-1] \end{cases}$$

e il diagrafo $\mathcal{H}_m$ ha l'aspetto qui raffigurato:



Nel digrafo i nodi $S_1, S_2, \ldots, S_m$ generano una componente fortemente connessa mentre un'altra è generata dal solo S_0. Nella prima il massimo comun divisore delle lunghezze dei circuiti è 1. Dunque la catena di Markov è regolare e le probabilità asintotiche possono venire determinate risolvendo il sistema

$$\Pi = \Pi Q_m \tag{52}$$

con la condizione

$$\sum_{i=0}^{m} \pi_i = 1 \tag{53}$$

Si trova l'unica soluzione

$$\begin{cases} \pi_0 = 0 \\ \pi_k = \dfrac{2^{m-k}}{2^m - 1} \quad [k = 1, 2, \ldots, m]\,. \end{cases} \tag{54}$$

I guadagni q_k attesi dalla prossima transizione a partire da S_k sono ancora dati dalle (36), e dunque il guadagno medio per ogni transizione è

$$g = \sum_{k=0}^{m} q_k \pi_k = \frac{\alpha - (2^m - 1)}{2^m - 1}\,. \tag{55}$$

Dunque il gioco è equo se e solo se $\alpha = 2^m - 1$. Inoltre $2^m - 1$ è la durata media di una partita.

10. - Una partita di $\mathcal{Q}_m$.

Procedendo come a paragrafo 8, la matrice $M = [m_{ij}]$ associata al multigrafo $\mathcal{K}_m^*$ è tale che

$$(56) \qquad \begin{cases} m_{01} = m_{m,m+1} = m_{m+1,m+1} = 2 \\ m_{k1} = m_{k,k+1} \qquad [k = 1, 2, \ldots, m-1] \end{cases}$$

mentre sono nulli tutti gli altri elementi.

Risulta allora dalla (14)

$$(57) \qquad \begin{cases} x_0^k = 0 \\ x_1^k = 2x_0^{k-1} + x_1^{k-1} + x_2^{k-1} + \ldots + x_{m-1}^{k-1} \\ x_r^k = x_{r-1}^{k-1} \qquad [r = 2, 3, \ldots, m] \\ x_{m+1}^k = 2x_m^{k-1} + 2x_{m+1}^{k-1} \end{cases}$$

e da queste seguono subito la

$$(58) \qquad x_1^k = x_1^{k-1} + x_2^{k-1} + \ldots + x_{m-1}^{k-1}$$

e le

$$(59) \qquad x_t^{k-1} = x_m^{k+m-t-1} \qquad [t = 1, 2, \ldots, m]$$

per le quali la (58) diventa

$$(60) \qquad A_{k+m-2} = A_{k+m-3} + A_{k+m-4} + \ldots + A_k + A_{k-1}$$

avendo posto ancora $A_k = x_m^k$. Con riferimento alla successione $\{A_i\}$ la (60) dice che ogni A_n è somma degli $m-1$ A_i che la precedono, pertanto la $\{A_i\}$ è una successione di Fibonacci di ordine $m-2$, con i valori iniziali

$$A_1 = A_2 = A_3 = \ldots = A_{m-1} = 0 \qquad A_m = 2$$

Risulta allora facile calcolare la probabilità $p_n = A_n/2^n$ che n sia la durata di una partita.

BIBLIOGRAFIA

[1] F. S. Hillier - G. J. Lieberman, *Introduzione alla Ricerca Operativa*, F. Angeli, Milano 1973.

[2] B. De Finetti, *Teoria delle Probabilità*, Einaudi, Torino 1970.

[3] R. A. Howard, *Dynamic Programming and Markov Processes*, MIT Press, 1960.

Manoscritto pervenuto in redazione il 30 novembre 1979.