Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Pierantonio Legovini

Catene pronormali nei gruppi finiti supersolubili

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 66 (1982), p. 181-191
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1982__66__181_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 66 (1981)

Catene pronormali nei gruppi finiti supersolubili.

PIERANTONIO LEGOVINI (*)

Un sottogruppo H di un gruppo G si dice *pronormale* in G se H è coniugato ad H^g in $\langle H, H^g \rangle$, per ogni $g \in G$. Alcuni risultati di Peng [5] e di Wood [7] lasciavano intravvedere come i gruppi finiti supersolubili si potessero prestare ad essere caratterizzati in termini dei loro sottogruppi pronormali. Scopo di questo lavoro è precisamente di presentare alcuni teoremi in cui si dimostra l'equivalenza in un gruppo finito tra la supersolubilità e particolari proprietà delle sue catene formate da sottogruppi pronormali. Questi teoremi (2.1, 2.2, 2.3, 2.4 e 2.5) sono l'oggetto del paragrafo 2 di questa nota, mentre il paragrafo 1 è dedicato ad alcuni risultati di carattere più generale, concernenti i sottogruppi pronormali dei gruppi finiti risolubili, alcuni dei quali preliminari ai successivi teoremi.

Le notazioni ed i concetti non definiti sono largamente standard; per *gruppo* si intenderà sempre gruppo *finito*.

1. Cominciamo con un lemma riguardante i gruppi dotati di una torre di Sylow.

1.1. LEMMA. *Sia G un gruppo dotato di una torre di Sylow, e si ponga $G = S_1 S_2 \dots S_n$, con*

$$1 \lhd S_1 \lhd S_1 S_2 \lhd \dots \lhd S_1 S_2 \dots S_n = G \qquad \big(S_i \in \mathrm{Syl}_{p_i}(G)\big) .$$

(*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, Via Belzoni 7, 35100 Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di Ricerca Matematica del C.N.R.

Se V è un sottogruppo di G, che sia pronormale in $S_j S_{j+1} \dots S_n$, allora V è pronormale in G.

DIM. Si ponga $N = S_1 S_2 \dots S_{j-1}$; se $VN \lhd G$, allora V è un sottogruppo di Hall di un sottogruppo normale di un gruppo risolubile, e quindi è pronormale in G. Se invece $N_G(VN) \neq G$, V può essere induttivamente supposto pronormale in $N_G(VN)$, da cui, applicando un risultato di Gaschütz ([7], lemma 2.2), si ottiene V pronormale in G.

In [7], Wood ha dimostrato che i gruppi supersolubili possiedono sottogruppi pronormali di ogni possibile ordine; di questo teorema diamo una nuova dimostrazione, di tipo costruttivo.

1.2. PROPOSIZIONE (Wood). *Sia G un gruppo supersolubile, ed n un divisore dell'ordine di G. Allora G possiede un sottogruppo pronormale d'ordine n.*

DIM. Sia $\{P_1, \dots, P_m\}$ una base di Sylow di G, con $P_i \in \mathrm{Syl}_{p_i}(G)$ e $p_1 > p_2 > \dots > p_m$. Poniamo inoltre $n = p_1^{a_1} \dots p_m^{a_m}$, $a_i \geqslant 0$. Ciascun sottogruppo di Hall del tipo $P_i P_{i+1} \dots P_m$ è supersolubile e quindi P_i certamente contiene un sottogruppo Q_i di ordine $p_i^{a_i}$, con Q_i normale in $P_i P_{i+1} \dots P_m$. Q_i è pronormale in G per 1.1, e per [1], Theorem 2.3, è $Q = Q_1 Q_2 \dots Q_m$ pronormale in G. Inoltre è $|Q| = n$, come richiesto.

OSSERVAZIONE. La proposizione 1.2 non è immediatamente invertibile, in quanto per esempio il gruppo $C_2 \times A_4$, prodotto diretto di un gruppo ciclico d'ordine 2 per il gruppo alterno su 4 oggetti, possiede sottogruppi pronormali di ogni possibile ordine, ma non è supersolubile. Essa verrà in qualche modo invertita dai risultati presentati nel paragrafo 2.

Nel seguito faremo uso frequente del seguente criterio di Mann:

1.3. LEMMA (Mann [4]). *Sia G un gruppo risolubile. Un sottogruppo H di G è pronormale in G se e solo se ogni sistema di Sylow di G è riducibile in esattamente un coniugato di H.*

Usiamo anzitutto il lemma 1.3 per ricavare alcune condizioni sufficienti per la pronormalità e l'anormalità dei sottogruppi nei gruppi risolubili.

1.4. PROPOSIZIONE. *Sia G un gruppo risolubile, ed H un sottogruppo di G soddisfacente le seguenti condizioni:*

(i) *H contiene il normalizzante di ogni sistema di Sylow di G in esso riducibile;*

(ii) *due sistemi di Sylow di* G*, riducibili in* H*, sono coniugati sotto l'azione di* $N_G(H)$.

Allora H *è pronormale in* G.

DIM. Supponiamo falso l'asserto. Allora, per 1.3, esistono un sistema di Sylow di G, $\mathcal{S}$, ed un coniugato H^g di H, distinto da H con $\mathcal{S}$ riducibile in H ed in H^g. Allora $\mathcal{S}^{g^{-1}}$ è riducibile in H, e quindi esiste $x \in N_G(H)$ tale che $\mathcal{S}^{g^{-1}x} = \mathcal{S}$. Così $g^{-1}x \in N_G(\mathcal{S}) \leqslant H$, da cui $g \in N_G(H)$, contraddizione.

1.5. PROPOSIZIONE. *Sia* G *un gruppo risolubile, ed* H *un suo sottogruppo soddisfacente le seguenti condizioni*:

(i) H *contiene il normalizzante di ogni sistema di Sylow di* G *in esso riducibile*;

(ii) *due sistemi di Sylow di* G*, riducibili in* H*, sono coniugati sotto l'azione di* $N_G(H)$;

(iii) *il numero dei sistemi di Sylow di* G *riducibili in* H *è* $|H|/|D|$, *dove* D *è un normalizzante di sistema di* G.

Allora H *è anormale in* G.

DIM. Per 1.4 H è pronormale in G. Basta quindi far vedere che H è autonormalizzante. Per [7], lemma 2.1 *d*), $N_G(H)$ è anormale in G e quindi il numero dei sistemi di Sylow riducibili in $N_G(H)$ è $|N_G(H)|/|D|$ (vedasi [2], Satz VI.15.4 *a*)). Ma per [2], Hilfssatz VI.15.2 *a*), ogni sistema di Sylow di G riducibile in $N_G(H)$, è riducibile anche in H. Ne segue che $|N_G(H)|/|D| \leqslant |H|/|D|$, da cui $N_G(H) = H$.

Rose [6], 1.8, ha dimostrato che se A, B sono sottogruppi pronormali di un gruppo G, con la proprietà che $A \leqslant N_G(B)$, allora AB è anch'esso un sottogruppo pronormale di G. Un esempio di Chambers [1] dimostra l'esistenza di gruppi non risolubili dotati di sottogruppi primari A, B di ordini coprimi, il cui prodotto AB è un sottogruppo non pronormale in G. Però, nello stesso lavoro, Chambers ha mostrato che in un gruppo risolubile G ogni sottogruppo V, i cui sottogruppi di Sylow siano pronormali in G, è necessariamente pronormale in G. Il prossimo lemma generalizza questo risultato (e quello di Rose nel caso risolubile).

1.6. LEMMA. *Sia* G *un gruppo risolubile e* A, B *sottogruppi pronormali di* G*, tali che* $AB = BA$. *Allora* AB *è pronormale in* G.

DIM. Sia $\mathfrak{S}$ un sistema di Sylow di G, e supponiamo che sia riducibile in AB e in un suo coniugato $(AB)^g$. Siano $\mathfrak{S}_{AB}$ ed $\mathfrak{S}_{(AB)^g}$ le riduzioni di $\mathfrak{S}$ in AB e $(AB)^g$ rispettivamente. Poichè A è pronormale in G, sappiamo da 1.3 che $\mathfrak{S}$ è riducibile in esattamente un coniugato di A in G, diciamolo A^x. A è ovviamente pronormale anche in AB, cosicchè $\mathfrak{S}_{AB}$ è riducibile in esattamente un coniugato di A in AB, diciamolo A^b, con $b \in B$. Ma la riducibilità di $\mathfrak{S}_{AB}$ in A^b comporta la riducibilità di $\mathfrak{S}$ in A^b; quindi $A^x = A^b$. Lo stesso ragionamento, applicato a $(AB)^g$ ed a $\mathfrak{S}_{(AB)^g}$, dà $A^x \leqslant (AB)^g$. Per simmetria, scambiando i ruoli di A e B, otteniamo un elemento $a \in A$, tale che $B^a \leqslant AB \cap (AB)^g$. Ora si vede facilmente che $A^b B^a = AB$ e quindi che $AB = (AB)^g$. A questo punto abbiamo ottenuto che ogni sistema di Sylow di G si riduce in esattamente un coniugato di AB in G, e per 1.3 si ha AB pronormale in G.

Le due proposizioni che seguono riguardano invece le intersezioni di sottogruppi pronormali.

1.7. PROPOSIZIONE. *Sia G un gruppo risolubile ed M, N sottogruppi massimali di G di indice primo. Allora $M \cap N$ è pronormale in G.*

DIM. Poniamo $|G:M| = p$, $|G:N| = q$ e $M \cap N = I$. Supponiamo, come primo caso, $p \neq q$. Allora è $|G:I| = pq$ e I è massimale, e quindi pronormale, in ogni sottogruppo proprio di G che lo contenga. Allora, per [7], lemma 2.3, è sufficiente mostrare che $N_G(I)$ contiene un normalizzante di sistema di G. Ora se $N_G(I) \neq I$, $N_G(I)$ è anormale in G, e quindi l'asserto segue dalla nota caratterizzazione di P. Hall dei normalizzanti di sistema quali sottogruppi subanormali minimali. Altrimenti I è autonormalizzante. Ma allora tale dev'essere ogni sottogruppo di G che lo contiene. Applicando un lemma di Taunt ([2], Satz VI.11.17), otteniamo addirittura I anormale in G.

Supponiamo ora $p = q$, e procediamo per induzione su $|G|$, il risultato essendo banale per gruppi di ordine primo. Si supponga $V = I_G \neq 1$. Allora I/V è pronormale in G/V, da cui segue I pronormale in G. Passiamo al caso $I_G = 1$. Sia P un sottogruppo normale minimo di G. Se $C_M(P) = C_N(P) = 1$, M ed N risultano ciclici, e quindi $I = 1$, pronormale in G. Possiamo quindi supporre $P \leqslant M$. Se $T \in \mathrm{Syl}_p(N)$, certamente $T \leqslant C_N(P) \lhd G$ e $T \times P \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Sia Q un sottogruppo normale minimo di G contenuto in T, e sia $S \in \mathrm{Syl}_p(M)$. Ancora $S \leqslant C_M(Q) \lhd G$, ed essendo $C_M(Q) \cap C_N(P) \leqslant I_G = 1$, $S \times T$ è un p-sottogruppo di G, per cui $S = P$ e analogamente $Q = T$. Quindi $PQ \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Allora esisteranno H e K, $S_{p'}$-sottogruppi di M e N rispettivamente, tali che $I = H \cap K$. Se $I = H$, esso è pronormale in G purchè sottogruppo di Hall. Sia dunque $I \neq H$. H opera fedelmente su $P \times Q$, come gruppo di matrici diagonali di $GL(2, p)$. Quindi H è abeliano e $I \lhd \langle H, K \rangle$. Se $\langle H, K \rangle = G$, la conclusione è raggiunta. Se $\langle H, K \rangle \neq G$, detto U il p-sottogruppo di Sylow di $\langle H, K \rangle$, è $I \leqslant C_G(U)$. Sia W un complemento I-invariante di U in PQ. Risulta $WI \lhd G$, e quindi I pronormale in G, in quanto sottogruppo di Hall di un sottogruppo normale.

Una ben nota caratterizzazione di Huppert dei gruppi supersolubili permette di formulare il seguente corollario:

1.8. Corollario. *Sia G un gruppo supersolubile ed M, N sottogruppi massimali di G. Allora $M \cap N$ è pronormale in G.*

Osservazione. Notiamo che 1.7 non vale in generale se si toglie l'ipotesi che i sottogruppi considerati abbiano indice primo. Infatti se in S_4 consideriamo l'intersezione di un 2-sottogruppo di Sylow con uno di ordine 6, otteniamo un sottogruppo d'ordine 2 non pronormale in G. D'altra parte l'intersezione di due sottogruppi pronormali nei gruppi supersolubili non è in generale un sottogruppo pronormale. Si consideri infatti $G = C_9 \operatorname{Aut}(C_9)$, l'olomorfo di un gruppo ciclico d'ordine 9. $\operatorname{Aut}(C_9)$, come sottogruppo di G, è di Carter, e quindi pronormale. Se $S \in \operatorname{Syl}_3(G)$, $I = S \cap \operatorname{Aut}(C_9) \in \operatorname{Syl}_3(\operatorname{Aut}(C_9))$. Se I fosse pronormale in G, lo sarebbe anche in S, dunque sarebbe normale in S e centralizzerebbe C_9, assurdo.

1.9. Proposizione. *Sia G un gruppo dotato di una torre di Sylow, $S \in \operatorname{Syl}_p(G)$, e H, K sottogruppi pronormali di G contenuti in S. Allora $H \cap K$ è pronormale in G.*

Dim. Sia $1 \lhd S_1 \lhd S_1 S_2 \lhd \ldots \lhd S_1 S_2 \ldots S_n = G$ una torre di Sylow di G, sia $S = S_i$. Allora H, K sono normali in $S_i S_{i+1} \ldots S_n$, e quindi $H \cap K \lhd S_i S_{i+1} \ldots S_n$. La conclusione segue dal lemma 1.1.

Osservazione. L'ipotesi che G abbia una torre di Sylow non può essere eliminata da 1.9. Infatti se si considerano, in un 2-sottogruppo di Sylow di S_4, due sottogruppi distinti d'ordine 4, la loro intersezione risulta non pronormale in S_4.

Esponiamo ora il risultato principale di questo paragrafo.

1.10. Lemma. *Sia G un gruppo supersolubile, e sia $|G| = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_n^{a_n}$, con $p_1 > p_2 > \ldots > p_n$, H e K sottogruppi pronormali di G tali che $H \underset{\neq}{<} H \leqslant G$ con $|H| = p_1^{h_1} p_2^{h_2} \ldots p_n^{h_n}$ e $|K| = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_n^{k_n}$; sia inoltre i il minimo indice per cui si abbia $h_i < k_i$.*

Allora esiste un sottogruppo pronormale R di G, di ordine $p_1^{k_1}p_2^{k_2}\dots$ $p_{i-1}^{k_{i-1}}p_i^{k_i-1}p_{i+1}^{k_{i+1}}\dots p_n^{k_n}$, tale che $H \leqslant R \underset{\neq}{<} K$.

Dim. Poniamo $m = \sum_{i=1}^{n}(k_j - h_j)$ e procediamo per induzione su m. Se $m = 1$, allora si conclude ponendo $R = H$. Si supponga ora vera l'affermazione fino ad $m - 1$, e sia G un controesempio di ordine minimo per il caso m. Sia inoltre $\{G_1, G_2, \dots, G_n\}$ un sistema di Sylow di G, riducibile in H e in K, e siano $H_j = H \cap G_j$, $K_j = K \cap G_j$ $(j = 1, 2, \dots, n)$. Supponiamo che esista un sottogruppo pronormale U di G tale che $H \underset{\neq}{<} U \underset{\neq}{<} K$, U di ordine $p_1^{u_1}p_2^{u_2}\dots p_n^{u_n}$ con $u_i < k_i$. Allora da $H \neq U$ segue $\sum_{j=1}^{n}(k_j - u_j) < m$, ed allora esiste un sottogruppo R, quale richiesto dal teorema, compreso fra U e K, e quindi fra H e K. Quindi per ogni sottogruppo pronormale U di G, con $H \underset{\neq}{<} U \underset{\neq}{<} K$, è $|U|_{p_i} = |K|_{p_i}$. Supponiamo ora $i > 1$. Allora $G_iG_{i+1}\dots G_n$ è un sottogruppo proprio di G. Per [5], lemma 2, $H_iH_{i+1}\dots H_n$ e $K_iK_{i+1}\dots K_n$ sono sottogruppi pronormali di $G_iG_{i+1}\dots G_n$. Quindi esiste un sottogruppo pronormale S di $G_iG_{i+1}\dots G_n$, con

$$H_iH_{i+1}\dots H_n \leqslant S \underset{\neq}{<} K_iK_{i+}\dots K_n \quad \text{e} \quad S = p_i^{k_i-1}p_{i+1}^{k_{i+1}}\dots p_n^{k_n}\,.$$

Per 1.1 S è pronormale in G ed S normalizza

$$K_1K_2\dots K_{i-1} = H_1H_2\dots H_{i-1}\,.$$

Allora $RH = RH_1H_2\dots H_{i-1}$ ed è, per 1.6, pronormale in G, contraddizione. Ne segue che $i = 1$. Sia N un sottogruppo normale minimo di G, con $|N| = p_1$. Allora $N \nleqslant H_1$, altrimenti giungeremmo ad un assurdo, ragionando su G/N. Supponiamo ora $|K_1 : H_1| = p_1$ e supponiamo che esista un sottogruppo normale minimo B di G, con $p_j = |B| \neq p_1$. Di nuovo $B \nleqslant H_j$. Se $B \leqslant K_j$, sarebbe $H \leqslant HB \underset{\neq}{<} K$, con $|HB|_{p_1} < |K|_{p_1}$, impossibile. Allora $B \cap K_j = 1$. In G/B il teorema vale, e troviamo un sottogruppo C tale che $HB \leqslant C \underset{\neq}{<} KB$ con $C_1 = H_1$ e $C_2C_3\dots C_n = K_2K_3\dots K_nB$. Ne segue che H_1 sarebbe normalizzato da $K_2K_3\dots K_n$, che è un sottogruppo pronormale di G. Allora $HK_2K_3\dots$ $\dots K_n = H_1K_2K_3\dots K_n$ sarebbe pronormale in G, con $|HK_2K_3\dots H_n|_{p_1} = |H|_{p_1} < |K|_{p_1}$, assurdo. Se invece $O_{p'}(G) = 1$, risulta $G_2G_3\dots G_n$ abeliano. Allora $H_1 \lhd K$, altrimenti esisterebbe un $x \in K$, tale che $H^x \neq H$.

Ma allora per [3], Proposizione 1.1, H non sarebbe pronormale in G.

Ne segue che $k_1 - h_1 \geqslant 2$. Allora $N \nleqslant K_1$, altrimenti $H \lneqq NH \lneqq K$, con NH pronormale e $|HN_{p_1}| < |K|_{p_1}$, assurdo. Ragionando in G/N, troviamo che esiste un sottogruppo L pronormale in G e tale che $HN \lneqq L \lneqq KN$, e $|KN:L| = p_1$. Sia $J = L \cap K$. Allora $L = NJ$, e quindi $J_1 = L \cap K_1$ ha indice primo in K_1. Affermiamo che J è pronormale in G. Se così non fosse, per 1.3 esisterebbero un coniugato J^g di J, distinto da J, e un sistema di Sylow $S = \{G_1, \dots, G_n\}$ riducibile in entrambi J e J^g. Ma S risulta anche riducibile in L e in L^g, e quindi deve essere $L = L^g$, in quanto L è pronormale in G. Allora si ha che (per $j = 2, 3, \dots, n$) $G_j \cap J = G_j \cap L = G_j \cap L^g = G_j \cap J^g$ e quindi, posto $L_j = G_j \cap L$ $(j = 1, 2, \dots, n)$, è $(L_2 L_3 \dots L_n)^g = (L_2 L_3 \dots L_n) = K_2 K_3 \dots K_n$. Allora $g \in N_G(K_2 K_3 \dots K_n) J^g$ e quindi per [3], Proposizione 1.1, g normalizza K. Allora $J_1^g \leqslant K_1^g = K_1$. Da $J_1 \neq J_1^g$ segue $K_1 = \langle J_1, J_1^g \rangle = L_1$, e quindi $N \leqslant L \leqslant K_1$, contraddizione. Dunque J è pronormale in G. Ma $|J|_{p_1} < |K|_{p_1}$. Quest'ultima contraddizione è risolutiva.

2. Come preannunciato, questo paragrafo è dedicato ad alcune caratterizzazioni dei gruppi supersolubili.

2.1. PROPOSIZIONE. *Un gruppo G è supersolubile se e solo se per ogni immagine omomorfa $\bar{G}$ di G ed ogni divisore n dell'ordine di $\bar{G}$, esiste un sottogruppo pronormale di $\bar{G}$ di ordine n.*

DIM. La necessità è facile conseguenza di 1.2. Dimostriamo la sufficienza per induzione su $|G|$. Per un ben noto teorema di P. Hall, G è risolubile. Sia $p \in \pi(G)$, tale che $O_p(G) \neq 1$. Se anche $O_{p'}(G) \neq 1$, la conclusione è banale. Sia allora $O_{p'}(G) = 1$ e H un sottogruppo pronormale di ordine p. Basta mostrare che H è normale in G. Se fosse $H \nleqslant O_p(G)$, H sarebbe contemporaneamente subnormale e pronormale, e quindi normale ([7], lemma 2.1 *e*)) nel p-gruppo $HO_p(G)$. Allora $H \leqslant C_G(O_p(G)) \leqslant O_p(G)$, assurdo. Segue $H \leqslant O_p(G)$; ma allora H è anche subnormale in G, quindi normale.

OSSERVAZIONE. La condizione della proposizione 2.1 non può essere migliorata col richiedere che solo le immagini omomorfe proprie posseggano sottogruppi pronormali d'ogni possibile ordine, come si può vedere per esempio nel gruppo S_4.

DEFINIZIONE. Diremo che una catena

$$H_0 \supset H_1 \supset \dots \supset H_n$$

di sottogruppi di un gruppo G è *pronormale* (*anormale*) in G se ciascun H_i è pronormale (anormale) *in* G $(i = 0, 1, \dots, n)$. Diremo inoltre che la catena è *ad indici primi* (rispett. *ad indici non descrescenti*) se $|H_i : H_{i+1}|$ è un numero primo, per $i = 0, 1, \dots, n-1$ (rispett. se $|H_0 : H_1| \leqslant \dots \leqslant \leqslant |H_{n-1} : H_n|$). Infine la $H_0 \supset \dots \supset H_n$ si dirà *pronormale massimale* (rispett. *anormale massimale*) se non è ulteriormente raffinabile mediante l'inserimento di sottogruppi pronormali (rispett. anormali) di G.

2.2. PROPOSIZIONE. *Un gruppo G è supersolubile se e solo se possiede una catena pronormale*

$$G = H_0 \supset \dots \supset H_n = 1$$

ad indici primi non decrescenti.

DIM. La necessità è ovvia. Dimostriamo la sufficienza, procedendo per induzione su $|G|$. H_1 è quindi supersolubile e $|H_1 : H_2| = \min \pi(H_1)$. Si supponga H_1 privo di cuore. Allora G ha una rappresentazione fedele dentro il gruppo simmetrico $S_{|H_0:H_1|}$, per ipotesi $|H_0 : H_1| \leqslant |H_{n-1} : H_n|$ e $|H_{n-1} : H_n|$ dividerà l'ordine di $S_{|H_0:H_1|}$, quindi $|H_0 : H_1| = |H_1 : H_2| = \dots = |H_{n-1} : H_n| = q$ è un numero primo, G è un q-gruppo, in particolare è supersolubile. Se invece H_1 contiene un sottogruppo V normale in G, è G/V supersolubile, e per questioni di indice, è H_1 normale in G. Sia N un sottogruppo normale minimo di G contenuto in H_1 e supponiamo per assurdo che $|N| = p^a$, $a > 1$. Sia i l'indice per cui $H_{i-1} \supseteq N$, mentre $H_i \not\supseteq N$. Allora H_{i-1} è normale in G, e $|N : N \cap H_i| = p$, per cui $N \cap H_i \neq 1$. Per la minimalità di N, esiste un $x \in G$ per cui $H_i^x \cap N \neq \neq H_i \cap N$. Per la pronormalità di H_i, esiste un $y \in \langle H_i, H_i^x \rangle \leqslant H_{i-1}$, tale che $H_{i-1}^y = H_{i-1}^x$. Poichè $H_i \cap N$ è normale in $\langle H_i, N \rangle = H_{i-1}$, si ha $H_{i-1}^x \cap N = H_{i-1}^y \cap N = (H_{i-1} \cap N)^y = H_{i-1} \cap N$ una contraddizione. Quindi $|N| = p$, e G è supersolubile.

OSSERVAZIONE. L'ipotesi di pronormalità della catena nella proposizione precedente non è sopprimibile. Infatti il gruppo

$$\langle x, y, z \mid x^3 = y^3 = z^4 = 1,\ [x, y] = 1,\ [x, z] = x^{-1}y,\ [y, z] = x^{-1}y^{-1} \rangle$$

non è supersolubile e possiede una catena ad indici primi non decrescenti. D'altra parte, in generale, l'esistenza di una catena massimale e pronormale non assicura la supersolubilità di un gruppo, neanche se tale catena ha la lunghezza massima possibile. Per esempio il gruppo

$$\langle x, y, z, w | x^5 = y^5 = z^3 = w^2 = 1,\ [x, y] = 1,\ [x, z] = x^{-1}y,$$
$$[y, z] = x^4y^3,\ [x, w] = y,\ [y, w] = y^3,\ [z, w] = z\rangle$$

ha la catena pronormale ad indici primi

$$\langle x, y, z, w\rangle \supset \langle x, y, w\rangle \supset \langle y, w\rangle \supset \langle w\rangle \supset 1\ ,$$

ma non è supersolubile. Vale tuttavia la seguente

2.3. PROPOSIZIONE. *Un gruppo metanilpotente G è supersolubile se e solo se possiede una catena*

$$G = H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_n = 1$$

pronormale ad indici primi.

DIM. La necessità è ovvia. Proviamo la sufficienza per induzione sull'ordine di G. Le ipotesi si ereditano alle immagini omomorfe di G, e quindi non è restrittivo supporre che G abbia un solo sottogruppo normale minimo N. Supponiamo per assurdo $|N| = p^a$, con $a > 1$. Allora $H_1 \supseteq N$. Per la supersolubilità di H_1, N possiede un sottogruppo M, di ordine p, con M normale in H_1. Poichè $N \leqslant Z(F(G))$, è $[M, F(G)] = 1$, e quindi $F(G) \subseteq H_1$. Ma allora H_1 è normale in G, e lo stesso ragionamento impiegato nella proposizione precedente ci permette di concludere.

2.4. TEOREMA. *Un gruppo G è supersolubile se e solo se ogni catena pronormale di G è raffinabile ad una catena pronormale che sia anche una catena massimale di G.*

DIM. Necessità: segue immediatamente dal lemma 1.10.

Sufficienza. La condizione si eredita alle immagini omomorfe, e quindi se G è un controesempio di ordine minimo, G ha un solo sottogruppo normale minimo N, con N di ordine non primo. Supponiamo N non abeliano e sia S un 2-sottogruppo di Sylow di N. La catena pronormale $G \supset N \supset S \supset 1$ è raffinabile ad una catena pronormale che è una catena massimale di G. Allora G possiede un sottogruppo pronormale T di ordine 2, contenuto in N. Dunque T è pronormale in N. Per lo Z^*-teorema di Glauberman $T \subseteq Z(N/O(N)) = 1$, una contraddizione. Ne segue che N è abeliano elementare. Ancora, sia R un sottogruppo di N, d'ordine primo, pronormale in G. R è così pronormale e subnormale in G, quindi normale. Allora $N = R$, e N ha ordine primo. Questa contraddizione dimostra il teorema.

OSSERVAZIONE. Il teorema 2.4 potrebbe anche essere riformulato come segue: *Un gruppo G è supersolubile se e solo se le catene pronormali massimali, aventi come estremi due sottogruppi pronormali $A \leqslant B$ di G, hanno tutte la stessa lunghezza, e tale lunghezza coincide con la massima lunghezza di una catena nell'intervallo $[B/A]$ del reticolo dei sottogruppi di G.* A questo punto si potrebbe sperare che la supersolubilità di un gruppo G venga assicurata dall'avere tutte le catene pronormali massimali la stessa lunghezza, senza che questa sia la massima possibile. Ma il gruppo alterno A_5 mostra come questa condizione non assicuri la risolubilità di G, mentre il gruppo simmetrico S_4 mostra come non venga garantita neanche la supersolubilità tra i gruppi risolubili.

Funziona però una condizione di questo genere, imposta ai sottogruppi anormali:

2.5. PROPOSIZIONE. *Sia G un gruppo risolubile, D un suo normalizzante di sistema e sia $|G:D| = p_1^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_n^{a_n}$. G è supersolubile se e solo se tutte le catene anormali massimali hanno la stessa lunghezza $l = \sum_{i=1}^{n} a_i$.*

DIM. La necessità è ovvia, se si ricorda che in un gruppo metanilpotente un sottogruppo è anormale se e solo se contiene un normalizzante di sistema ([2], Sätze VI.11.21 e VI.13.7 *a*)). Sufficienza. Sia G un minimo controesempio. La condizione si eredita alle immagini omomorfe (si applichi [2], Satz VI.11.3), e quindi $\Phi(G) = 1$ e G ha un solo sottogruppo normale minimo, L; Sia M un sottogruppo massimale di G che complementi L; allora $|G:M| = p^a$, $a > 1$, e quindi M non può essere anormale. Allora M è normale di G, e quindi $L \subseteq M$, assurdo.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. A. CHAMBERS, *p-normally embedded subgroups of finite soluble groups*, J. Alg., **16** (1970), pp. 442-455.

[2] B. HUPPERT, *Endliche Gruppen I*, Springer-Verlag (1967).

[3] P. Legovini, *Gruppi finiti i cui sottogruppi sono o subnormali o pronormali*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **58** (1977), pp. 129-147.
[4] A. Mann, *A criterion for pronormality*, J. London Math. Soc., **44** (1969), pp. 175-176.
[5] T. A. Peng, *Finite groups with pronormal subgroups*, Proc. Am. Math. Soc., **20** (1969), pp. 232-234.
[6] J. S. Rose, *Finite soluble groups with pronormal system normalizers*, Proc. London Math. Soc., (3) **17** (1967), pp. 447-469.
[7] G. J. Wood, *On pronormal subgroups of finite soluble groups*, Arch. Math., **25** (1974), pp. 578-585.

Manoscritto pervenuto in redazione il 28 novembre 1980.