RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GABRIELE H. GRECO

Operatori di tipo *G* su reticoli completi

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 72 (1984), p. 277-288

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1984__72__277_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 72 (1984)

Operatori di tipo G su reticoli completi.

GABRIELE H. GRECO (*)

Rispondendo ad una domanda posta da E. De Giorgi, in questo articolo si dimostra che due G-operatori che coincidono sulle funzioni a valori in $\{0, 1\}$ sono pure uguali su ogni funzione a valori in un qualsiasi reticolo completamente distributivo. Questa condizione di completa distributività è anche necessaria affinchè valga questo teorema.

Questo teorema, come pure gli altri presenti in questo articolo, poggiano su un teorema di decomposizione (di G-operatori in limitoidi) e sulle proprietà dei limitoidi.

Ricordiamo anzitutto la definizione di $G(A, \mathfrak{L})$-operatore, introdotta in [1] da E. De Giorgi.

Con A si indica un insieme qualsiasi; mentre $\mathfrak{L}$ è una famiglia arbitraria di reticoli completi. Per ogni $L \in \mathfrak{L}$ il simbolo adm (A, L) denota l'insieme di tutte le funzioni f tali che il loro dominio $\operatorname{dom} f \subset A$ e il loro insieme dei valori $\operatorname{im} f \subset L$. Allora la definizione di G-operatore, data da E. De Giorgi, è la seguente. Un $G(A, \mathfrak{L})$-*operatore* è un operatore g con le seguenti quattro proprietà:

(i) $\operatorname{dom} g = \{(f, L): L \in \mathfrak{L},\ f \in \operatorname{adm}(A, L)\}$ *e* $g(f, L) \in \operatorname{adm}(A, L)$ *per ogni* $(f, L) \in \operatorname{dom} g$,

(ii) $\forall L_1, L_2 \in \mathfrak{L},\ \forall f_1 \in \operatorname{adm}(A, L_1),\ \forall f_2 \in \operatorname{adm}(A, L_2)$

$$\operatorname{dom} f_1 \subset \operatorname{dom} f_2 \Rightarrow \operatorname{dom} g(f_1, L_1) \subset \operatorname{dom} g(f_2, L_2)\,,$$

$$\operatorname{dom} f_1 = \emptyset \Rightarrow \operatorname{dom} g(f_1, L_1) = \emptyset\,,$$

(*) Indirizzo dell'A.: Dipartimento di Matematica, Università di Trento, 38050 Povo (Trento), Italia.

(iii) $\forall L \in \mathfrak{L},\ \forall f_1, f_2 \in \operatorname{adm}(A, L)$

$$\operatorname{dom} f_1 = \operatorname{dom} f_2,\ f_1 \leqslant_L f_2 \Rightarrow g(f_1, L) \leqslant_L g(g_2, L)\ ,$$

(iv) $\forall L_1, L_2 \in \mathfrak{L}, \forall \psi$ *omomorfismo completo di* L_1 *in* $L_2, \forall f \in$

$$\in \operatorname{adm}(A, L_1)\ \ \psi \circ g(f, L_1) = g(\psi \circ f, L_2).$$

I Γ-limiti, i G-operatori elementari (vedi [1], [2]) e quelli ottenuti da questi per composizione sono tutti G_λ-operatori.

Un $G(A, \mathfrak{L})$-operatore g è detto $G_\lambda(A, \mathfrak{L})$*-operatore* se vale

$$(\lambda) \qquad L \in \mathfrak{L}, f \in \operatorname{adm}(A, L) \Rightarrow \operatorname{im} g(f, L) \subset \overline{\operatorname{im} f}^L$$

dove « $\overline{\operatorname{im} f}^L$ » è il più piccolo sottoreticolo chiuso di L contenente « $\operatorname{im} f$ ».

Nulla si sa, a mio avviso, sull'esistenza di operatori di tipo G che non siano operatori di tipo G_λ. Però sotto particolari condizioni concernenti $\mathfrak{L}$ (vedi teorema 1.1), ogni $G(A, \mathfrak{L})$-operatore è un $G_\lambda(A, \mathfrak{L})$-operatore. In questi casi vale un teorema di scomposizione di un G-operatore in limitoidi. Ciò è di grande importanza in questa nota, perchè rende possibile trasferire proprietà dei limitoidi ai G-operatori. In questo modo si può dimostrare il teorema presentato all'inizio ed altri teoremi sulla rappresentazione, sulla univocità dell'estensione e sulla semicontinuità di un G-operatore.

Ricordiamo la definizione di limitoide, introdotta in [3]. Sia X un insieme non vuoto ed L un reticolo completo. Un *limitoide* è un funzionale $T\colon L^X \to L$ verificante le proprietà:

$(L.1)\quad f_1, f_2 \in L^X,\ f_1 \leqslant_L f_2 \Rightarrow T(f_1) \leqslant_L T(f_2)$

$(L.2)\quad T(\psi \circ f) = \psi(T(f))\ \forall f \in L^X$ *e* $\forall \psi$ *omomorfismo completo di* L *in* L

$(L.3)\quad T(f) \in \overline{f(X)}^L\ \forall f \in L^X.$

Gli esempi più semplici di limitoidi sono dati dalle nozioni di limite inferiore e limite superiore, presentate in [4] nell'ambito delle funzioni numeriche.

Se f è una funzione da X in L ed $\mathfrak{B}$ è una famiglia *non degenere* di sottoinsiemi di X (cioè $\mathfrak{B}$ non è vuota e non contiene l'insieme vuoto), allora si definisce il *limite inferiore* e, dualmente, il *limite superiore di f* *lungo* $\mathcal{B}$ nel seguente modo:

$$\liminf_{\mathcal{B}} f = \bigvee_{B\in\mathcal{B}} \bigwedge_{x\in B} f(x) \qquad e \qquad \limsup_{\mathcal{B}} f = \bigwedge_{B\in\mathcal{B}} \bigvee_{x\in B} f(x) .$$

Più in generale ogni funzione polinomiale di reticolo è un limitoide; in altre parole, ogni funzionale T che opera sulle funzioni tramite un numero finito di $\bigwedge$ e $\bigvee$ è un limitoide. Quindi i Γ-limiti, ibridi o no, di funzioni numeriche o di multifunzioni (vedi [2]) sono limitoidi.

Il teorema di rappresentazione dei limitoidi è in sostanza la « chiave » delle idee (teoremi e loro dimostrazioni) presenti in questa nota.

Teorema di rappresentazione dei limitoidi (vedi [3]). *Sia L un reticolo completamente distributivo e $T: L^X \to X$ un limitoide. Allora esistono due famiglie $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ non degeneri di sottoinsiemi di X tali che*

$$T(f) = \liminf_{\mathcal{B}} f = \limsup_{\mathcal{A}} f \qquad \forall f \in L^X .$$

1. Su alcune proprietà dei G-operatori.

Ricordiamo anzitutto alcune definizioni e proprietà dei reticoli.

Con **2** si denoterà il reticolo composto da due elementi distinti: il massimo 1 ed il minimo 0. Con i simboli 0_L e 1_L si indicheranno rispettivamente il minimo ed il massimo elemento di un reticolo completo L. Un sottoinsieme L' di un reticolo completo L si dice *sottoreticolo chiuso* di L (si scriverà $L' \lhd L$) se per ogni sottoinsieme B non vuoto di L' gli elementi $\bigvee B$ e $\bigwedge B$, calcolati in L, appartengono a L'. Il più piccolo sottoreticolo chiuso di L contenente un suo sottoinsieme C, si indicherà con $\bar{C}^L$. È evidente che un sottoreticolo chiuso è un reticolo completo rispetto all'ordine indotto. Un'applicazione $\psi: L_1 \to L_2$ fra due reticoli completi L_1, L_2 si dice *omomorfismo completo* se per ogni sottoinsieme B non vuoto di L_1 risulta $\psi(\bigwedge B) = \bigwedge \psi(B)$ e $\psi(\bigvee B) = \bigvee \psi(B)$.

Un reticolo *completamente distributivo è un reticolo completo L verificante le proprietà* [5]:

$$(D.1) \qquad \bigvee_{i\in I} \bigwedge_{j\in A_i} f(i, j) = \bigwedge_{\varphi\in\Phi} \bigvee_{i\in I} f(i, \varphi(i))$$

$$(D.2) \qquad \bigwedge_{i\in I} \bigvee_{j\in A_i} f(i, j) = \bigvee_{\varphi\in\Phi} \bigwedge_{i\in I} f(i, \varphi(i))$$

per ogni famiglia $\{A_i\}_{i\in I}$ non vuota di insiemi non vuoti e per ogni funzione f, definita su $\{(i,j): i\in I,\ j\in A_i\}$, a valori in L; Φ è l'insieme di tutte le funzioni φ con dominio I e tali che $\varphi(i)\in A_i$ per $i\in I$.

Sono reticoli completamente distributivi la retta estesa $\overline{\mathbf{R}}$ e, più in generale, le catene complete e i sottoreticoli chiusi di prodotti diretti di catene complete [5].

L'insieme $\mathfrak{P}(X)$ delle parti di un insieme X è, quindi, un reticolo completamente distributivo. È noto che ogni reticolo *booleano e completamente distributivo* è isomorfo a $\mathfrak{P}(X)$ per qualche X [5].

Ogni reticolo completamente distributivo è brouweriano e dualmente brouweriano. Si ricorda che un reticolo completo L è *brouweriano* se e solo se per ogni $c\in L$ l'applicazione ψ_c di L in L, definita $\psi_c(x) = c\wedge x$, è un omomorfismo completo [5].

Le proprietà dei $G(A, \mathfrak{L})$-operatori sono strettamente connesse con la ricchezza di $\mathfrak{L}$. Nel seguito la famiglia di reticoli $\mathfrak{L}$ sarà soggetta a verificare qualcuna delle seguenti condizioni:

($\mathfrak{L}$.1) $\mathbf{2}\in\mathfrak{L}$ *ed ogni* $L\in\mathfrak{L}$ *è un reticolo completamente distributivo*

($\mathfrak{L}$.1′) *ogni* $L\in\mathfrak{L}$ *è o isomorfo alla retta estesa* $\overline{\mathbf{R}}$ *o un reticolo booleano completamente distributivo o un reticolo distributivo finito*

($\mathfrak{L}$.2) *ogni* $L\in\mathfrak{L}$ *è un reticolo completamente distributivo*

($\mathfrak{L}$.3) *ogni* $L\in\mathfrak{L}$ *è brouweriano e dualmente brouweriano*

($\mathfrak{L}$.4) $L\in\mathfrak{L},\ L'\lhd L \Rightarrow L'\in\mathfrak{L}$.

Queste condizioni sono legate tra di loro dalle seguenti implicazioni.

$$\begin{array}{ccccc} (\mathfrak{L}.1) & \searrow & & & \\ & & (\mathfrak{L}.2) & \Rightarrow & (\mathfrak{L}.3) \\ (\mathfrak{L}.1') & \nearrow & & & \end{array}$$

TEOREMA 1.1. *Sia* $\mathfrak{L}$ *una famiglia di reticoli verificante una delle tre condizioni*: ($\mathfrak{L}$.1), ($\mathfrak{L}$.1′), ($\mathfrak{L}$.4). *Allora ogni* $G(A, \mathfrak{L})$*-operatore è un* $G_\lambda(A, \mathfrak{L})$*-operatore.*

TEOREMA 1.2. *Se* $\mathfrak{L}$ *verifica* ($\mathfrak{L}$.2), *allora ogni* $G(A, \mathfrak{L})$*-operatore* g

tale che

(λ') $\forall L \in \mathfrak{L}$, $\forall f \in \operatorname{adm}(A, L)$

$$\operatorname{im} f \subset \{0_L, 1_L\} \Rightarrow \operatorname{im} g(f, L) \subset \{0_L, 1_L\}\,,$$

è un $G_\lambda(A, \mathfrak{L})$*-operatore.*

TEOREMA 1.3. *Se* $\mathfrak{L}$ *verifica* ($\mathfrak{L}$.2), *allora un* $G(A, \mathfrak{L})$*-operatore* g *verifica:*

($*$) $\forall L \in \mathfrak{L}$, $\forall f_1, f_2 \in \operatorname{adm}(A, L)$, $\forall c \in L$

$$f_1 \leqslant_L f_2 \Rightarrow g\big((f_1 \vee c) \wedge f_2, L\big) = \big(g(f_1, L) \vee c\big) \wedge g(f_2, L)\,.$$

TEOREMA 1.4. *Se* $\mathfrak{L}$ *verifica* ($\mathfrak{L}$.3), *allora ogni* $G(A, \mathfrak{L})$*-operatore* g *soddisfa:*

(iv″) $\forall L \in \mathfrak{L}$, $\forall f \in \operatorname{adm}(A, L)$, $\forall c \in L$

$$g(f, L) \wedge c = g(f \wedge c, L) \quad \text{e } g(f, L) \vee c = g(f \vee c, L)\,.$$

Questi teoremi permettono di definire in maniera diversa, ma equivalente, gli operatori di tipo G. Ricordiamo che un operatore g è detto $G'(A, \mathfrak{L})$*-operatore*, se verifica (i), (ii), (iii) e

(iv′) $\forall L \in \mathfrak{L}$, $\forall f \in \operatorname{adm}(A, L)$, $\forall c \in L$

$$f = c \Rightarrow g(f, L) = c\,.$$

PROPOSIZIONE 1.5. *Sia* $\mathfrak{L}$ *una famiglia di reticoli completi con la proprietà* ($\mathfrak{L}$.1) *o con la* ($\mathfrak{L}$.1′). *Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(1.1) g *è un* $G(A, \mathfrak{L})$*-operatore*

(1.2) g *verifica* (i), (ii), (iii), (iv″) *e* (λ')

(1.3) g *verifica* (i), (ii), (iv′), (λ') *e* ($*$)

(1.4) g *è un* $G_\lambda(A, \mathfrak{L})$*-operatore.*

OSSERVAZIONE 1.6. A proposito del teorema 1.4, l'ipotesi ($\mathfrak{L}$.3) è essenziale. Infatti se ($\mathfrak{L}$.3) non valesse, si potrebbe facilmente determinare un insieme A in modo che esista un $G(A, \mathfrak{L})$-operatore senza la (iv″). ∎

OSSERVAZIONE 1.7. Operatori con le proprietà (i), (ii), (∗), detti *fuzzy integrali*, sono facilmente descrivibili tramite funzioni d'insieme monotone, qualora sia verificata ($\mathfrak{L}$.2) (vedi [6]). Questi abbracciano la nozione già nota di fuzzy integrale di una funzione numerica. Alcuni fuzzy integrali sono ottenibili a partire da un $G(A, \mathfrak{L})$-operatore g nel seguente modo. Si scelga una funzione $f_L \in \operatorname{adm}(A, L)$, una per ogni $L \in \mathfrak{L}$. Allora l'operatore g_0, definito da $g_0(f, L) = g(f \wedge f_L, L)$ per ogni $(f, L) \in \operatorname{dom} g$, verifica (i), (ii), (iii), (∗), ma, in generale, non soddisfa (iv). Infine si osserva che mediante i fuzzy integrali si può verificare l'indipendenza della proprietà (λ') dalle (i), (ii), (iii), (iv″) (vedi (1.2) della proposizione precedente). ∎

2. Teorema di scomposizione di un G-operatore in limitoidi.

Sia g un $G'(A, \mathfrak{L})$-operatore. Allora in virtù di (ii), esiste una funzione $\gamma_g\colon \mathfrak{P}(A) \to \mathfrak{P}(A)$, detta *funzione leader* di g, tale che

(2.1) $\operatorname{dom} g(f, L) = \gamma_g(\operatorname{dom} f) \;\; \forall (f, L) \in \operatorname{dom} g.$

Poichè in opportune ipotesi, viste nel paragrafo precedente, un operatore di tipo G è un operatore di tipo G_λ, dalla definizione di limitoide segue il

TEOREMA DI SCOMPOSIZIONE. *Sia g un $G(A, \mathfrak{L})$-operatore e sia $\mathfrak{L}$ una famiglia di reticoli verificante almeno una delle tre proprietà*: ($\mathfrak{L}$.1), ($\mathfrak{L}$.1′), ($\mathfrak{L}$.4). *Allora per ogni $X \subset A$, per ogni $y \in \gamma_g(X)$ e per ogni $L \in \mathfrak{L}$ il funzionale $g_{X,L,y}\colon L^X \to L$ definito da*

$$g_{X,L,y}(f) = g(f, L)(y) \tag{2.2}$$

è un limitoide.

OSSERVAZIONE 2.1. L'insieme $G'(A, \mathfrak{L}, \gamma)$ dei $G'(A, \mathfrak{L})$-operatori, aventi una stessa funzione leader γ, si atteggia in maniera naturale ad insieme ordinato. Più dettagliatamente rispetto alla relazione d'ordine « $g_1 \leqslant g_2$ », definita da « $g_1(f, L) \leqslant_L g_2(f, L)$ per ogni $(f, L) \in \in \operatorname{dom} g_1$ », l'insieme $G'(A, \mathfrak{L}, \gamma)$ è un reticolo completo. Inoltre risulta che

$$G_\lambda(A, \mathfrak{L}, \gamma) \lhd G(A, \mathfrak{L}, \gamma) \lhd G'(A, \mathfrak{L}, \gamma) .$$

Se ogni $L \in \mathfrak{L}$ è completamente distributivo, allora ognuno di questi tre reticoli di operatori è completamente distributivo; e, viceversa, se uno dei tre è completamente distributivo, anche ogni $L \in \mathfrak{L}$ lo è.

Se $\mathfrak{L}$ è una famiglia autoduale (cioè per ogni $L \in \mathfrak{L}$ esiste un reticolo $L' \in \mathfrak{L}$ antiisomorfo ad L), allora $G_\lambda(A, \mathfrak{L}, \gamma)$ e $G(A, \mathfrak{L}, \gamma)$ sono autoduali. Più precisamente per ogni operatore $g \in G(A, \mathfrak{L}, \gamma)$ (oppure, $\in G_\lambda(A, \mathfrak{L}, \gamma)$) esiste un unico operatore $g^d \in G(A, \mathfrak{L}, \gamma)$ (oppure $\in G_\lambda(A, \mathfrak{L}, \gamma)$), detto *il duale* di g, tale che

(2.3) $\forall L, L' \in \mathfrak{L}$, $\forall \varphi$ *antiomomorfismo completo di* L *in* L', $\forall f \in \in \operatorname{adm}(A, L)$ $g(\varphi \circ f, L') = \varphi \circ g^d(f, L)$;

ed inoltre questa applicazione che associa ad ogni operatore g il suo duale g^d è un'involuzione, cioè $g^{dd} = g$, $\left(\bigwedge_i g_i\right)^d = \bigvee_i g_i^d$, $\left(\bigvee_i g_i\right)^d = \bigwedge_i g_i^d$. ■

3. Teoremi di univocità e di rappresentazione di un G-operatore.

In risposta ad un quesito del prof. E. De Giorgi si ha il seguente

TEOREMA 3.1. *Sia* $\mathfrak{L}$ *una famiglia di reticoli verificante* ($\mathfrak{L}$.1). *Per ogni coppia* g_1, g_2 *di* $G(A, \mathfrak{L})$*-operatori*

(3.1) *se* $g_1(f, \mathbf{2}) = g_2(f, \mathbf{2})$ *per ogni* $f \in \operatorname{adm}(A, \mathbf{2})$, *allora* $g_1 = g_2$.

Da questo teorema segue

TEOREMA DI RAPPRESENTAZIONE. *Sia* $\mathfrak{L}$ *una famiglia di reticoli verificante* ($\mathfrak{L}$.1) *e sia* g *un* $G(A, \mathfrak{L})$*-operatore. Allora per ogni* $X \subset A$ *ed* $y \in \gamma_0(X)$ *esiste una famiglia non degenere* $\mathcal{M}_X(y)$ *di sottoinsiemi di* X *tale che:*

(3.2) $L \in \mathfrak{L}$, $f \in \operatorname{adm}(A, L)$, $\operatorname{dom} f = X \Rightarrow g(f, L)(y) = L\text{-}\operatorname{liminf}_{\mathcal{M}_X(y)} f$

dove con « L-liminf » *si intende che il limite inferiore è calcolato in* L.

OSSERVAZIONE 3.2. L'ipotesi di completa distributività, presente nel teorema 3.1 è essenziale per la validità di tale teorema. Nel senso che, se $\mathfrak{L}$ contenesse un reticolo L_0 che non sia completamente distributivo, per ogni insieme A_0 con cardinalità maggiore di quella di L_0 esisterebbero due $G(A_0, \mathfrak{L})$-operatori g_1, g_2 per i quali la (3.1) non vale. ■

OSSERVAZIONE 3.3. Il teorema 3.1 e quello di rappresentazione continuano a valere, mutatis mutandis, nel caso che la condizione ($\mathfrak{L}$.1) si sostituisca con la ($\mathfrak{L}$.1'). Questo in un certo senso giustifica il fatto che in una prima formulazione del teorema di rappresentazione dei limitoidi di funzioni numeriche (vedi [4]), non è richiesto che i limitoidi in gioco verifichino la (L.3). ■

OSSERVAZIONE 3.4. Il teorema 3.1 si può interpretare come un teorema sull'univocità dell'estensione di un $G(A, \{\mathbf{2}\})$-operatore. In altre parole se g_0 è un $G(A, \{\mathbf{2}\})$-operatore ed $\mathfrak{L}$ contiene $\mathbf{2}$, esiste almeno un $G(A, \mathfrak{L})$-operatore che estende g_0. Quindi indicati con g_0^- e g_0^+, rispettivamente, il più piccolo e il più grande $G(A, \mathfrak{L})$-operatore fra quelli che estendono g_0 (questi due operatori sono nel reticolo completo $G(A, \mathfrak{L}, \gamma_{g_0})$; vedi osservazione 2.1), il teorema 3.1 dice che le estensioni g_0^-, g_0^+ coincidono sulle coppie (f, L) per ogni reticolo L che sia completamente distributivo; mentre l'osservazione 3.2 afferma che le suddette estensioni di g_0 possono non coincidere quando L fallisce d'essere completamente distributivo. Osserviamo che proprio il poter esplicitare gli operatori g_0^-, g_0^+, nel caso che valga ($\mathfrak{L}$.3), chiarisce la necessità della completa distributività per la validità del teorema 3.1. ■

Un raffinamento del teorema 3.1 nasce dalla soluzione di questo problema: « Fissati $\mathbf{H} \subset \operatorname{adm}(A, \mathbf{2})$, $\mathfrak{L}$ con la proprietà ($\mathfrak{L}$.1) ed $L \in \mathfrak{L}$, determinare le funzioni $f \in \operatorname{adm}(A, L)$ tali che

(3.3) *per ogni coppia g_1, g_2 di $G(A, \mathfrak{L})$-operatori*

$$g_{1|\mathbf{H}} = g_{2|\mathbf{H}} \Rightarrow g_1(f, L) = g_2(f, L) .$$

TEOREMA 3.5. *Sia $\mathfrak{L}$ con la proprietà* ($\mathfrak{L}$.1). *Allora vale la* (3.3) *se e solo se* (f, L) *è* $\mathbf{H}$-*misurabile.*

Per ogni $X \subset A$, si ponga

$$\mathbf{H}_X = \{\{x \in X\colon h(x) = 1\}\colon h \in \mathbf{H} \text{ e } X = \operatorname{dom} h\} \cup \{\emptyset, X\}\,.$$

Una coppia (f, L), dove $f \in \operatorname{adm}(A, L)$, è detta **H**-*misurabile* se e solo se

$$(3.4) \quad \forall a, b \in L \text{ con } a \not\leqslant b,\ \exists H \in \mathbf{H}_{\operatorname{dom} f} \text{ tale che } \{f \geqslant a\} \subset H \subset \{f \not\leqslant b\}\,.$$

Questa nozione di misurabilità rispetto ad una famiglia di insiemi è studiata in [7] nell'ambito delle funzioni a valori in un reticolo completo. Alcune proprietà viste in [7] possono servire a dimostrare il teorema precedente.

4. Semicontinuità dei G-operatori.

Su ogni reticolo completo la topologia, che ha come prebase di chiusi la famiglia degli intervalli chiusi, è compatta (vedi *interval topology* in [5]). D'altro canto se il reticolo è completamente distributivo, questa topologia è di Hausdorff. Quindi su ogni reticolo completamente distributivo L esiste un'unica uniformità U_L che induce l'interval topology.

Ora sia $\{f_j\}_{j\in J}$ una famiglia di funzioni definite su un insieme X e a valori in un reticolo L completamente distributivo; e siano f un'altra funzione da X in L ed $\mathcal{F}$ un filtro su J. Si dirà che $\{(f_j, L)\}_j$ *converge uniformemente verso* (f, L) (*lungo il filtro* $\mathcal{F}$), se $\{f_j\}_j$ converge uniformemente verso f rispetto a U_L (lungo $\mathcal{F}$).

TEOREMA DI CONTINUITÀ. *Sia* $\mathfrak{L}$ *una famiglia di reticoli verificante una delle due proprietà*: $(\mathfrak{L}.1)$, $(\mathfrak{L}.1')$; *e sia* g *un* $G(A, \mathfrak{L})$*-operatore. Se* $L \in \mathfrak{L}$, $f \in \operatorname{adm}(A, L)$, $\{f_j\}_{j\in J} \subset \operatorname{adm}(A, L)$, $\mathcal{F}$ *è un filtro su* J, e $\operatorname{dom} f = \operatorname{dom} f_j$ *per ogni* j, *allora*:

$$(4.1) \quad \{(f_j, L)\}_j \text{ converge unifor. a } (f, L) \Rightarrow g(f, L) = \lim_{j,\mathcal{F}} g(f_j, L)$$

dove il «$\lim\limits_{j,\mathcal{F}}$» *è effettuato rispetto alll'interval topology.*

Questo teorema dipende dalla seguente caratterizzazione della convergenza uniforme. Si è dimostrato in [8] che $\{f_j\}_j \subset L^X$ converge uniformemente verso f (lungo $\mathcal{F}$) rispetto a U_L se e solo se valgono:

(4.2) $\bigwedge f(B) \leqslant \liminf_{j,\mathcal{F}} \bigwedge f_j(B)$ $\forall B \subset X$ (*subconvergenza uniforme*)

(4.3) $\bigvee f(B) \geqslant \limsup_{j,\mathcal{F}} \bigvee f_j(B)$ $\forall B \subset X$ (*superconvergenza uniforme*) .

Osservazione 4.1. Nelle stesse ipotesi del teorema precedente valgono

(4.4) $\{(f_j, L)\}_j$ *subconverge unifor. a* $(f, L) \Rightarrow g(f, L) \leqslant \liminf_{j,\mathcal{F}} g(f_j, L)$

(4.5) $\{(f_j, L)\}_j$ *superconverge unifor. a* $(f, L) \Rightarrow g(f, L) \geqslant$
$\geqslant \limsup_{j,\mathcal{F}} g(f_j, L)$. ■

5. Un teorema di isomorfismo fra $G(A, \mathbf{2})$-operatori e $G(A, \mathfrak{L})$-operatori.

L'insieme $G(A, \mathfrak{L})$ di tutti i $G(A, \mathfrak{L})$-operatori è un insieme parzialmente ordinato dalla relazione d'ordine « $\leqslant$ », definita da « $g_1 \leqslant g_2$ se e solo se $\forall L \in \mathfrak{L}$, $\forall f \in \operatorname{adm}(A, L)$ si ha $\operatorname{dom} g_1(f, L) = \operatorname{dom} g_2(f, L)$ e $g_1(f, L) \leqslant_L g_2(f, L)$ ».

Ogni funzione $\gamma\colon \mathfrak{P}(A) \to \mathfrak{P}(A)$ crescente (cioè $\gamma(B) \subset \gamma(C)$ per $B \subset C \subset A$) è la funzione leader di qualche $G(A, \mathfrak{L})$-operatore; e viceversa. Perciò ognuna di queste funzioni γ sarà detta *funzione leader su* A.

Si è osservato nel § 2 ed, in particolare, nell'osservazione 2.1 che

$$G(A, \mathfrak{L}) = \bigcup_{\gamma} G(A, \mathfrak{L}, \gamma)$$

dove γ percorre le funzioni leader su A. Ed inoltre si è visto che ogni $G(A, \mathfrak{L}, \gamma)$ è un reticolo completo rispetto alla relazione d'ordine indotta da $G(A, \mathfrak{L})$; e si può notare che due operatori con funzioni leader distinte non sono confrontabili.

Ora sia g un $G(A, \mathbf{2})$-operatore e sia $\mathbf{2} \in \mathfrak{L}$; si indichi con g^- il minimo fra i $G(A, \mathfrak{L})$-operatori che estendono g (vedi osservazione 3.4).

Teorema di isomorfismo. – *Se $\mathfrak{L}$ verifica ($\mathfrak{L}$.1), l'applicazione $g \mapsto g^-$ è un isomorfismo d'ordine di $G(A, \mathbf{2})$ su $G(A, \mathfrak{L})$ che induce un isomorfismo completo di $G(A, \mathbf{2}, \gamma)$ su $G(A, \mathfrak{L}, \gamma)$ per ogni funzione leader γ di A.*

Siano g_1, g_2 due $G(A, \mathfrak{L})$-*operatori*. Il *prodotto* $g_1 g_2$ è *il* $G(A, \mathfrak{L})$-operatore definito da $(g_1 g_2)(f, L) = g_1(g_2(f, L), L)$.

TEOREMA SUL PRODOTTO DI DUE G-OPERATORI. *Se* $\mathfrak{L}$ *verifica* ($\mathfrak{L}$.1) *e* g_1, g_2 *sono due* $G(A, \mathbf{2})$-*operatori, allora* $(g_1 g_2)^- = g_1^- g_2^-$.

Si può osservare che il teorema 3.1 (sull'univocità dell'estensione di un $G(A, \mathbf{2})$-operatore), il teorema di rappresentazione dei G-operatori ed infine il teorema di isomorfismo ed il teorema sul prodotto di due G-operatori costituiscono i molteplici aspetti della completa distributività dei reticoli; nel senso che si può dimostrare che la completa distributività non solo è sufficiente ma anche necessaria affinchè uno qualsiasi dei suddetti teoremi valga.

6. G-operatori polinomiali.

I G-operatori sono ottenibili mediante il prodotto di G-operatori elementari? Ricordiamo che questi operatori elementari sono definiti in [1], [2].

La risposta è negativa. Diamo un esempio.

ESEMPIO 6.1. Sia M_5 il reticolo composto da 5 elementi distinti; il minimo 0, il massimo 1 ed altri tre elementi a, b, c tali che $a \vee b = 1$, $a \vee c = 1$, $b \vee c = 1$, $a \wedge b = 0$, $a \wedge c = 0$, $b \wedge c = 0$. Sia A un insieme contenente almeno due elementi distinti x_0 e y_0; e sia γ: $\mathfrak{I}(A) \to \mathfrak{I}(A)$ definita da $\gamma(A) = A$ e $\gamma(B) = \emptyset$ per ogni $B \neq A$. Si ponga $\mathfrak{L} = \{\overline{\mathbf{R}}, M_5\}$. Si definisca l'operatore g_0 con funzione leader γ nel seguente modo: « $\forall L \in \mathfrak{L}$, $\forall f \in \operatorname{adm}(A, L)$ si pone $g_0(f, L) =$ funzione vuota, se $\operatorname{dom} f \neq A$; altrimenti si pone $g_0(f, L) = f(x_0)$ (risp. $= f(y_0)$), se $L = M_5$ (risp. $L = \overline{\mathbf{R}}$) ».

Questo operatore g_0 è un $G(A, \mathfrak{L})$-operatore che non è ottenibile mediante il prodotto di G-operatori elementari, perchè ogni prodotto di G-operatori elementari è un G-operatore polinomiale, mentre g_0 non lo è.

Diamo la definizione di G-operatore polinomiale. Se X è un insieme non vuoto un *polinomio in* X è un'espressione formale contenente i simboli x e i simboli $\bigwedge, \bigvee$ che è definita da: «(1) ogni $x (\in X)$ è un polinomio in X; (2) se I è un insieme non vuoto e P_i è un polinomio in X per ogni $i \in I$, allora $\bigwedge_{i \in I} P_i$ e $\bigvee_{i \in I} P_i$ sono polinomi in X ». Un $G(A, \mathfrak{L})$-*operatore* g è detto *polinomiale*, se $\forall X \subset A$, $\forall y \in \gamma_g(X)$ esiste un polinomio $P_{X,y}$ in X tale che $g(f, L)(y) = P_{X,y}(f, L)$ per ogni $L \in \mathfrak{L}$ ed $f \in \operatorname{adm}(A, L)$ con $\operatorname{dom} f = X$; $P_{X,y}(f, L)$ indica l'elemento di L ottenuto assegnando ad ogni simbolo x il valore $f(x)$ ed eseguendo le operazioni $\bigwedge, \bigvee$ in L.

Notiamo che qualunque sia il $G(A, \mathfrak{L})$-operatore polinomiale g e qualunque sia $\mathfrak{L}' \supset \mathfrak{L}$ esiste sempre un $G(A, \mathfrak{L}')$-operatore che estende g. Non è chiaro se questa proprietà di estendibilità valga solo per i G-operatori polinomiali.

Si osserva pure che l'insieme $G_p(A, \mathfrak{L}, \gamma)$ dei $G(A, \mathfrak{L})$-operatori polinomiali, aventi una stessa guida γ, è un sottoreticolo chiuso di $G_\lambda(A, \mathfrak{L}, \gamma)$. Ogni $G(A, \mathbf{2})$-operatore è polinomiale; più in generale $G_p(A, \mathfrak{L}) = G(A, \mathfrak{L})$ per ogni famiglia di reticoli $\mathfrak{L}$ verificante ($\mathfrak{L}$.1).

BIBLIOGRAFIA

[1] E. De Giorgi, *Generalized limits in calculus of variations*, Topics in Functional Analysis 1980-81, Quaderno della Sc. Nor. Sup. Pisa (1982).

[2] E. De Giorgi - T. Franzoni, *Una presentazione sintetica dei limiti generalizzati*, Port. Math. (1982), to appear.

[3] G. H. Greco, *Limitoidi e reticoli completi*, Ann. Univ. Ferrara, **29** (1983), pp. 153-164.

[4] G. H. Greco, *Limites et fonctions d'ensembles*, Rend. Sem. Mat. Padova (1982), to appear.

[5] G. Birkhoff, *Lattice Theory*, Am. Math. Soc. Coll. Publ., Providence (1973).

[6] G. H. Greco, *Fuzzy integrals and fuzzy measures with their values in complete lattices* J. Math. An. Appl. to appear.

[7] G. H. Greco, *On mesurability of functions valued in completely distributive lattices* (1983), to appear.

[8] G. H. Greco, *Uniform order-convergence for complete lattices*, Proc. Am. Math. Soc. **90** (1984), pp. 657-658.

Manoscritto pervenuto in redazione il 9 settembre 1983.