

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

R. SPIGLER

La struttura delle relazioni « molto maggiore » e « molto minore » nel calcolo approssimato

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 63 (1980), p. 27-39

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1980__63__27_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

La struttura delle relazioni « molto maggiore » e « molto minore » nel calcolo approssimato.

R. SPIGLER (*)

SUNTO - Viene proposta una definizione fisicamente ragionevole e matematicamente rigorosa dei simboli \gg e \ll . Si osserva che le relazioni $a \gg b$, $a \ll b$ così definite risultano essere ordinamenti parziali stretti, per cui si mette in luce una profonda differenza tra queste « disuguaglianze forti » e quelle usuali. Viene data anche una tabella operativa, utile per condurre correttamente il calcolo, quando si pensa sovrapposta a questa particolare struttura ordinale l'usuale struttura algebrica di corpo reale. Ai simboli \gg e \ll può collegarsi l'altro, pure molto usato, di uguaglianza approssimata \cong .

SUMMARY - A physically reasonable and mathematically rigorous definition of the symbols \gg and \ll is proposed. It is observed that the relations $a \gg b$, $a \ll b$ so defined turn out to be strict partial orderings. There is therefore a deep difference between these « strong inequalities » and the usual ones. An operative table is also given to perform the calculations correctly, whenever this particular ordinal structure is imposed on the usual algebraic structure of the real field. The approximate equality symbol \cong can be related to those symbols introduced above.

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica Applicata, via Belzoni, 7 - 35100, Università di Padova.

Lavoro svolto nell'ambito dei Gruppi di Ricerca del C.N.R. (G.N.A.F.A.).

I. — Introduzione.

Spesso nella *Matematica Applicata* ⁽¹⁾ come pure nella *Fisica* si incontra la scrittura:

$$(I.1) \quad a \gg b, \blacksquare$$

o la « duale »:

$$(I.1') \quad a \ll b,$$

che permette, in genere, di trascurare la quantità b rispetto ad a (o, rispettivamente, a rispetto a b) in $a + b$; a e b sono reali con $a > 0$, $b > 0$, e le scritture $a \gg b$, $b \ll a$ si considerano equivalenti.

La somiglianza formale delle « disuguaglianze forti » (I.1), (I.1') con quelle usuali può trarre in inganno, inducendo a errori grossolani, se si tenta di applicare l'ordinario calcolo delle disuguaglianze alle (I.1), (I.1'). In realtà queste ultime non possiedono la struttura dell'ordine lineare (anzi algebrico) delle disuguaglianze.

In base alla definizione che daremo si potrà parlare per esse soltanto di ordinamento parziale (stretto), dotato di certe altre proprietà; questa struttura la penseremo sovrapposta ovviamente alla struttura algebrica di corpo reale.

Scopo di questa nota è offrire un collegamento tra l'uso che dei concetti qui esposti fanno i Fisici e gli utenti della *Matematica* e la relativa formalizzazione in termini di strutture astratte.

Molti « *Matematici applicati* » d'altra parte, preferiscono servirsi dei simboli asintotici di Landau (O , o , \sim , cioè « *O-grande* », « *o-piccolo* » e « asintotico »), i quali hanno un significato preciso, potendosi ricondurre alla definizione di limite (o e \sim) o comunque alle disuguaglianze ordinarie.

II. — Definizione di « molto maggiore » e di « molto minore ».

Nel cercare di attribuire un significato preciso alle (I.1), (I.1') si deve tener presente l'origine dei simboli \gg e \ll , che va ricercata nell'esigenza di trascurare, in una somma di due addendi, l'addendo

(1) Si veda per es. in [1]-[3] il metodo di Graeffe.

« sufficientemente piccolo » rispetto all'altro, ottenendo un risultato « sufficientemente approssimato » per il tipo di problema allo studio.

Un tale significato, fisicamente ragionevole, è dato dalla seguente

DEFINIZIONE A. Dati a, b , reali con $a > 0, b > 0$, diremo che « a è molto maggiore di b » e scriveremo la (I.1), se:

$$(II.1) \quad a > kb,$$

essendo $k \geq 1$ un opportuno numero reale fissato, il cui valore dipende dal problema specifico che si considera.

Il valore di k è legato alla precisione richiesta nelle approssimazioni; per $k = 1$ si ritrovano le disuguaglianze ordinarie; perciò in quanto segue supporremo sempre $k > 1$.

Vista la definizione (II.1), sarebbe opportuno associare al simbolo \gg un'indicazione che ricordi l'entità di k che si sottintende, scrivendo ad esempio:

$$(II.2) \quad a \underset{k}{\gg} b$$

al posto della (I.1).

Se $a \underset{k}{\gg} b$, per ogni h con $1 < h < k$, si ha pure: $a \underset{h}{\gg} b$.

Tuttavia si può dare anche una diversa e a volte più soddisfacente

DEFINIZIONE B. Dati a, b , reali con $a > 1, b > 1$, diremo che « a è molto maggiore di b » e scriveremo la (I.1) se:

$$(II.3) \quad a > b^k,$$

ove $k \geq 1$ è un opportuno numero reale fissato, il cui valore dipende dal problema specifico allo studio. Per $k = 1$ si ritroverebbero le disuguaglianze ordinarie, per cui supporremo sempre $k > 1$, in quanto segue.

Ancora sarebbe opportuno utilizzare una scrittura come la (II.2) al posto della (I.1); e ancora, se $a \underset{k}{\gg} b$, per ogni h con $1 < h < k$, si ha $a \underset{h}{\gg} b$.

In maniera del tutto analoga si può dar significato alla scrittura « duale » $a \ll b$: come si è già detto, si intende che $a \ll b$ è equivalente a $b \gg a$.

OSSERVAZIONE 1^a. Le Definizioni A e B , nel caso che k sia intero, presuppongono di operare in un gruppo additivo ($kb = b + b + \dots + b$, k volte) o in un gruppo moltiplicativo ($b^k = b \cdot b \cdot \dots \cdot b$, k volte), rispettivamente.

OSSERVAZIONE 2^a. Tra le relazioni binarie (II.1), (II.3) vi è un isomorfismo d'ordine [4], potendosi stabilire una corrispondenza biunivoca tra gli elementi su cui opera la relazione (II.1) e quelli su cui opera la (II.3), cioè tra i due gruppi di cui all'Osservazione 1^a (se k è intero), in modo da « conservare la struttura » (ovvero in modo da mutare l'una nell'altra).

Infatti, prendendo i logaritmi nella (II.3), si ha:

$$(II.4) \quad \log a > k \cdot \log b ,$$

cioè, posto $\alpha \equiv \log a$, $\beta \equiv \log b$:

$$(II.4') \quad \alpha > k \cdot \beta ,$$

ed è $\alpha > 0$, $\beta > 0$, essendo $a > 1$, $b > 1$ nella (II.4).

OSSERVAZIONE 3^a. Vista l'opportunità di precisare il valore del parametro k nelle (II.1), (II.3), nonchè l'Osservazione 1^a, sarà bene scrivere rispettivamente:

$$(II.5) \quad a \underset{+,k}{\gg} b , \quad (\text{oppure } a \underset{A,k}{\gg} b) ,$$

e:

$$(II.6) \quad a \underset{.,k}{\gg} b , \quad (\text{oppure } a \underset{B,k}{\gg} b) .$$

Per maggior semplicità scriveremo la (I.1) riferendoci espressamente all'accezione A o B , per distinguere le due diverse definizioni, e useremo il simbolo (II.2) ogni volta che sia utile evidenziare il valore di k .

OSSERVAZIONE 4^a. Le Definizioni A o B riconducono il calcolo delle « disuguaglianze forti » a quello delle disuguaglianze ordinarie, e questo permette di condurre ogni discussione con tecniche elementari.

III. – Proprietà del « molto maggiore » e del « molto minore ».

Le relazioni binarie di cui alle Definizioni A e B godono delle proprietà *irriflessiva* e *transitiva*. Infatti, essendo $k > 1$, si ha $a \not> ka$ ⁽²⁾ e $a > kb, b > kc \Rightarrow a > k^2 \cdot c > kc$, qualunque siano $a > 0, b > 0, c > 0$, nel caso A , e $a \not> a^k$, nonchè $a > b^k, b > c^k \Rightarrow a > c^{2k} > c^k$, qualunque siano $a > 1, b > 1, c > 1$, nel caso B .

Dunque siamo di fronte a degli *ordinamenti parziali* ⁽³⁾; per ricordare che, a causa della proprietà irriflessiva ($a \not> a$), si ha $a \gg b \Rightarrow a \neq b$, li diremo anche *ordinamenti parziali stretti*. Anzi, per ogni $a > 0, b > 0$ nel caso A e per ogni $a > 1, b > 1$ nel caso B (ipotesi che nel seguito sottintenderemo), si ha che:

$$(III.1) \quad a \gg b \Rightarrow a > b, \quad (A, B) \text{ } ^{(4)}$$

essendo $a > kb > b, a > b^k > b$, cioè le « disuguaglianze forti » implicano quelle ordinarie.

Nè alcuna sia pur diversa definizione di « \gg » potrebbe soddisfare le esigenze della Fisica e del Calcolo Approssimato se si permettesse che fosse $a \gg a$: ciò implicherebbe di poter trascurare a rispetto a se stesso nella scrittura $a + a$, il che è ovviamente inammissibile.

Gli ordinamenti parziali considerati non sono totali, non avendo luogo la tricotomia.

Infatti le tre relazioni $a \gg b, b \gg a, a = b$ non esauriscono tutti i casi possibili; anzi vi sono coppie di elementi *non confrontabili* secondo la relazione di « molto maggiore » (sia A che B), cioè esistono numeri reali distinti tali che non sia nè $a \gg b$ nè $b \gg a$ (l'ordinamento è parziale).

Una sorta di tricotomia, che chiameremo *pseudo-tricotomia*, si può dare introducendo un concetto di « comparabilità » tra a e b : diciamo

⁽²⁾ Col simbolo $a \not> b$ intenderemo negare che $a > b$ e, in generale, se $a R b$ indica una relazione binaria tra a e b , con $a \not R b$ intenderemo che non è $a R b$.

⁽³⁾ Per ciò che riguarda la nomenclatura vi è discordanza tra i vari autori. Per maggior chiarezza diremo esplicitamente « ordinamento parziale » e « ordinamento totale », (v. [5]).

⁽⁴⁾ Mettendo tra parentesi al termine di una formula o di una proposizione, la lettera A o B o entrambe, intenderemo che la relativa proprietà vale secondo la def. A o B o entrambe.

che a è « comparabile » con b , e scriviamo $a \sim b$ (o $a \underset{k}{\sim} b$), se è $a \not\gg b$ e $b \not\gg a$, cioè:

$$(III.2) \quad a \sim b \Leftrightarrow \frac{b}{k} \leq a \leq kb \quad (A)$$

$$(III.3) \quad a \sim b \Leftrightarrow b^{1/k} \leq a \leq b^k \quad (B).$$

Allora si verifica uno e uno solo dei tre casi:

$$(III.4) \quad a \gg b, \quad a \ll b, \quad a \sim b \quad (A, B).$$

Così come l'insieme delle proprietà irreflessiva, transitiva e tricotomica conferisce agli ordinamenti parziali la veste di ordinamenti totali [5], potremo anche dire che la proprietà pseudo-tricotomica conferisce agli ordinamenti in esame la veste di ordinamenti *pseudo-totali*.

Vale la pena osservare che se $a \gg b$ (A, B) per ogni c con $c \sim a$, si ha che $c > b$; di più, se $a \gg b$ (A, B), per ogni c con $c \sim a$ esiste (un) d tale che $d \sim b$ e $c \gg d$.

Tuttavia la relazione $a \sim b$ non è una relazione di equivalenza, non essendo transitiva (k è fissato).

Per completezza si può anche introdurre la relazione

$$a \underset{\sim}{\gg} b \Leftrightarrow \{a \gg b \text{ oppure } a \sim b\} \quad (A, B),$$

di modo che, per la (III.4):

$$a \not\ll b \Leftrightarrow a \ll b,$$

(e viceversa

$$a \not\gg b \Leftrightarrow a \underset{\sim}{\gg} b).$$

Si noti che la relazione $a \underset{\sim}{\gg} b$ è « stretta » anche nel senso che $a \underset{\sim}{\gg} b \Rightarrow a \sim b$.

Le proprietà fin qui esaminate, oltre a numerose altre immediatamente deducibili dalle Def. A e B , sono riportate nella Tabella Riasuntiva.

Nella colonna relativa alla Def. B sono riportate le proprietà analoghe a quelle valide nella Def. A e ad esse corrispondenti nell'isomorfismo d'ordine che sussiste tra loro (v. § II, Osservazione 2^a).

Disuguaglianze forti.

$a \underset{k}{\gg} b$	
Def. A: $a > k \cdot b$ ($a > 0, b > 0; k \geq 1$)	Def. B: $a > b^k$ ($a > 1, b > 1; k \geq 1$)
(1)	$a \underset{1}{\gg} b \Leftrightarrow a > b$ (per $k = 1$ « A » e « B » si riducono alle disuguaglianze ordinarie strette)
(2)	$a \underset{k}{\gg} b \Rightarrow a > b$ (le « disuguaglianze forti » implicano quelle ordinarie)
(3)	$\exists a, b$ non confrontabili (ad es. a con se stesso)
(4)	$a \not\gg a$ (proprietà irreflessiva) $a \underset{k}{\gg} b, b \underset{h}{\gg} c \Rightarrow a \underset{kh}{\gg} c$ (proprietà transitiva) ⁽⁵⁾ } $a \underset{k}{\gg} b \Rightarrow b \not\gg a$ ⁽⁶⁾
(5)	$a \underset{k}{\gg} b, 0 < c < b \Rightarrow a \underset{k}{\gg} c$ $a \underset{k}{\gg} b, 1 < c < b \Rightarrow a \underset{k}{\gg} c$
(6)	$\forall h, 1 < h < k: a \underset{k}{\gg} b \Rightarrow a \underset{h}{\gg} b$ (monotonia rispetto a k)
(7)	$a \underset{k}{\gg} b, c > 0 \not\Leftarrow a + c \underset{k}{\gg} b + c$
(8)	$a \underset{k}{\gg} b, b \underset{h}{\gg} c \Rightarrow a + c \underset{k/2}{\gg} b + c$ (se $k/2 > 1$) $a \underset{k}{\gg} b, b \underset{h}{\gg} c \Rightarrow a \cdot c \underset{k/2}{\gg} bc$ (se $k/2 > 1$)
(9)	$a \underset{k}{\gg} b \Leftrightarrow a + c \underset{k}{\gg} b + c/k$ $a \underset{k}{\gg} b \Leftrightarrow ac \underset{k}{\gg} bc^{1/k}$
(10)	$a \underset{k}{\gg} b, c \underset{h}{\gg} d \not\Leftarrow a + c \underset{k}{\gg} b + d$ $a \underset{k}{\gg} b, c \underset{h}{\gg} d \not\Leftarrow a + c \underset{k}{\gg} b + d$ (v. (21), (23))
(11)	$a + c \underset{k}{\gg} b + d, 0 < c \leq d \Rightarrow a \underset{k}{\gg} b$
(12)	$a \underset{k}{\gg} b, c \underset{h}{\gg} d \Rightarrow a + c \underset{r}{\gg} b + d$ ($r = \min(k, h)$) $a \underset{k}{\gg} b, c \underset{h}{\gg} d \Rightarrow ac \underset{r}{\gg} bd$ ($r = \min(k, h)$)
(13)	$a \underset{k}{\gg} b, \alpha > 0 \Leftrightarrow a \underset{k/\alpha}{\gg} \alpha \cdot b$ (se $k/\alpha > 1$) $a \underset{k}{\gg} b, \alpha > 0 \Leftrightarrow a \underset{k/\alpha}{\gg} b^\alpha$ (se $k/\alpha > 1$)
(14)	$a \underset{k}{\gg} b \Leftrightarrow a + b \underset{k+1}{\gg} b$ $a \underset{k}{\gg} b \Leftrightarrow ab \underset{k+1}{\gg} b$
(15)	$a \underset{k}{\gg} b, c \underset{k}{\gg} b \Rightarrow a + c \underset{2k}{\gg} b$ $a \underset{k}{\gg} b, c \underset{k}{\gg} b \Rightarrow ac \underset{2k}{\gg} b$

⁽⁵⁾ Anzi $a \underset{k}{\gg} b, b \underset{h}{\gg} c \Rightarrow a \underset{kh}{\gg} c \Rightarrow a \underset{r}{\gg} c, r = \min(k, h)$.

⁽⁶⁾ $a \underset{k}{\gg} b$ e $a \ll b$ sono sempre incompatibili.

(continua)

(16)	$a \underset{k}{\ll} b, c \underset{k}{\ll} b \Rightarrow a + c \underset{\frac{k/2}{k/2}}{\ll} b$ (se $k/2 > 1$)	$a \underset{k}{\ll} b, c \underset{k}{\ll} b \Rightarrow ac \underset{k/2}{\ll} b$
(17)	$a_i \underset{k}{\gg} b \ (i = 1, 2, 3, \dots) \Rightarrow$ $\Rightarrow \sum_{i=1}^n a_i \underset{nk}{\gg} b$	$a_i \underset{k}{\gg} b \ (i = 1, 2, 3, \dots) \Rightarrow$ $\Rightarrow \prod_{i=1}^n a_i \underset{nk}{\gg} b$
(18)	$a_i \underset{k_i}{\gg} b \ (i = 1, 2, 3, \dots) \Rightarrow$ $\Rightarrow \sum_{i=1}^n a_i \underset{h}{\gg} b \ (h = \sum_{i=1}^n k_i)$	$a_i \underset{k_i}{\gg} b \ (i = 1, 2, 3, \dots) \Rightarrow$ $\Rightarrow \prod_{i=1}^n a_i \underset{h}{\gg} b \ (h = \sum_{i=1}^n k_i)$
(19)	$a_i \underset{k}{\ll} b \ (i = 1, 2, 3, \dots) \Rightarrow$ $\Rightarrow \sum_{i=1}^n a_i \underset{k/n}{\ll} b \text{ (se } k/n > 1)$	$a_i \underset{k}{\ll} b \ (i = 1, 2, 3, \dots) \Rightarrow$ $\Rightarrow \prod_{i=1}^n a_i \underset{k/n}{\ll} b \text{ (se } k/n > 1)$
(20)	$a_i \underset{k_i}{\ll} b \ (i = 1, 2, 3, \dots) \Rightarrow$ $\Rightarrow \sum_{i=1}^n a_i \underset{h}{\ll} b$ (se $h \equiv [\sum_{i=1}^n k_i^{-1}]^{-1} > 1$)	$a_i \underset{k_i}{\ll} b \ (i = 1, 2, 3, \dots) \Rightarrow$ $\Rightarrow \prod_{i=1}^n a_i \underset{h}{\ll} b$ (se $h \equiv [\sum_{i=1}^n k_i^{-1}]^{-1} > 1$)
(21)	$a \gg b, c \gg d \Rightarrow ac \gg bd$ (anzi $a \underset{k}{\gg} b, c \underset{h}{\gg} d \Rightarrow ac \underset{hk}{\gg} bd$)	
(22)	$a \gg b, c \geq d \Rightarrow ac \gg bd$	$a \gg b, c \geq d \Rightarrow ac \gg bd^{1/k}$ (e $ac \underset{k}{\gg} b$)
(23)	$ac \gg bd, c \leq d \Rightarrow a \gg b$	
(24)	$a \gg b, c > 0 \Leftrightarrow ac \gg bc$	$ac \gg bc, c > 0 \Rightarrow a \underset{\neq}{\gg} b$
(25)	$a \gg b \Leftrightarrow 1/b \gg 1/a$	
(26)	$a \underset{k}{\gg} b, \alpha > 0 \Rightarrow a^\alpha \underset{k}{\gg} b^\alpha$ ($h = k^\alpha > k$)	$a \underset{k}{\gg} b, \alpha > 0 \Leftrightarrow a^\alpha \underset{k}{\gg} b^\alpha$
(27)	$a \gg b; n = 1, 2, 3, \dots \Rightarrow$ $\Rightarrow a^{1/n} \gg b^{1/n}$	$a \gg b; n = 1, 2, 3, \dots \Rightarrow$ $\Rightarrow a^{1/n} \gg b^{1/n}$
(28)	permettendo $a > 0, b \geq 0$: $\forall a > 0 \Rightarrow a \gg 0$	permettendo $a > 1, b \geq 1$: $\forall a > 1 \Rightarrow a \gg 1$
(29)	permettendo $a > 0, b \geq 0$: $a \gg b \Rightarrow a - b \gg 0$	
(30)	$a \gg b \Leftrightarrow a/b \gg 1$	permettendo $a > 1, b \geq 1$: $a \gg b \Rightarrow a/b \underset{\neq}{\gg} 1$
(31)	$a \underset{k}{\ll} x \underset{h}{\ll} b \Rightarrow a \underset{hk}{\ll} b$ (« doppia disuguaglianza forte »)	

Tabella Riassuntiva

Nella Tabella possiamo distinguere un primo gruppo di proprietà di struttura » ((1)-(5)), tra le quali due « leggi transitive », seguito da un secondo gruppo di « leggi di monotonia » e non-monotonia ((6)-(24)).

Infine le (29)-(31) riassumono le seguenti considerazioni.

Nella (I.1), Def. *A*, abbiamo supposto $a > 0$, $b > 0$. Analizziamo il caso in cui si permette $a > 0$, $b \geq 0$, mantenendo la stessa definizione. Con $b = 0$ si avrebbe per la scrittura $a \gg 0$ il significato $a > k \cdot 0 = 0$, e dunque, per ogni $a > 0$ si ha

$$(III.6) \quad a \gg 0,$$

e la « disuguaglianza forte » in questo caso si riduce a quella ordinaria.

La (III.6) stabilisce che lo 0 è trascurabile rispetto a qualsiasi quantità positiva, in accordo con il significato che si dà nelle applicazioni.

Analogamente, con la Def. *B*, permettendo $a > 1$, $b \geq 1$; con $b = 1$ si avrebbe per ogni $a > 1$:

$$(III.7) \quad a \gg 1.$$

Si osservi che (supposto k intero) lo 0 nel caso *A* e l'1 nel caso *B* sono gli elementi neutri del gruppo additivo e moltiplicativo, rispettivamente.

— Alla (III.6) si ricollega la seguente « proprietà *A* »:

$$(III.8) \quad a \gg b \Leftrightarrow a - b \gg 0,$$

significando la prima $a > kb > b$, e la seconda soltanto $a - b > 0$, cioè $a > b$ (è soltanto vero che $a \gg b \Rightarrow a - b \gg 0$).

— Analogamente, alla (III.7) si ricollega la « proprietà *A* », ma « non *B* »:

$$(III.9) \quad a \gg b \Leftrightarrow \frac{a}{b} \gg 1.$$

Infatti $a > kb$ è equivalente a dire $a/b > k$ ma $a > b^k$ non equivale alla $a/b > 1^k = 1$ (la prima implica la seconda, non viceversa). Infine si osservi che occorre fare attenzione anche usando la « doppia disu-

guaglianza forte »:

$$(III.10) \quad a \ll_k x \ll_k b .$$

Infatti essa equivale, nel caso A alla

$$ka < x < \frac{b}{k} ,$$

che implica $k^2 \cdot a < b$, cioè $b \gg_{k^2} a$ e non solo che $k \cdot a < b$ (come segue per transitività dalla $a \ll_k b$), e nel caso B alla:

$$a^k < x < b^{1/k} ,$$

che implica $a^{k^2} < b$, cioè ancora $b \gg_{k^2} a$ e non solo che $a^k < b$ (come segue dalla $a \ll_k b$).

Più in generale la

$$(III.11) \quad a \ll_k x \ll_h b$$

comporta che sia $b \gg_{hk} a$, (A, B).

IV. – Legame del « molto maggiore » col « circa uguale ».

Molto spesso, nel Calcolo Approssimato, si usa scrivere:

$$(IV.1) \quad a \cong b ,$$

che si legge « a circa uguale a b » e questo permette, in genere, di confondere a con b nei calcoli in atto.

Si può attribuire alla (IV.1) un senso più preciso dicendo che essa equivale alla:

$$(IV.2) \quad |a - b| < \varepsilon ,$$

ove ε è un numero positivo, opportunamente piccolo ma fissato, e il cui valore specifico dipende dal problema che si considera. La scrittura (IV.1) si può collegare ai simboli \gg, \ll : visto infatti che in pratica lo scopo della (IV.1) è quello di poter trascurare $|a - b|$ rispetto ad a

e a b nelle addizioni, possiamo darle il significato:

$$(IV.3) \quad |a - b| \ll \min(a, b),$$

di modo che la stima della « trascurabilità » di $|a - b|$ viene legata ai valori di a e b anzichè essere « assoluta » come in (IV.2).

OSSERVAZIONE 1^a. Siano a, b elementi di un gruppo G (ordinato), $|a| \equiv \max(a, a^{-1})$, ove a^{-1} è l'inverso di a in G . Diremo che « a è infinitamente maggiore di b », e scriveremo [6] (?):

$$(IV.11) \quad a \gg b$$

se, per ogni naturale k , è:

$$(IV.12) \quad |a| > |b|^k,$$

mentre a e b si dicono « Archimedeo-equivalenti », e scriveremo:

$$(IV.13) \quad a \sim b,$$

se esistono due naturali k, h tali che:

$$(IV.14) \quad |a| > |b|^k \quad \text{e} \quad |b| > |a|^h.$$

La (IV.13) è una relazione di equivalenza e la (IV.11) una relazione d'ordine totale (avendo luogo la tricotomia) tra gli elementi del gruppo G .

Si noti che l'operazione del gruppo è stata descritta mediante la notazione moltiplicativa; con la notazione additiva le (IV.12), (IV.14) si sarebbero scritte:

$$(IV.12') \quad |a| > k \cdot |b|,$$

$$(IV.14') \quad |a| > k \cdot |b|, \quad |b| > h \cdot |a|.$$

Risulta evidente la somiglianza delle (IV.12'), (IV.12) con le (II.1), (II.3): la differenza fondamentale è che, mentre le (IV.12'), (IV.12) devono valere per *ogni* k , le (II.1), (II.3) devono valere per un valore di k *fissato* e quindi per ogni h con $1 < h < k$ (v. la (6), nella Tabella Riassuntiva).

(?) Si usa qui il simbolo \gg al posto di \gg per evitare confusioni.

Come nella Fisica costruita sui numeri *reali* si opera in pratica un troncamento, riducendosi ad operare sui razionali finiti (ad esempio sui decimali finiti), così si può concepire la costruzione di una Fisica basata sui numeri *iperreali* ⁽⁸⁾ i quali si possono troncare in modo analogo; si ottiene così dalla struttura dei numeri di cui si parla nella (IV.11), la struttura che abbiamo studiato.

D'altra parte le restrizioni presenti non sono superabili: da un punto di vista fisico sarebbe troppo assumere il significato della (IV.11). Del resto la (IV.12) presuppone di operare in un « gruppo non-Archimedeo » ⁽⁹⁾.

Inoltre, nella relazione (IV.13) si ha:

$$(IV.15) \quad |a|^k \sim |a|,$$

e dunque, per ogni naturale k :

$$(IV.16) \quad \begin{cases} a \sim b \Rightarrow |a|^k \sim |b|, \\ a \gg b \Rightarrow |a| > |b|^k, \end{cases}$$

mentre secondo le (II.1), (II.3), anche se è $a \gg b$, sommando b (> 0) con se stesso o moltiplicando b (> 1) per se stesso un numero opportuno di volte, ci si può avvicinare ad a e superarlo: ciò è dovuto al fatto che il corpo reale è Archimedeo.

⁽⁸⁾ Per la nozione di « numero iperreale » (e di Analisi Non-Standard) v. ad es. [7].

⁽⁹⁾ A rigore si parla di « ordine Archimedeo » (e non) e perciò si « elementi Archimedei » (e non) in un *corpo* ordinato.

BIBLIOGRAFIA

- [1] F. B. HILDEBRAND, *Introduction to Numerical Analysis*, McGraw-Hill Co., Inc., New York (1956), p. 463.
- [2] D. D. McCracken - W. S. Dorn, *Numerical Methods and Fortran Programming*, John Wiley and Sons, Inc., New York-London (1966), p. 158.
- [3] M. CUGIANI, *Metodi dell'Analisi Numerica*, UTET, Torino (1967), p. 238.

- [4] L. LOMBARDO-RADICE, *Istituzioni di Algebra Astratta*, Feltrinelli, Milano (1965), p. 353.
- [5] I. BARSOTTI, *Appunti di Algebra*, Zanichelli, Bologna (1968), p. 7.
- [6] L. FUCHS, *Partially Ordered Algebraic Systems*, Pergamon Press, Oxford (1963), pp. 44-45.
- [7] H. J. KEISLER, *Elementary Calculus*, Prindle, Weber and Schmidt, Inc., Boston (1976).

Manoscritto pervenuto in redazione il 6 luglio 1979.