Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

M. A. Benedetti

Su un particolare problema di allocazione di servizi

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 64 (1981), p. 15-23

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1981__64__15_0>

REND SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 64 (1981)

Su un particolare problema di allocazione di servizi.

M. A. BENEDETTI (*)

1. Introduzione.

In una recente nota [1] F. Mason ha trattato un particolare problema di produzione, la cui formulazione rientra nella categoria dei Simple Plant Location Problems (S.P.L.P.). In esso si devono determinare quali semilavorati utilizzare per produrre vari articoli, essendo noti i costi di produzione di ciascun articolo sui semilavorati, ed il costo (fisso) di utilizzazione dei semilavorati stessi. I costi di produzione di ogni articolo su ogni semilavorato sono raccolti in una matrice soddisfacente a condizioni imposte dalla natura del problema (gli elementi sotto la diagonale sono ∞; gli altri sono, su ogni riga, non decrescenti al crescere dell'indice di colonna).

In questa nota si studia il problema, che generalizza quello precedente, in cui gli elementi sotto la diagonale principale (anzichè essere ∞) sono, in ogni riga, numeri reali non crescenti sino all'elemento diagonale stesso.

Questo problema si pone concretamente in varie situazioni.

Tanto per citare un caso, si pensi ad una linea di produzione (quale potrebbe essere una catena di montaggio) in cui vi sono dei punti di lavorazione $L_1, L_2, ..., L_n$ che vanno seguiti da opportuni meccanismi di controllo $M_1, M_2, ..., M_r$ (ad es. terminali di elaboratori elettronici), situati in corrispondenza di uno o più degli L_i.

Ogni punto di lavorazione deve servirsi di un solo punto di controllo, mentre, viceversa, quest'ultimo può servire contemporaneamente più posti di lavoro.

(*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università - Via Belzoni 7 - 35100 Padova.

Il costo di utilizzazione del servizio M_j da parte di un utente L_i è funzione non decrescente della distanza fisica posto di lavoro-posto di controllo ed è minimo (eventualmente nullo) quando questi coincidono.

D'altra parte l'installazione dei meccanismi di controllo comporta dei costi fissi per cui va ricercato un compromesso tra l'installazione di un unico servizio (oneroso in termini di spostamento, ecc.) e l'istituzione di un posto di controllo in ogni punto di lavorazione (con conseguenti costi fissi relativi).

Anche questo problema rientra nella categoria dei S.P.L.P. Scopo della nota è far vedere come anche in questo caso l'algoritmo della programmazione dinamica porta alla determinazione della (o di una) politica ottima.

2. Posizione del problema.

Prendendo come riferimento il particolare problema citato nella introduzione e adoperando notazioni analoghe a quelle utilizzate in [1], indichiamo con:

$L_1, L_2, \dots, L_n$ «i punti di lavorazione» situati lungo una «linea di produzione»;

$M_1, M_2, \dots, M_n$ i possibili «posti di controllo» situati in corrispondenza rispettivamente dei punti di lavorazione $L_1, L_2, \dots, L_n$;

c_{ij} il costo che deve sostenere l'utente L_i per utilizzare il punto di controllo M_j;

C la matrice $\|c_{ij}\|$;

d_i il costo fisso di installazione del meccanismo di controllo M_i;

x_{ij} la variabile booleana che vale 1 se il punto di lavorazione L_i utilizza il posto di controllo M_j, zero altrimenti;

x il vettore, n^2-dimensionale,

$$\|x_{11}x_{12}\dots x_{1n}x_{21}x_{22}\dots x_{2n}\dots\dots x_{n1}x_{n2}\dots x_{nn}\| .$$

La matrice A soddisfi alle seguenti condizioni:

$$c_{i1} \geqslant c_{i2} \geqslant \ldots \geqslant c_{ii}\,, \tag{2.1}$$

$$c_{ii} \leqslant c_{ii+1} \leqslant \ldots \leqslant c_{in}\,. \tag{2.2}$$

Ciò posto il problema, che diremo P, si può esprimere come segue:

$$P\colon\ \min\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} d_i\left(\max_k x_{ki}\right)\right\} \tag{2.3}$$

con i vincoli

$$\sum_{j=1}^{n} x_{kj} = 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),\ x_{kj} \in \{0, 1\}\,. \tag{2.4}$$

3. Formulazione equivalente del problema.

Per caratterizzare una soluzione ottima del problema P, è utile introdurre, accanto ad ogni soluzione ammissibile $\underline{x}$ un vettore booleano n-dimensionale $\underline{z}$ definito da:

$$z_i = \max_k x_{ki} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{3-1}$$

nel quale, pertanto, la generica componente z_i vale 1 se e solo se viene installato il posto di controllo M_i.

Fissata una politica ammissibile $\underline{x}^0$, il vettore $\underline{z}^0$ corrispondente, è univocamente individuato e soddisfa la

$$\sum_{i=1}^{n} z_i^0 \geqslant 1 \tag{3.2}$$

in quanto, per le (2.4), dovrà essere instituito almeno un posto di controllo.

Chiameremo d'ora innanzi « ammissibile » ogni vettore booleano $\underline{z}$ che soddisfa la (3.2).

In generale, invece, se si fissa un vettore booleano ammissibile $\underline{z}$ (cioè stabiliti i posti di controllo da attivare), non resta univocamente individuato il vettore $\underline{x}$, essendo possibile attribuire in modi diversi i punti di lavorazione ai posti di controllo già attivati.

Chiameremo tali politiche «subordinate a $\underline{z}$»; quelle, tra queste, che implicano il minimo valore per la funzione oggetto verranno indicate con $\underline{x}^*(\underline{z})$.

Dimostriamo ora il seguente:

Teorema 1. Fissato il vettore ammissibile $\underline{z}$, una soluzione ottimale subordinata a $\underline{z}$ stesso è caratterizzata dalle seguenti proprietà:

a) $z_i = 1 \Rightarrow x^*_{ii} = 1$;

b) $(z_1 = z_2 = \ldots = z_{k-1} = 0,\ z_k = 1) \Rightarrow (x^*_{1k} = x^*_{2k} = \ldots = x^*_{kk} = 1)$;

c) $(z_h = 1, z_{h+1} = z_{h+2} = \ldots = z_n = 0) \Rightarrow (x^*_{hh} = x^*_{h+1h} = \ldots = x^*_{nh} = 1)$;

d) Se risulta $\begin{cases} z_i = 1\,, \quad z_j = 1 & j = i+2\,, \\ z_h = 0 & i < h < j\,, \end{cases}$

(cioè se in $\underline{z}$ vi è una sequenza di componenti eguali a zero, preceduta e seguita da componenti eguali ad 1) allora:

$$\begin{matrix} x^*_{hi} = 1\,, & x^*_{hj} = 0 & \text{se } c_{hi} < c_{hj} \\ x^*_{hi} = 0\,, & x^*_{hj} = 1 & \text{se } c_{hi} > c_{hj} \end{matrix} \qquad i < h < j\,.$$

Dimostrazione:

a) Evidente, date le ipotesi sui costi.

b) Se nel punto di lavorazione L_k è stato installato il centro di controllo M_k, mentre i precedenti punti di lavorazione ne risultano privi, tali punti si rivolgeranno al posto di controllo M_k, dato che

$$c_{k-ik} < c_{k-i\,k+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k-1)\,.$$

c) Se nel punto di lavorazione L_h è stato installato il centro di controllo M_h, mentre i successivi punti di lavorazione ne risultano privi, tali punti si rivolgeranno al posto di controllo M_h, dato che

$$c_{h+i\,h} < c_{h+i\,h-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-h)\,.$$

d) Se vi è un insieme $\{L_h\}$ di posti di lavorazione adiacenti privi di controllo, preceduti e seguiti da posti con controllo M_i, M_j, ogni elemento di $\{L_h\}$ si rivolgerà per il servizio a quello tra M_i e M_j che comporta il minor costo.

In base, dunque, al teorema 1 resta individuata la (o una) politica ottimale $\underline{x}^*(\underline{z})$ subordinata a $\underline{z}$ stesso.

Indicato con

$$c(\underline{z}) = c(z_1, z_2, \ldots, z_n) \tag{3.3}$$

il costo di utilizzazione dei centri di controllo implicato dalla politica $\underline{x}(\underline{z})$, il problema iniziale (2.3) P diventa il problema P':

$$P': \min_{z\in\Phi} \{c(\underline{z}) = c(z_1, z_2, \ldots, z_n)\}\,, \qquad \Phi = \begin{cases} z_i \in \{0, 1\} \\ \sum_{i=1}^{n} z_i \geq 1\,. \end{cases} \tag{3.4}$$

4. Risoluzione mediante la programmazione dinamica.

Introduciamo ora, accanto al problema P', i problemi $P_1, P_2, \ldots, P_n$, nel generico (i-mo) dei quali P_i si cerca la politica ottima di utilizzazione dei posti di controllo con l'ipotesi che l'ultimo posto installato (nel senso di quello che ha indice maggiore) sia M_i situato nel punto di lavorazione L_i.

La (o una) soluzione del problema globale P' si determina individuando tra le soluzioni dei problemi P_i quella che porge il valore minimo della funzione oggetto.

Indichiamo con

$$\underline{z}^{(i)*} = (z_1^*, z_2^*, \ldots, z_i^*, \ldots, z_n^*) \tag{4.1}$$

una politica ottima per il problema P_i e con

$$g^*(i) = c(\underline{z}^{(i)*}) \tag{4.2}$$

il corrispondente valore ottimo della funzione oggetto.

Per il significato del problema P_i il vettore $\underline{z}^{(i)*}$ avrà la i-ma componente $z_i^* = 1$ e le ultime $n - i$ componenti uguali a zero ($z_{i+1}^* = z_{i+2}^* = \ldots z_n^* = 0$).

Nella risoluzione di P_i basterà pertanto considerare vettori i-dimensionali

$$\underline{z}^*_{(i)} = (z^*_1, z^*_2, \ldots, z^*_i)\,. \tag{4.3}$$

Inoltre, sempre in P_i, poichè in L_i è installato il posto di controllo M_i ed i successivi punti di lavorazione $L_{i+1}, L_{i+2}, \ldots, L_n$ ne risultano privi, tali posti devono rivolgersi necessariamente (teorema 1) al punto di controllo M_i con un costo complessivo

$$S(i) = \sum_{j=i+1}^{n} c_{ji}\,. \tag{4.4}$$

Poniamo per definizione

$$f^*(i) = g^*(i) - S(i) \tag{4.5}$$

ove $f^*(i)$ rappresenta il costo minimo di utilizzazione dei posti di controllo da parte dei primi i punti di lavorazione nell'ipotesi che M_i sia l'ultimo posto di controllo installato.

Vale allora il seguente:

PRINCIPIO DI OTTIMALITÀ. Nel vettore ottimale per il generico problema P_r,

$$\underline{z}^*_{(r)} = (z^*_1, z^*_2, \ldots, z^*_r) \tag{4.6}$$

se risulta $z^*_k = 1$ con $k < r$.

Il vettore k-dimensionale

$$\underline{\tilde{z}}_{(k)} = (\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \ldots, \tilde{z}_k) \tag{4.7}$$

avente le componenti coincidenti con le prime k di $\underline{z}^*_{(r)}$ è ottimale per il problema P_k, cioè risulta

$$\underline{\tilde{z}}_{(k)} = \underline{z}^*_k\,. \tag{4.8}$$

Infatti se $\underline{\tilde{z}}_{(k)}$ non fosse ottimale per P_k, si potrebbero variare le prime $k-1$ coordinate di $\underline{z}^*_{(r)}$ ($z^*_k = 1$ per ipotesi) e, lasciando immutate le ultime $r-k$ ottenere per P_r un costo complessivo minore.

Conseguenza del principio di ottimalità è la:

Relazione ricorrente per f:

$$f^*(k) = \min \left\{ \left(\sum_{i=1}^{k} c_{ik} \right) + d_k; \quad f^*(k-1) + c_{k\,k} + d_k; \right. \tag{4.9}$$

$$\left. \min_{(1 \leqslant i \leqslant k-2)} \left[f^*(i) + c_{k\,k} + d_k + \sum_{j=i+1}^{k-1} \min \left(c_{ji}, c_{jk} \right) \right] \right\} .$$

La (4.9) si giustifica osservando che il costo ottimale nell'ipotesi che vi sia un posto di controllo M_k in L_k e nessuno in $L_{k+1}, L_{k+2}, \dots, L_n$ è il minimo tra:

a) il costo nella ipotesi che M_k sia l'unico controllo attivato;

b) il costo nella ipotesi in cui, oltre ad M_k, è attivato anche M_{k-1} e subordinatamente a ciò, il servizio ai primi $k-1$ posti di lavorazione è attribuito in maniera ottimale;

c) il costo nella ipotesi in cui oltre ad M_k sia attivato un M_i con $1 \leqslant i \leqslant k-2$, e, subordinatamente all'attivazione di M_i, siano serviti in maniera ottimale i posti $L_1, L_2, \dots, L_i$.

In quest'ultimo caso, occorre aggiungere il costo del servizio a tutti i posti compresi tra L_i e L_k, ognuno dei quali si rivolgerà al posto di controllo che implica il costo minore. La (4.9) vale per $k > 2$. Per $k = 2$ non compaiono i costi di tipo *c*); per $k = 1$ non compaiono quelli di tipo *b*) e *c*).

Ottenuto $f^*(k)$ per $k = 1, 2, \dots, n$ ed il vettore $\underline{z}^*_{(k)}$ ottimale per P_k, dalla relazione (4.5) si ricava

$$g^*(k) = f^*(k) + S(k) .$$

Per la soluzione del problema globale P' si dovrà allora cercare

$$\min_{1 \leqslant k \leqslant n} g^*(k) .$$

5. Un esempio.

Supponiamo che lungo una linea di produzione ci siano 4 punti di lavorazione L_1, L_2, L_3, L_4 e 4 possibili posti di controllo M_1, M_2, M_3, M_4.

I costi di utilizzazione da parte degli utenti L_i dei servizi M_j sono raccolti nella seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 10 & 12 & 13 & 14 \\ 12 & 11 & 13 & 14 \\ 13 & 12 & 10 & 11 \\ 15 & 14 & 13 & 12 \end{pmatrix}$$

ed inoltre supponiamo che il costo di installazione dei vari meccanismi di controllo sia costante ed uguale a $d = 3$.

In questo caso le relazioni (4.9) diventano:

$$f^*(1) = c_{11} + d\,.$$

$$f^*(2) = \min\{c_{12} + c_{22} + d;\; f^*(1) + c_{22} + d\}\,.$$

$$\begin{aligned} f^*(3) = \min\{&c_{13} + c_{23} + d;\; f^*(2) + c_{33} + d;\\ &f^*(1) + c_{33} + d + \min(c_{21}, c_{23})\}\,. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^*(4) = \min\{&c_{14} + c_{24} + c_{34} + c_{44} + d;\; f^*(3) + c_{44} + d;\\ &\min[f^*(1) + c_{44} + d + \min(c_{21}, c_{24}) + \min(c_{31}, c_{34});\\ &f^*(2) + c_{44} + d + \min(c_{32}, c_{34})]\}\,. \end{aligned}$$

Pertanto si ha:

$$f^*(1) = 10 + 3 = 13:$$

$$\underline{z}^*_{(1)} = (1)\,, \qquad x^*_{11} = 1; \qquad L_1 \to M_1\,.$$

$$f^*(2) = \min\{12 + 11 + 3;\; 10 + 3 + 11 + 3\} = 26:$$

$$\underline{z}^*_{(2)} = (0, 1)\,, \qquad x^*_{12} = x^*_{22} = 1; \qquad L_1 \to M_1\,, \quad L_2 \to M_2\,.$$

$$f^*(3) = \min\{13+13+10+3; 26+10+3; 13+10+3+\min(12, 13)\} = 38:$$

$$\underline{z}^*_{(3)} = (1, 0, 1)\,, \quad x^*_{11} = x^*_{21} = x^*_{33} = 1; \quad L_1 \to M_1,\; L_2 \to M_1,\; L_3 \to M_3\,.$$

$$\begin{aligned} f^*(4) = \{&\min 14 + 14 + 11 + 12 + 3;\; 38 + 12 + 3;\\ &\min[13 + 12 + 3 + \min(12, 14) + \min(13, 11);\\ &26 + 12 + 3 + \min(12, 11)]\} = 51: \end{aligned}$$

$$\underline{z}^*_{(4)} = (1, 0, 0, 1)\,, \quad x^*_{11} = x^*_{21} = x^*_{34} = x^*_{44} = 1;$$

$$L_1 \to M_1,\; L_2 \to M_1,\; L_3 \to M_4,\; L_4 \to M_4\,.$$

Per i valori di g^* si ha:

$$g^*(1) = f^*(1) + S(1) = f^*(1) + \sum_{j=2}^{4} c_{j1} = 13 + 12 + 13 + 15 = 53 .$$

$$g^*(2) = f^*(2) + S(2) = f^*(2) + \sum_{j=3}^{4} c_{j2} = 26 + 12 + 14 = 52 .$$

$$g^*(3) = f^*(3) + S(3) = f^*(3) + c_{43} = 38 + 13 = 51 .$$

$$g^*(4) = f^*(4) = 51 .$$

Quindi

$$\min_i g^*(i) = \min (53;\ 52;\ 51;\ 51) = 51 .$$

Si vede così che ci sono 2 politiche ottimali:

$\underline{z}^* = (1, 0, 1, 0)$ nella quale sono $x^*_{11} = x^*_{21} = x^*_{33} = 1$,

$\underline{z}^* = (1, 0, 0, 1)$ nella quale sono $x^*_{11} = x^*_{21} = x^*_{34} = x^*_{44} = 1$.

BIBLIOGRAFIA

[1] F. Mason, *Sulla scelta ottimale di semilavorati per la produzione di più articoli*, Quaderni del Laboratorio di Matematica, Università di Venezia, 1979.

[2] O. Bilde, J. Krarup, *Sharp lower bounds and efficient algorithms for the simple plant location problem*, in « Studies in integer programming », Hammer, Johnson, Korte, Nemhauser editori, North-Holland Publishing Company, 1977.

[3] *Nuovi studi e modelli di ricerca operativa* (a cura di M. Volpato), Torino, UTET, 1971.

Manoscritto pervenuto in redazione il 20 novembre 1979 ed in forma revisionata il 29 aprile 1980.