RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

FRANCESCO MARTELLO

Semigruppi di traslazioni nello spazio $L^1([-r,0],X)$

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 72 (1984), p. 307-317

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1984__72__307_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 72 (1984)

Semigruppi di traslazioni nello spazio $L^1([-r, 0], X)$.

FRANCESCO MARTELLO (*)

SUMMARY - In this paper we characterize the sets D_A such that the operator $A: D_A \subseteq W^{1,1}([-r, 0], X) \to L^1([-r, 0], X)$, $Au = -u'$ is accretive then we use this characterization in order to prove that, if A is m-accretive in $L^1([-r, 0], X)$, it generates a semigroup of translations in $L^1([-r, 0], X)$.

Introduzione.

Lo studio delle equazioni funzionali mediante il metodo dei semigruppi di operatori fa rientrare la teoria di tali equazioni nell'ambito della teoria generale delle equazioni differenziali astratte in spazi di Banach. Qui il legame con l'equazione funzionale si traduce in condizioni sul dominio D_A dell'operatore $A: D_A \subset Y \to Y$, $Au = -u'$, con Y spazio dei dati iniziali. In tale studio si incontra il problema di provare che l'operatore A, supposto m-accretivo, generi un semigruppo di traslazioni. Così i semigruppi di traslazioni vengono ad avere un ruolo essenziale in questo tipo di questioni.

A. T. Plant ha dimostrato che in $C([-r, 0], X)$ l'operatore derivata, supposto m-accretivo, genera sempre un semigruppo di traslazioni [4]. Lo scopo di questo lavoro è dimostrare che lo stesso operatore, supposto m-accretivo in $L^1([-r, 0], X)$, è generatore di un semigruppo di traslazioni in $L^1([-r, 0], X)$.

Questo risultato era già stato provato da R. Villella Bressan in un caso particolare, ottenuto a partire da una equazione funzionale con dato iniziale in $L^1([-r, 0], X)$ [6]. Il metodo seguito consisteva nel

(*) Indirizzo dell'A.: Via Piave 29, 35043 Monselice (Padova).

mettere in relazione il semigruppo generato da A in $L^1([-r, 0], X)$ e quello generato in $C([-r, 0], X)$ dall'operatore $\tilde{A}$, $D_{\tilde{A}} = D_A \cap C^1([-r, 0], X)$; qui si dimostrerà che tale metodo può essere esteso al caso generale. Una tale estensione è stata possibile dopo aver trovato una caratterizzazione per l'accretività in $L^1([-r, 0], X)$ dell'operatore derivata, valendoci a tale scopo di alcuni risultati in [1] e [5].

Preliminari.

In questo lavoro si suppone $(X, \|\cdot\|)$ spazio di Banach, $L^1 = L^1([-r, 0], X)$ lo spazio delle funzioni da $[-r, 0]$ in X integrabili secondo Lebesgue munito della norma

$$\|u\|_1 = \int_{-r}^{0} |u(t)|dt \qquad \text{e} \qquad W^{1,1} = W^{1,1}([-r, 0], X) =$$
$$= \{u \in L^1 \colon u \text{ assolutamente continua, } u' \text{ esiste } q.\text{o. e } u' \in L^1\}.$$

Si considera l'operatore $A: D_A \subset L^1 \to L^1$ così definito:

$$A\varphi = -\varphi' \qquad D_A \subseteq W^{1,1}. \tag{1}$$

Diamo ora sinteticamente definizioni e risultati di cui ci serviremo più avanti (vedere [1], [7]).

DEFINIZIONE. Se B è un'operatore (in generale a più valori non lineare) su X allora $B + \alpha I$, $\alpha \in R$, *è accretivo* se per ogni coppia x_1, $x_2 \in D_B$, $y_1 \in Bx_1$, $y_2 \in Bx_2$ si ha:

$$\|x_1 - x_2\| \leq \frac{1}{1 - \lambda\alpha} \|x_1 - x_2 + \lambda(y_1 - y_2)\| \qquad \text{con } 0 < \lambda < \frac{1}{\max\{0, \alpha\}}.$$

Si dice che è *m-accretivo* se in più vale:

$$R(I + \lambda B) = X \qquad \text{per ogni } \lambda: 0 < \lambda < \lambda_0, \lambda_0 \text{ suff. piccolo}.$$

Si ha anche quest'altra definizione equivalente di operatore accretivo:

PROPOSIZIONE. Un operatore B su X è accretivo se e solo se per ogni x_1, $x_2 \in D_B$, $y_1 \in Bx_1$, $y_2 \in Bx_2$ si ha:

$$D_+\|x_1 - x_2\|(y_1 - y_2) \geq 0 .$$

DEFINIZIONE. Sia D un sottoinsieme chiuso di X. Una famiglia di applicazioni $T(t): D \to D$, $t \geq 0$, è un semigruppo di tipo ω, $\omega \in R$, se:

i) $T(0)x = x$ per ogni $x \in D$

ii) $T(t+s)x = T(t)T(s)x$ per ogni t, $s \in R^+$ e $x \in D$

iii) $T(\cdot)x: R^+ \to D$ è continua per ogni $x \in D$

iv) $\|T(t)x - T(t)y\| \leq \exp[\omega t]\,\|x - y\|$, $\omega \in R$, per ogni $t \in R^+$, $x, y \in D$.

TEOREMA (Crandall-Liggett). Se B è operatore m-accretivo, allora per ogni $x \in \bar{D}_B$ esiste $\lim_{n\to+\infty} (I + (t/n)B)^{-n}x$ e posto $T(t)x = \lim_{n\to+\infty} (I + (t/n)B)^{-n}x$ $T(t)$ è un semigruppo non lineare continuo in $\bar{D}_B$.

DEFINIZIONE. Sia D un sottoinsieme chiuso di L^1 e $\{T(t): D \to D, t \geq 0\}$ sia un semigruppo di operatori non lineare continuo. Se per ogni $\varphi \in D$ esiste una funzione

$$x: [-r, +\infty[\to X \quad \text{tale che:} \quad T(t)\varphi = x_t \quad \text{per ogni } t \geq 0 ,$$

si dice che $\{T(t): t \geq 0\}$ è un semigruppo di traslazioni in L^1.

Ricordiamo che $x_t \in L^1$ denota la storia di $x(s)$ al tempo t cioè: $x_t(\theta) = x(t + \theta)$ q.o. $-r \leq \theta \leq 0$, (si veda [3]).

1. Accretività in L^1.

In questo paragrafo diamo una caratterizzazione degli insiemi D_A che rendono l'operatore (1) accretivo. Precisamente proviamo che:

PROPOSIZIONE. L'operatore $A + \alpha I$, $\alpha \in R$, è accretivo se e solo se per ogni u_1, $u_2 \in D_A$ si ha:

$$\|u_1(0) - u_2(0)\| - \|u_1(-r) - u_2(-r)\| \leq \alpha\|u_1 - u_2\|_1 .$$

La dimostrazione è una conseguenza dei Lemmi e della Proposizione che seguono.

LEMMA 1.1. Se $u \in W^{1,1}$ allora

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\| \in L^1 \quad \text{e} \quad \int_{-r}^{0} \frac{d}{dt}\|u(t)\|dt = \|u(0)\| - \|u(-r)\| .$$

DIM. Poichè $u \in W^{1,1}$, u e $\|u\|$ sono assolutamente continue, pertanto $(d/dt)\|u(t)\|$ esiste q.o. e

$$\int_{-r}^{0} \frac{d}{dt}\|u(t)\|dt = \|u(0)\| - \|u(-r)\| .$$

LEMMA 1.2. Se $u \in W^{1,1}$ allora è:

$$D\|u(t)\|u'(t) = \frac{d}{dt}\|u(t)\| \text{q.o.} \quad \text{in } [-r, 0] .$$

DIM. Supponiamo che in t_0 esistano sia la derivata di $u(t)$ che quella di $\|u(t)\|$. Allora è:

$$\left| \frac{\|u(t_0+h)\| - \|u(t_0)\|}{h} - \frac{\|u(t_0) + hu'(t_0)\| - \|u(t_0)\|}{h} \right| =$$

$$= \left| \frac{\|u(t_0+h)\| - \|u(t_0) + hu'(t_0)\|}{|h|} \right| \leqslant \frac{\|u(t_0+h) - u(t_0) - hu'(t_0)\|}{|h|} =$$

$$= \left\| \frac{u(t_0+h) - u(t_0)}{h} - u'(t_0) \right\| \xrightarrow{h\to 0} O .$$

Pertanto in t_0 esiste $D\|u(t)\|u'(t_0)$ e si ha:

$$D\|u(t_0)\|u'(t_0) = \left(\frac{d}{dt}\|u(t)\|\right)_{t=t_0} .$$

PROPOSIZIONE 1.1. Se $u \in W^{1,1}$ si ha:

$$D\|u\|_1(-u') = \|u(-r)\| - \|u(0)\| .$$

DIM.

$$D_+\|u\|_1(-u') = \lim_{h\to 0^+} \frac{\|u - hu'\|_1 - \|u\|_1}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \int_{-r}^{0} \frac{\|u(t) - hu'(t)\| - \|u(t)\|}{h}\, dt.$$

Ora osserviamo che:

$$\left| \frac{\|u(t) - hu'(t)\| - \|u(t)\|}{h} \right| \leqslant \|u'(t)\| \in L^1$$

applico quindi il teorema della convergenza dominata e si ottiene:

$$D_+\|u\|_1(-u') = \int_{-r}^{0} \lim_{h\to 0^+} \frac{\|u(t) - hu'(t)\| - \|u(t)\|}{h}\, dt =$$

$$= \int_{-r}^{0} D_+\|u(t)\|\big(-u'(t)\big)\, dt = -\int_{-r}^{0} D\|u(t)\|\big(u'(t)\big)\, dt =$$

$$= -\int_{-r}^{0} \frac{d}{dt}\|u(t)\|\, dt = \|u(-r)\| - \|u(0)\|.$$

In modo analogo si trova che: $D_-\|u\|_1(-u') = \|u(-r)\| - \|u(0)\|$.

Quindi si conclude che: $D\|u\|_1(-u')$ esiste e $D\|u\|_1(-u') = \|u(-r)\| - \|u(0)\|$.

COROLLARIO 1.1. Se $u \in W^{1,1}$, per ogni $\alpha \in R$ è:

$$D\|u\|_1(\alpha u - u') = \|u(-r)\| - \|u(0)\| + \alpha\|u\|_1.$$

DIM.:

$$D_+\|u\|_1(\alpha u - u') \leqslant D_+\|u\|_1(\alpha u) + D_+\|u\|_1(-u') =$$
$$= \alpha\|u\|_1 + \big(\|u(-r)\| - \|u(0)\|\big),$$

$$D_-\|u\|_1(\alpha u - u') \leqslant D_-\|u\|_1(\alpha u) + D_-\|u\|_1(-u') =$$
$$= \alpha\|u\|_1 + \big(\|u(-r)\| - \|u(0)\|\big),$$

ed infine risulta: $D\|u\|_1(\alpha u - u') = \|u(-r)\| - \|u(0)\| + \alpha\|u\|_1$. Come conseguenza dei risultati precedenti infine si ha:

PROPOSIZIONE 1.2. L'operatore $A + \alpha I$, $\alpha \in R$, è accretivo se e solo se per ogni $u_1, u_2 \in D_A$ si ha:

$$\|u_1(0) - u_2(0)\| - \|u_1(-r) - u_2(-r)\| \leqslant \alpha\|u_1 - u_2\|_1 .$$

2. Semigruppo di traslazioni in L^1.

Lo scopo di questo paragrafo è dimostrare che se l'operatore $A + \alpha I$, $\alpha \in R$, è m-accretivo in L^1 allora il semigruppo da esso generato nel senso del teorema di Crandall-Liggett è un semigruppo di traslazioni in L^1.

Indichiamo con $C = C([-r, 0], X)$ lo spazio delle funzioni continue da $[-r, 0]$ in X munito della sup-norma:

$$\|\varphi\|_C = \sup_{-r\leqslant\theta\leqslant 0} \|\varphi(\theta)\| , \qquad \text{con } C_\omega = \big(C([-r, 0], X), \|\cdot\|_\omega\big)$$

dove: $\|\varphi\|_\omega = \sup\limits_{-r\leqslant\theta\leqslant 0} \exp[-\omega\theta]\,|\varphi(\theta)|$ e con $\tilde{A}$ il seguente operatore in C:

$$\tilde{A}: D_{\tilde{A}} \to C \qquad \tilde{A}\varphi = -\varphi' \qquad D_{\tilde{A}} = D_A \cap C^1([-r, 0], X) .$$

PROPOSIZIONE 2.1. Se $A + \alpha I$, $\alpha \in R$, è m-accretivo in L^1 allora $\tilde{A} + \omega I$ è m-accretivo in C_ω per $\omega \geqslant \max\{0, \alpha\}$.

DIM.: Sia $v \in C$, per ipotesi esiste un $u \in D_A$ tale che $u = (I + \lambda A)^{-1} v$ da cui: $v = u - u'$ quindi $u' \in C$, $u \in D_A \subseteq C^1$ e $u = (I + \lambda A)^{-1} v$. Pertanto $R(I + \lambda\tilde{A}) = C$, per λ sufficientemente piccolo. Siano ora $u_1, u_2 \in D_{\tilde{A}} = D_A \cap C^1$ e $v_i = (I + \lambda\tilde{A}) u_i = u_i - \lambda u_i'$, $i = 1, 2$. Poniamo $u = u_1 - u_2$, $v = v_1 - v_2$ e quindi $v = u - \lambda u'$. Si ha:

$$\|u(0)\| \leqslant \|u(-r)\| + \alpha\|u\|_1 \leqslant \exp\left[\frac{-r}{\lambda}\right] \|u(0)\| +$$

$$+ \int_{-r}^{0} \frac{\exp[(-r-s)/\lambda]}{\lambda} \|v(s)\|\, ds + \alpha\|u\|_1 \leqslant \exp\left[\frac{-r}{\lambda}\right] \|u(0)\| +$$

$$+\|v\|_\infty \frac{\exp[-r\omega]-\exp[-r/\lambda]}{1-\lambda\omega}+\frac{\max\{\alpha, 0\}}{1-\lambda\alpha}\|v\|_1 \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left[\frac{-r}{\lambda}\right]\|u(0)\| + \|v\|_\infty \frac{\exp[-r\omega]-\exp[-r/\lambda]}{1-\lambda\omega}+$$

$$+\frac{\max\{\alpha, 0\}}{1-\lambda\alpha}\|v\|_\infty\left(\frac{1-\exp[-r\omega]}{\omega}\right).$$

Quindi si ottiene:

$$\left(1-\exp\left[\frac{-r}{\lambda}\right]\right)\|u(0)\| \leqslant \|v\|_\infty \cdot$$

$$\cdot\left[\frac{\exp[-r\omega]-\exp[-r/\lambda]}{1-\lambda\omega}+\frac{\max\{\alpha, 0\}}{1-\lambda\alpha}\,\frac{1-\exp[-r\omega]}{\omega}\right].$$

Ora se $\alpha \leqslant 0$ si ha:

$$(1-\exp[-r/\lambda])\|u(0)\| \leqslant \|v\|_\infty\left(\frac{1-\exp[-r/\lambda]}{1-\lambda\omega}+\frac{\exp[-r\omega]-1}{1-\lambda\omega}\right)$$

da cui:

$$\|u(0)\| \leqslant \|v\|_\infty\left(\frac{1}{1-\lambda\omega}+\frac{1}{1-\lambda\omega}\,\frac{\exp[-r\omega]-1}{1-\exp[-r/\lambda]}\right).$$

Poniamo

$$\frac{1}{1-\lambda\omega}\,\frac{\exp[-r\omega]-1}{1-\exp[-r/\lambda]}\leqslant 0$$

da cui segue $\omega \geqslant 0$ e $\lambda\omega < 1$. Quindi se $\alpha \leqslant 0$, $\omega \geqslant 0$, $\lambda\omega < 1$, l'operatore $\hat{A}+\omega I$ è accretivo in C_∞ [5].

Sia ora $\alpha > 0$:

$$(1-\exp[-r/\lambda])\|u(0)\| \leqslant \|v\|_\infty \cdot$$

$$\cdot\left[\frac{\exp[-r\omega]-\exp[-r/\lambda]}{1-\lambda\omega}+\frac{\alpha}{1-\lambda\alpha}\,\frac{1-\exp[-r\omega]}{\omega}\right]=$$

$$=\|v\|_\infty\left[\frac{\omega(1-\lambda\alpha)(1-\exp[-r/\lambda])+(\alpha-\omega)(1-\exp[-r\omega])}{\omega(1-\lambda\omega)(1-\lambda\alpha)}\right]=$$

$$=\|v\|_\infty\left[\frac{1-\exp[-r/\lambda])}{1-\lambda\omega}+\frac{(\alpha-\omega)(1-\exp[-r\omega])}{\omega(1-\lambda\omega)(1-\lambda\alpha)}\right].$$

Quindi infine si ha:

$$\|u(0)\| \leqslant \|v\|_\omega \left[\frac{1}{1-\lambda\omega} + \frac{\alpha-\omega}{\omega(1-\lambda\omega)(1-\lambda\alpha)}\,\frac{1-\exp[-r\omega]}{1-\exp[-r/\lambda]}\right].$$

Poniamo:

$$\frac{\alpha-\omega}{\omega(1-\lambda\omega)(1-\lambda\alpha)}\,\frac{1-\exp[-r\omega]}{1-\exp[-r/\lambda]} \leqslant 0$$

che equivale a:

$$(*) \qquad \frac{\alpha-\omega}{\omega(1-\lambda\omega)}\,(1-\exp[-r\omega]) \leqslant 0\,.$$

La $(*)$ è verificata per $\omega \geqslant \alpha$, con $0 < \lambda\omega < 1$.

Pertanto se $\alpha > 0$, $\omega \geqslant \alpha$, $0 < \lambda\omega < 1$ l'operatore $\tilde{A} + \omega I$ è accretivo in C_ω [5]. Si conclude allora che per $\alpha \in R$, $\omega \geqslant \max\{0, \alpha\}$, $0 < \lambda\omega < 1$, l'operatore $\tilde{A} + \omega I$ è accretivo in C_ω.

PROPOSIZIONE 2.2. *Sia $A + \alpha I$, $\alpha \in R$, m-accretivo in L^1, allora per ogni $\psi \in C$ è: $\lim_{\lambda\to 0} \|\psi - (I+\lambda A)^{-1}\psi\|_1 = 0$*

DIM.: Sia $\psi \in C$ e $\psi_1 \in D_A$ si ha:

$\|\psi - (I+\lambda A)^{-1}\psi\|_1 \leqslant \|\psi - \psi_1 - (I+\lambda A)^{-1}\psi + (I+\lambda A)^{-1}\psi_1\|_1 +$
$+ \|\psi_1 - (I+\lambda A)^{-1}\psi_1\|_1$ poichè $\|\psi_1 - (I+\lambda A)^{-1}\psi_1\|_1 \xrightarrow{\lambda\to 0} 0$ si tratta quindi di dimostrare che:

$$\|\psi - \psi_1 - (I+\lambda A)^{-1}\psi + (I+\lambda A)^{-1}\psi_1\|_1 \xrightarrow{\lambda\to 0} 0\,.$$

Siano $\varphi, \varphi_1 \in D_A$ tali che: $\varphi = (I+\lambda A)^{-1}\psi$ e $\varphi_1 = (I+\lambda A)^{-1}\psi_1$ e poniamo: $\bar\varphi = \varphi - \varphi_1$, $\bar\psi = \psi - \psi_1$. Consideriamo poi l'operatore A_0 così definito: $A_0\varphi = -\varphi'$, $DA_0 = \{\varphi \in W^{1,1}: \varphi(0) = 0\}$. Si ha:

$$\|\bar\psi - \bar\varphi\|_1 = \left\| \bar\psi(\theta) - \exp\left[\frac{\theta}{\lambda}\right]\bar\varphi(0) - \int_\theta^0 \frac{\exp[(\theta-s)/\lambda]}{\lambda}\,\bar\psi(s)\,ds \right\|_1 \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \exp\left[\frac{\theta}{\lambda}\right]\bar\varphi(0)\right\|_1 + \|\bar\psi - (I+\lambda A_0)^{-1}\bar\psi\|_1 \leqslant$$

$$\leqslant \lambda\left(1-\exp\left[\frac{-r}{\lambda}\right]\right)\left(\|\bar\varphi(-r)\| + \frac{\max\{\alpha, 0\}}{1-\lambda\alpha}\,\|\bar\psi\|_1\right) + \|\psi - (I+\lambda A_0)^{-1}\psi\|_1\,.$$

Osserviamo ora che:

$$\|\bar{\varphi}(-r)\| \leqslant \exp\left[\frac{-r}{\lambda}\right]\|\bar{\varphi}(-r)\| + \\ + \frac{\max\{\alpha, 0\}}{1-\lambda\alpha}\exp\left[\frac{-r}{\lambda}\right]\|\bar{\psi}\|_1 + \|\bar{\psi}\|_C\left(1-\exp\left[\frac{-r}{\lambda}\right]\right)$$

da cui:

$$\|\bar{\varphi}(-r)\| \leqslant \|\bar{\psi}\|_C + \frac{\max\{\alpha, 0\}}{1-\lambda\alpha}\,\frac{\exp[-r/\lambda]}{1-\exp[-r/\lambda]}\|\bar{\psi}\|_1 .$$

Perciò tornando alla disuguaglianza iniziale si ha:

$$\|\bar{\psi}-\bar{\varphi}\|_1 \leqslant \lambda\left(1-\exp\left[\frac{-r}{\lambda}\right]\right)\|\bar{\psi}\|_C + \\ + \frac{\lambda\max\{\alpha, 0\}}{1-\lambda\alpha}\|\bar{\psi}\|_1 + \|\bar{\psi}-(I+\lambda A_0)^{-1}\bar{\psi}\|_1 .$$

Poichè $\|\psi\|_C < +\infty$ e $\|\psi\|_1 < +\infty$ quando faccio tendere λ a zero il membro di destra va a zero e si conclude.

Corollario 2.1. Se $A + \alpha I$, $\alpha \in R$, è m-accretivo in L^1 allora D_A è denso in L^1.

Dim.: Per la proposizione precedente $C \subseteq \bar{D}_A$ e poichè C è denso in L^1 si conclude che $\bar{D}_A = L^1$.

Osservazione. Come conseguenza della proposizione 2.2 si ha anche la densità in L^1 di $D_{\tilde{A}}$ cioè: $\bar{D}_{\tilde{A}} = L^1$. Infatti per ogni $\psi \in C$, $(I+\lambda A)^{-1}\psi = (I+\lambda\tilde{A})^{-1}\psi \in D_{\tilde{A}}$, quindi per la proposizione 2.2, $C \subseteq \bar{D}_{\tilde{A}}$ e si conclude come nel corollario precedente.

Teorema 2.1 Se $A + \alpha I$, $\alpha \in R$, è m-accretivo in L^1 allora il semigruppo $\{T(t): t \geqslant 0\}$ generato da A è un semigruppo di traslazioni.

Dim. Per la proposizione 2.1, $A + \alpha I$ m-accretivo in L^1 comporta $\tilde{A} + \omega I$ m-accretivo in C_∞ per $\omega \geqslant \max\{0, \alpha\}$.

Il semigruppo $\{\tilde{T}(t): t \geqslant 0\}$ generato da $\tilde{A}$ è un semigruppo di traslazioni [4], quindi per ogni $\varphi \in \bar{D}$: si ha:

$$\tilde{T}(t)\varphi = \tilde{x}_t \quad t \geqslant 0 \qquad \text{ove } \tilde{x}(s) = \begin{cases} \varphi(s) & -r \leqslant s \leqslant 0 \\ \tilde{T}(s)\varphi(0) & s > 0 . \end{cases}$$

Per ogni $\varphi \in D_{\tilde{A}}$ si ha: $(I+\lambda A)^{-1}\varphi = (I+\lambda\tilde{A})^{-1}\varphi$ e quindi:

$$\tilde{T}(t)\varphi = (C)-\lim_{n\to\infty}\left(I+\frac{t}{n}A\right)^{-n}\varphi = (L^1)-\lim_{n\to\infty}\left(I+\frac{t}{n}A\right)^{-n}\varphi = T(t)\varphi .$$

Poichè $\psi_n \xrightarrow{C} \psi$ implica $\psi_n \xrightarrow{L^1} \psi$.

Quindi per ogni $\varphi \in D_{\tilde{A}}$ è: $\tilde{T}(t)\varphi = T(t)\varphi$.

Sia ora $\varphi \in L^1$, per l'osservazione precedente $D_{\tilde{A}}$ è denso in L^1 e quindi esiste una successione $(\varphi_n)_{n\in N}$, $\varphi_n \in D_{\tilde{A}}$ tale che $\varphi_n \xrightarrow{L^1} \varphi$ e quindi:

(1) $$T(t)\varphi_n \xrightarrow{L^1} T(t)\varphi \qquad \text{per ogni } t\geqslant 0.$$

Poichè $T(t)\varphi_n = \tilde{T}(t)\varphi_n$ la funzione

$$x^{(n)}(s) = \begin{cases} \varphi_n(s) & -r\leqslant s\leqslant 0 \\ \tilde{T}(s)\varphi_n(0) & s>0 \end{cases}$$

è tale che $T(t)\varphi_n = x_t^{(n)}$ per ogni $t\geqslant 0$ [4].

Definiamo adesso la funzione seguente:

$$x\colon [-r,+\infty[\,\to X, \qquad x(s) = \begin{cases} \varphi(s) & -r\leqslant s\leqslant 0 \text{ q.o.} \\ T(kr)\varphi(s-kr) & (k-1)r<s<kr \quad \text{q.o.} \end{cases}$$

per cui risulta: $T(kr)\varphi = x_{kr}$, $k\in N$.

Si tratta di dimostrare che $T(t)\varphi = x_t$ per ogni $t\geqslant 0$.

Sia $(k-1)r<t<kr$, $k\in N$.

Risulta:

$$\begin{aligned}
\|T(t)\varphi - x_t\|_1 &\leqslant \|T(t)\varphi - T(t)\varphi_n\|_1 + \|x_t^{(n)} - x_t\|_1 = \\
&= \|T(t)\varphi - T(t)\varphi_n\|_1 + \int_{-r}^{0}\|x^{(n)}(t+\theta) - x(t+\theta)\|\,d\theta = \\
&= (\text{per } t+\theta = s)\,\|T(t)\varphi - T(t)\varphi_n\|_1 + \int_{t-r}^{t}\|x^{(n)}(s) - x(s)\|\,ds \leqslant \\
&\leqslant \|T(t)\varphi - T(t)\varphi_n\|_1 + \int_{(k-2)r}^{kr}\|x^{(n)}(s) - x(s)\|\,ds = \\
&= \|T(t)\varphi - T(t)\varphi_n\|_1 + \|T\big((k-1)r\big)\varphi_n - T\big((k-1)r\big)\varphi\|_1 + \\
&\qquad + \|T(kr)\varphi_n - T(kr)\varphi\|_1 .
\end{aligned}$$

Da (1) segue subito che $\|T(t)\varphi - x_t\|_1 = 0$ come si voleva.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. DA PRATO, *Application croissantes et équations d'evolutions dans les espaces de Banach*, Istitutiones Matematicae, 2 Academic Press (1976).

[2] J. DYSON - R. VILLELLA BRESSAN, *Semigroups of translations associated with functional and functional differential equations*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, **82**A (1978).

[3] J. HALE, *Theory of functional differential equations*, Springer, Berlin (1977).

[4] A. T. PLANT, *Non linear semigroups of translations in Banach space generated by functional differential equations*, J. Math. Anal. Appl., **60** (1977), pp. 67-74.

[5] R. VILLELLA-BRESSAN, *An abstract functional equations in spaces of continuous functions*, Proceedings of the Second International Conference of Functional Differential Systems and Related Topics II, Zelona Gora (1981), pp. 328-333.

[6] R. VILLELLA-BRESSAN, *Functional equations of delay type in L^1 spaces*, da apparire.

[7] R. VILLELLA-BRESSAN, *Appunti di Lezione di Teoria delle funzioni*, Anno Accademico 1981-92, Università di Padova.

Pervenuto in Redazione il 21 settembre 1983.