

# RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIULIANO BRATTI

## **Problema di Cauchy semiglobale in due variabili**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*,  
tome 69 (1983), p. 169-179

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1983\\_\\_69\\_\\_169\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1983__69__169_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

## Problema di Cauchy semiglobale in due variabili.

GIULIANO BRATTI (\*)

**0.** In  $R^2$  la variabile sia  $(x, y)$ .  $P = P(D_x, D_y)$  sia un operatore differenziale lineare a coefficienti costanti.

Se  $N = (\alpha, \beta)$  è un vettore non nullo di  $R^2$ , indicherò con  $H$  il semipiano di  $R^2$  definito dalla disequazione:  $\alpha x + \beta y \leq 0$ ; e con  $G(H)$  il sottospazio di  $C^\infty(R^2)$  definito da:  $f$  sta in  $G(H)$  se e solo se la sua restrizione su  $H$ ,  $f|_H$ , è nulla.

Dal punto di vista dell'Analisi Funzionale, la risolubilità univoca del problema di Cauchy per  $P$ , con dati nel complementare chiuso di  $H$ , è equivalente alla richiesta che

$$P: G(H) \rightarrow G(H)$$

sia un automorfismo topologico, ovvero che  $P$  sia iperbolico rispetto ad  $N$ , come si può dedurre da (3): teoremi 5.4.1 e 5.6.4.

In questo lavoro, mi propongo di indagare su di un problema analogo a quello di Cauchy, e lo chiamerò: « *Problema di Cauchy semiglobale* », (la risolubilità del quale è tra l'altro connessa alla risolubilità di certi sistemi differenziali sovradeterminati del tipo:  $Pu = f$ ,  $Qu = 0$ ), relativo alla caratterizzazione di quegli operatori  $P$  per i quali per « abbastanza » aperti  $B$  di  $R^2$  si possa avere

$$P(G(B)) = G(B)$$

dove, ormai è naturale,  $G(B) = (f \in C^\infty(R^2): f|_B = 0)$ .

(\*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico dell'Università, Via Belzoni 7, I-35100 Padova.

Nel seguito: il paragrafo uno sarà dedicato alle notazioni ed a qualche richiamo; nel due, oltre che a riportare alcuni teoremi dell'Analisi Funzionale interessanti questo lavoro, saranno sviluppati i preliminari per la dimostrazione del risultato principale qui contenuto

**TEOREMA.** *Le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

- a) per ogni aperto  $B$  di  $R^2$ , convesso e limitato, si ha:  $P(G(B)) = G(B)$ ;
- b) per ogni aperto  $B$  di  $R^2$ ,  $P$ -convesso e limitato, si ha:  $P(G(B)) = G(B)$ ;
- c)  $P$  è iperbolico rispetto ad ogni vettore di  $R^2$  non caratteristico.

La dimostrazione di questo teorema sarà svolta nel paragrafo tre.

**1.** In  $R^n$  la variabile sia  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Se  $A$  è un aperto di  $R^n$ , per brevità porrò:

$$C_c^\infty(A) = D(A) \quad \text{e} \quad C^\infty(A) = E(A),$$

con le usuali topologie;  $D'(A)$  ed  $E'(A)$  saranno i duali (forti) rispettivi.

Se  $P = P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a^\alpha D^\alpha$  è un operatore differenziale lineare, a coefficienti costanti, indicherò con

$${}^tP = {}^tP(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} a^\alpha D^\alpha$$

il trasposto di  $P$ .

**DEFINIZIONE 1.**  $A$  è  $P$ -convesso se e solo se  ${}^tP(E'(A))$  è chiuso in  $E'(A)$ .

La  $P$ -convessità di  $A$  è condizione necessaria e sufficiente al fine d'avere

$$P(E(A)) = E(A)$$

(visto che  ${}^tP: E'(A) \rightarrow E'(A)$  è sempre iniettiva); essa si caratterizza bene, (3), pag. 90, per gli aperti di  $R^2$ : se  $A$  è un aperto di  $R^2$ ,  $A$  è  $P$ -convesso se e solo se ogni linea caratteristica di  $P$  interseca  $A$  in un connesso.

Se  $(A, B)$  è una coppia di aperti di  $R^n$ , tale che la chiusura di  $B$ ,  $B^-$ , è contenuta in  $A$ , porrò

$$G_A(B) = (f \in E(A): f|_B = 0); \quad e: \text{Ker } P|_A = (f \in E(A): Pf = 0).$$

Poichè  $E(A)$  è uno spazio di Fréchet-Schwartz (brevemente: è un  $FS$ -spazio), anche  $G_A(A)$  e  $\text{Ker } P/A$ , con le topologie dedotte da  $E(A)$ , ed  $E(A)/(\text{Ker } P/A) \cap G_A(B)$ , con la topologia quoziente, sono  $FS$ -spazi [2], pagg. 332 e segg.

Infine: la definizione, e le proprietà degli operatori  $P$  che son iperbolici rispetto a qualche vettore di  $R^n$ , sono quelle elencate nel capitolo V di [3]; ai fini di questo lavoro, particolare interesse avranno i teoremi 5.3.3 e 5.6.3 di quel capitolo.

**2.** Oltre al teorema di Hahn-Banach (prolungamento continuo dei funzionali), farò uso, nel seguito, dei seguenti teoremi:

A)  $E$  ed  $F$  sian due spazi di Fréchet; se  $f: E \rightarrow F$  è lineare e continua, allora  $f$  è suriettiva se e solo se la sua trasposta  ${}^t f: F' \rightarrow E'$  è iniettiva ed ha immagine chiusa;

B)  $E$  ed  $F$  sian due spazi vettoriali topologici, localmente convessi; se sono spazi di Fréchet, o duali forti di spazi di Fréchet, allora: se  $f: E \rightarrow F$  è lineare, continua e suriettiva,  $f$  è aperta;

C)  $(E_t, t \in A, \geq, Q_{ts}, t \geq s)$  sia un sistema induttivo di spazi vettoriali topologici localmente convessi e di Hausdorff;  $Q_{ts}: E_s \rightarrow E_t$  sia lineare e continua;  $F_t$  sia il duale topologico di  $E_t$ .

Se si pone  $P_{st}: F_t \rightarrow F_s$  definita da

$$(x_s, P_{st}(y_t)) = (Q_{ts}(x_s), y_t)$$

si ha

1)  $(F_t, t \in A, \geq, P_{st}, t \geq s)$  è un sistema proiettivo;

2) il duale topologico del limite induttivo  $\lim (E_t)$ , dotato della topologia limite induttivo, è il limite proiettivo  $\lim (F_t)$ , (5), pag. 150;

D) Se  $E$  ed  $F$  sono spazi vettoriali topologici, duali forti di  $FS$ -spazi; e se  $f: E \rightarrow F$  è lineare e continua, allora  $f(E)$  è chiuso in  $F$  se e solo se lo è per successioni.

Indicherò con  $G'_A(B)$  il duale forte di  $G_A(B)$ .

LEMMA 1.  $G'_A(B)$  è isomorfo ed omeomorfo a  $E'(A)/E'(B^-)$ , quest'ultimo spazio dotato della topologia quoziente.

DIMOSTRAZIONE.  $\psi: E'(A)/E'(B^-) \rightarrow G'_A(B)$  sia l'applicazione lineare definita da

$$\psi(\bar{\mu}) = \nu$$

se  $\nu \in \bar{\mu} = \mu + E'(B^-)$ .

$\psi$  è un isomorfismo suriettivo, visto che  $G'_A(B)$  ha la topologia dedotta da  $E(A)$ ; dimostrerò, ora, che  $\psi$  è continua.

$\bar{\mu}_j$  sia una rete convergente a zero in  $E'(A)/E'(B^-)$ ; se  $V$  è un intorno di zero in  $G'_A(B)$ ,  $V$  è del tipo

$$V = V(L, \delta) = \{\mu \in E'(A) : |\mu(L)| \leq \delta\}$$

dove  $L$  è limitato in  $G'_A(B)$  ed  $\delta$  è in  $R_+$  (reali positivi).

$V$  è intorno di zero anche in  $E'(A)$ , poichè  $L$  è limitato anche in  $E(A)$ ; visto che la proiezione canonica  $\pi: E'(A) \rightarrow E'(A)/E'(B^-)$ ,  $\pi(V) = V + E'(B^-)$ , è aperta,  $\pi(V)$  è intorno di zero in  $E'(A)/E'(B^-)$ ; allora: esiste  $j_0$  tale che se  $j \geq j_0$  si ha

$$\bar{\mu}_j \in V + E'(B^-)$$

e quindi:  $\mu_j = \varrho_j + \sigma_j$ , con  $\varrho_j \in V$  e  $\sigma_j \in E'(B^-)$ . Ciò dimostra che la  $\psi$  è continua.

L'applicazione lineare e continua

$$\psi \circ \pi: E'(A) \rightarrow G'_A(B)$$

è suriettiva fra duali forti di spazi di Fréchet che son riflessivi; in base al teorema B) citato di sopra,  $\psi \circ \pi$  risulta aperta, così che la stessa  $\psi$  è aperta.

La dimostrazione è conclusa.

Determinato il duale forte di  $G'_A(B)$ , il teorema A) fornisce immediatamente il

**TEOREMA 1.** *Le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

- a)  $P(G'_A(B)) = G'_A(B)$ ;
- b) se  $\mu$  sta in  $E'(A)$  e se  $\text{supp}({}^tP\mu) \subset B^-$ , anche  $\text{supp}(\mu) \subset B^-$ ; ed inoltre:  ${}^tP(E'(A)) + E'(B^-)$  è chiuso in  $E'(A)$ .

**DIMOSTRAZIONE.**

a) implica b).

Poichè  ${}^tP: E'(A)/E'(B^-) \rightarrow E'(A)/E'(B^-)$  definita da

$${}^tP(\mu + E'(B^-)) = {}^tP(\mu) + E'(B^-)$$

deve essere iniettiva, si ha:

se  $\mu$  sta in  $E'(A)$  e se  ${}^tP(\mu)$  è in  $E'(B^-)$ , allora  ${}^tP(\mu + E'(B^-)) = {}^tP(\mu) + E'(B^-)$  è lo zero di  $E'(A)/E'(B^-)$ ; dunque  $\mu + E'(B^-)$  deve esser lo zero di  $E'(A)/E'(B^-)$ , ovvero  $\text{supp}(\mu) \subset B^-$ .

${}^tP(\mu_j) + \nu_j$  sia una rete in  $E'(A)$  convergente debolmente a  $q$  in  $E'(A)$ . In  $E'(A)/E'(B^-)$  si ha:

$$\lim_j {}^tP(\bar{\mu}_j) = \lim_j ({}^tP(\mu_j))^- = \bar{q}$$

e quindi

$$\bar{q} = ({}^tP(\mu))^-$$

per qualche  $\mu$  in  $E'(A)$ .

b) implica a).

La prima parte della proposizione b) implica che  ${}^tP$  è iniettiva.

${}^tP(\bar{\mu}_j)$  sia una rete convergente a  $\bar{q}$  in  $E'(A)/E'(B^-)$ ; dimostrerò che  $q$  sta in  $E'(A) + E'(B^-)$ ; dopo di che la dimostrazione è conclusa.

Infatti: poichè  ${}^tP(E'(A)) + E'(B^-)$  è chiuso in  $E'(A)$ , se  $q$  non appartenesse a quello spazio, in base al teorema di Hahn-Banach esisterebbe  $f$  in  $E(A)$  tale che

$$(a) \quad q(f) \neq 0; \quad e: Pf = 0 \quad e \quad f/B = 0.$$

$$(a) \text{ è assurda, poichè } q(f) = \lim_j ({}^tP(\mu_j)(f)) = 0.$$

La dimostrazione è conclusa.

**OSSERVAZIONI.**

A) Si supporrà sempre che  $A$  sia connesso; è immediato allora verificare che la condizione  $P(G_A(B)) = G_A(B)$  esclude che  $P$  possa esser ellittico.

B) Se  $P(G_A(B)) = G_A(B)$ , e se  $B$  è limitato, usando lo stesso ragionamento di [3], teorema 3.5.4, pag. 81, è facile dimostrare che  $A$  deve esser  $P$ -convesso.

C) Nel caso in cui  $(A, B) \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ , la condizione  $P(G_A(B)) = G_A(B)$  mostra che  $B$  « vicino » all'esser  $P$ -convesso, senza esserlo certamente come dimostra il facile esempio seguente

sia  $P = D_x$ ; sia  $A = \mathbb{R}^2$  e  $B = ((x, y) \in \mathbb{R}^2: |x| < 1 \text{ e } |y| < 1) \sim ((0, y): y \geq 0)$ . Si ha, ovviamente

$$P(G^{\mathbb{R}^2}(B)) = G^{\mathbb{R}^2}(B),$$

e  $B$  non è  $D_x$ -convesso.

D) Se  $(A, B)$  sono aperti di  $\mathbb{R}^2$ , si può dimostrare che: la condizione  $P(G_A(B)) = G_A(B)$  implica che: se  $r$  è una retta caratteristica di  $P$ ; se  $(\xi_1, \xi_2) \subset r \cap (B \sim \xi_3)$ , e se  $\xi_3 \in (\xi_1, \xi_2) \cap (R^2 \sim B)$ , allora  $\xi_3$  sta sulla frontiera di  $B$ .

E) Se  $P = P(D_x, D_y)$  non è ellittico, e se  $B \subset \mathbb{R}^2$  è  $P$ -convesso, allora vale per  $P$  e  $B$  la prima parte della proposizione b) del teorema 1: la verifica è immediata.

**3.**  $P = P(D_x, D_y)$  sia un operatore differenziale lineare, in due variabili, a coefficienti costanti.

Se  $B$  è un aperto di  $\mathbb{R}^2$ , per brevità porrò

$$G_{\mathbb{R}^2}(B) = G(B).$$

**TEOREMA 2.** *Le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

- a) per ogni aperto  $B$  di  $\mathbb{R}^2$ , limitato e convesso, si ha:  $P(G(B)) = G(B)$ ;
- b) per ogni aperto  $B$  di  $\mathbb{R}^2$ , limitato e  $P$ -convesso, si ha:  $P(G(B)) = G(B)$ ;
- c)  $P$  è iperbolico rispetto ad ogni vettore di  $\mathbb{R}^2$  non caratteristico.

**DIMOSTRAZIONE.**

a) implica c).

In base all'osservazione A del paragrafo due,  $P$  non può esser ellittico. Sia  $N'$  un vettore caratteristico di  $P$ , e sia  $N$  un vettore non caratteristico di  $P$ ; si può supporre direttamente che sia  $N = (0, 1)$ ,

e che  $P$  abbia solo  $N'$  come vettore caratteristico: negli altri casi la dimostrazione è una leggera variante di questa.

Dimostrerò che: se  $H$  è il semipiano di  $R^2$  dei punti con ordinata non positiva, allora l'ipotesi  $P(G(B)) = G(B)$ , per ogni  $B$  di  $R^2$ , aperto limitato e convesso, implica che

$$P(G(H)) = G(H)$$

dopo di che l'iperbolicità di  $P$  rispetto al vettore  $(0, 1)$  è conseguenza della dimostrazione del teorema 5.4.1 di [3].

Sia  $B_n$  il parallelogramma con lati paralleli all'asse  $x$ , ed ortogonali al vettore  $N'$ , di vertici  $(-n, 0)$ ,  $(n, 0)$  ecc., contenuto in  $H$ . Posto

$$L_n = (G(B_n) \cap \text{Ker } P); \quad \text{e: } M_n = E(R^2)/L_n$$

e posto

$$j_{n+1}: M_{n+1} \rightarrow M_n$$

definita da  $j_{n+1}(f + L_{n+1}) = f + L_n$ , il sistema  $(M_n, j_n, n \in N)$  è un sistema (di  $FS$ -spazi) proiettivo.

Posto

$$M = \varprojlim (M_n) \subset \Pi_n(M_n)$$

$M$  limite proiettivo algebrico, si considerino le

$$\pi_n: M \rightarrow M_n$$

e si ponga su  $M$  la topologia limite proiettivo definita dagli  $M_n$  dalle  $\pi_n$ . È facile verificare che con tale topologia,  $M$  risulta un sotto-spazio chiuso del prodotto  $\Pi_n(M_n)$ . Dimostrerò, ora, che l'applicazione lineare

$$j: E(R^2) \rightarrow M$$

definita da  $j(f) = (f + L_n)$  è un isomorfismo ed un omeomorfismo (suriiettivo). Risulterà quindi, che anche la trasposta  ${}^tj$  della  $j$

$${}^tj: (\varprojlim (M_n))' \rightarrow E'(R^2)$$



è un isomorfismo ed un omeomorfismo; e poichè:  $M_n$  è un  $FS$ -spazio;  ${}^iP(E'(R^2)) + E'(B_n^-)$  è il suo duale, in base a  $C$ ) del paragrafo due, si avrà

$$\begin{aligned} {}^i j(M)' &= {}^i j(\varinjlim (M'_n)) = \bigcup_n ({}^i P(E'(R^2)) + E'(B_n^-)) = \\ &= {}^i P(E'(R^2)) + E'(H) = E'(R^2). \end{aligned}$$

In definitiva: poichè  $H$  è convesso, se  $\mu \in E'(R^2)$  e  $\text{supp } ({}^i P(\mu)) \subset H$ , anche  $\text{supp } (\mu)$  è contenuto in  $H$ ;  ${}^i P(E'(R^2)) + E'(H)$  è chiuso in  $E'(R^2)$ , sicchè  $P(G(H)) = G(H)$ , ovvero  $P$  è iperbolico rispetto a  $(0, 1)$ .

A) Che  $j$  sia continua segue dal fatto che  $\pi_n \circ j: E(R^2) \rightarrow M_n$  è la proiezione canonica.

B) Che  $j$  sia iniettiva dipende dal fatto che la frontiera di  $H$  non è caratteristica. Infatti: se  $j(f) = 0$ , si ha

$$f \in L_n, \quad n \in N; \quad \text{ovvero: } Pf = 0 \quad \text{e} \quad f \in G(B_n), \quad n \in N;$$

in base al corollario 5.3.1 di (3), segue che  $f = 0$ .

C)  $j$  è suriettiva. Infatti: se  $((f_n + L_n)) \in \varprojlim (M_n)$ , in base alla definizione di limite proiettivo risulta

$$f_{n+1} = f_1 + g_1 + \dots + g_n$$

con  $g_i \in L_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Poichè  $g_i$  è nulla su  $B_i$  e  $P(g_i) = 0$  su  $R^2$ , in base al teorema 5.3.3 di [3],  $g_i$  risulta nulla su tutta la striscia  $S_i$  generata dal parallelogramma  $B_i$  (dalle rette ortogonali a  $N'$  e passanti per il segmento  $[-n, n]$ ). Allora la funzione  $f \in E(R^2)$  definita da

$$f = f_i$$

nella striscia  $S_i$  risolve l'equazione  $j(f) = ((f_n + L_n))$ .

Basta dimostrare, ora, che  $c$ ) implica  $b$ ) per concludere, visto che ogni convesso è  $P$ -convesso.

$c$ ) implica  $b$ ).

Poichè  $B$  è  $P$ -convesso, in base al teorema 1 ed all'osservazione  $D$ ) del paragrafo due, per dimostrare la  $b$ ) basterà dimostrare, in base al

teorema *D*) del paragrafo due, che  ${}^tP(E'(R^2)) + E'(B^-)$  è chiuso per successioni in  $E'(R^2)$  <sup>(1)</sup>.

A) Se  $\lim {}^tP(\mu_n) + \nu_n = q$  in  $E'(R^2)$ , per  $n$  abbastanza grande si ha  $\text{supp} ({}^tP(\mu_n) + \nu_n) \subset K$ , con  $K$  intorno limitato del supporto di  $q$ ; per la  $P$ -convessità di  $R^2$ , si può supporre che  $\text{supp} (\mu_n) \subset K'$ , con  $K'$  aperto e limitato.

B)  $p$  sia un punto della frontiera di  $B$ :  $p \in \partial B$ . Per ogni  $p \in \partial B$ , esiste un cono aperto e convesso,  $\Gamma_p$ , con vertice in  $(0, 0)$ , tale che:

- i)  $p + \Gamma_p \cap B = \emptyset$ ;
- ii) esiste  $E_p \in D'(R^2)$  tale che

$$PE_p = \delta_p; \quad \text{e} \quad \text{supp} (E_p) \subset \Gamma_p^-,$$

in base a [3], teorema 5.6.1.

Si ha:  $\bigcup (\Gamma_p, p \in \partial B) = R^2/B^-$ ; inoltre: se  $\varphi \in D(p + \Gamma_p)$ , poichè  $\text{supp} (E_p * \varphi)$  è contenuto in  $(p + \Gamma_p)$ , risulta

$$\lim_n \langle \mu_n \cdot \varphi \rangle = \lim_n \langle \mu_n \cdot P(E_p * \varphi) \rangle = \lim_n \langle {}^tP(\mu_n) + \nu_n \cdot E_p \rangle = \langle q \cdot E_p \rangle;$$

in base a (8), teorema XIII, esiste  $\lambda_p$  in  $D'(p + \Gamma_p)$  tale che

$$\lim_n \mu_n = \lambda_p$$

in  $D'(p + \Gamma_p)$ .

Si osservi che: in base ad A) di sopra, si ha:  $\text{supp} (\lambda_p) \subset (p + \Gamma_p) \cap K'$ ; ed inoltre: se  $p' \in \partial B$ , e se, con le notazioni di sopra, si ha

$$\lim_n \mu_n = \lambda_{p'}$$

in  $D'(p' + \Gamma_{p'})$ , allora non appena  $Z = (p + \Gamma_p) \cap (p' + \Gamma_{p'}) \neq \emptyset$ , le

<sup>(1)</sup> Il teorema D) si applica così:  ${}^tP(E'(R^2)) + E'(B^-)$  è l'immagine, in  $E'(R^2)$ , dell'applicazione lineare e continua

$$({}^tP, i): E'(R^2) \times E'(B^-) \rightarrow E'(R^2), \quad ({}^tP, i)(\mu, \nu) = {}^tP(\mu) + \nu.$$

Gli spazi indicati sono duali forti di  $FS$ -spazi ( $E'(B^-)$  è chiuso in  $E'(R^2)$ , ed è, quindi, il duale di  $E(R^2)/\mathcal{G}(B)$ ).

restrizioni di  $\lambda_p$  e di  $\lambda_{p'}$  su  $D(Z)$  coincidono. In base al « Principio di incollamento » [8], pag. 27, esiste  $\lambda$  in  $D'(R^2/B^-)$  tale che:  $\lim_n \mu_n = \lambda$ . Indicata con  $q_1$  la restrizione di  $q$  su  $D(R^2/B^-)$ , si può scrivere, allora

$$q_1 = {}^tP(\lambda)$$

con  $\text{supp}(\lambda)$  contenuto in  $R^2/B^- \cap K'$ .

Se si dimostra che esiste  $\lambda_0$  in  $E'(R^2)$  tale che  $\lambda = \lambda_0/(R^2/B^-)$ , la dimostrazione è conclusa.

$(\varphi_n)$  sia una successione in  $D(R^2/B^-)$  convergente a zero nella topologia indotta da  $G(B)$ .  $\Gamma_{x_1}, \dots, \Gamma_{x_n}$  siano  $n$  coni tali che

$$(R^2/B^-) \cap K' \subset \bigcup (\Gamma_{x_i});$$

se  $\alpha_i$  sta in  $D(\Gamma_{x_i})$ , e se  $\sum_i \alpha_i = 1$ , si ha

$$\lim_n \langle \lambda \cdot \varphi_n \rangle = \lim_n \left( \sum_i \langle \lambda_{x_i} \cdot \alpha_i \varphi_n \rangle \right);$$

poichè  $\lambda_{x_i}$  è continua su  $D(Z)$ , dove  $Z = (p_i + \Gamma_{x_i}) \cap \text{supp}(\alpha_i)$ , con la topologia indotta da  $G(B)$ , risulta  $\lim_n \langle \lambda \cdot \varphi_n \rangle = 0$  <sup>(2)</sup>.

La dimostrazione è conclusa.

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] A. ANDREOTTI - M. NACINOVICH, *Analytic convexity*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Cl. di Sc., Serie IV, 7, no. 2 (1980).
- [2] A. GROTENDIECK, *Espaces vectoriels topologiques*, Publ. de Soc. de Mathématique de São Paulo, 1958.
- [3] L. HÖRMANDER, *Linear partial differential operators*, Springer-Verlag, 1969.
- [4] L. HÖRMANDER, *On the characteristic Cauchy problem*, Ann. Math. (1968).
- [5] J. L. KELLEY - I. NAMIOKA and co-authors, *Linear topological spaces*, D. Van Nostrand Comp., 1963.

(2) La chiusura di  $D(p + \Gamma_x)$  in  $G(B)$  è un *FS*-spazio; e la successione  $(\mu_n)$  è limitata nel duale di quella chiusura.

- [6] B. MALGRANGE, *Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolutions*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **6** (1955-56).
- [7] A. MARTINEAU, *Sur les fonctionelles analytiques et la transformation de Fourier-Borel*, Journ. An. Math. Jérusalem (1963).
- [8] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, Hermann, 1966.

Manoscritto pervenuto in redazione l'8 ottobre 1981.