RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GABRIELE H. GRECO

Limites et fonctions d'ensemble

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 72 (1984), p. 89-97

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1984__72__89_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 72 (1984)

Limites et fonctions d'ensemble.

GABRIELE H. GRECO (*)

0. Introduction.

On introduit ici une notion de limite d'une fonction numérique suivant une famille d'ensembles. Cette notion, qui est un cas particulier d'intégrale d'une fonction numérique par rapport à une fonction d'ensemble, comprend les limites classiques (« liminf » et « limsup » suivant un filtre) et les Γ-limites de De Giorgi [1]. Différentes expressions des limites (par exemple, les sequentielles) sont obtenues au moyen de la décomposition de leur « soutien », qui est la famille des ensembles sur lesquels les limites sont égales à 1. De même la comparaison des limites se ramène à la comparaison de leur « soutien » En obtenant ainsi des formulations ensemblistes pour plusieurs propriétées des Γ-limites de De Giorgi, on met en évidence le rôle joué par la structure d'ordre des nombres réels dans la théorie générale des Γ-limites.

1. Limites et intégrales.

Une fonction $\beta\colon \mathcal{P}(X) \to \{0, 1\}$ qui à toute partie d'un ensemble non vide fait correspondre les nombres 0 ou 1 est dite, dans toute la suite, simplement, *fonction d'ensemble croissante*, si $\beta(X) = 1$, $\beta(\emptyset) = 0$ et $\beta(A) \leqslant \beta(B)$ pour $A \subset B$. La *conjugueé* $\tilde{\beta}$ de β est la fonction d'ensemble croissante, définie par $\tilde{\beta}(A) = 1 - \beta(X - A)$. Or soit $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ une

(*) Indirizzo dell'A.: Dipartimento di Matematica, Università di Trento, 38050 Povo (Trento).

fonction numérique; on pose $f^+ = f \vee 0$ et $f^- = -(f \wedge 0)$. Alors l'intégrale $\int_X f\,d\beta$ est le nombre réel fini ou non, ainsi défini:

$$\int_X f\,d\beta = \int_X f^+\,d\beta - \int_X f^-\,d\tilde{\beta}\,; \tag{1}$$

où l'intégrale d'une fonction positive g par rapport à une fonction d'ensemble croissante γ est donnée par $\int_X g\,d\gamma = \int_0^{+\infty} \gamma\{g > t\}\,dt$. On remarque que cette définition d'intégrale par rapport à une fonction d'ensemble, employée par Vitali [2] et par Choquet [3] pour décrire des quantités, qui ne sont pas des intégrales usuelles, est maintenant utilisée par différents auteurs.

On dit qu'une famille (d'ensembles) $\mathcal{B}$ des parties de X est *précroissante sur X* si $\mathcal{B} \neq \emptyset$, $\emptyset \notin \mathcal{B}$. On dit que $\mathcal{B}$ est *croissante,* si elle est *précroissante* et toute partie de X qui inclue un élément de $\mathcal{B}$, appartient à $\mathcal{B}$. La famille $\mathcal{B}^{\mathrm{cr}} = \{A \in \mathcal{P}(X)\colon \exists B \in \mathcal{B} \text{ avec } B \subset A\}$ est dite *engendrée* par la famille $\mathcal{B}$; elle est croissante si $\mathcal{B}$ est précroissante. Or soit f une fonction numérique et $\mathcal{B}$ una famille précroissante. Alors la *limite de f suivant la famille d'ensembles* (*précroissante*) $\mathcal{B}$ est le nombre réel fini ou non:

$$\lim_{\mathcal{B}} f = \sup_{A \in \mathcal{B}} \inf_A f\,; \tag{2}$$

la famille d'ensembles $\{A\colon \lim_{\mathcal{B}} \chi_A = 1\}$, dite *soutien* de la limite « $\lim_{\mathcal{B}}$ »' est la famille croissante engendrée par $\mathcal{B}$. *Deux limites sont égales si et seulement si ont le même soutien.*

A chaque famille croissante $\mathcal{B}$ correspond la fonction d'ensemble croissante $\chi_{\mathcal{B}}$, égale à 1 précisement sur $\mathcal{B}$; inversement, à toute fonction d'ensemble croissante β correspond la famille croissante $\mathcal{B}_\beta = \{A\colon \beta(A) = 1\}$. Cette correspondance garde les opérations de treilli et elle applique les filtres sur les fonctions d'ensemble surmodulaires, les grilles des filtres sur les sousmodulaires et les ultrafiltres sur les additives. En outre à la notion de conjuguée d'une fonction d'ensemble » correspond cette notion de grille. On dit *grille d'une famille* (*d'ensembles*) *précroissante* $\mathcal{B}$ la famille $\mathcal{B}^\# = \{A\colon A \cap B \neq \emptyset$ pour tout $B \in \mathcal{B}\}$ [5]. Alors $\mathcal{B}^\#$ est croissante et $\chi_{\mathcal{B}^\#}$ est la conjuguée de $\chi_{\mathcal{B}^{\mathrm{cr}}}$, puisque $\mathcal{B}^\# = \{X - A\colon A \notin \mathcal{B}^{\mathrm{cr}}\}$. Et on a aussi $\mathcal{B}^{\#\#} = \mathcal{B}^{\mathrm{cr}}$, d'après l'égalité $\tilde{\tilde{\beta}} = \beta$.

L'intégale $\int_X (\cdot)\, d\beta$ par rapport à une fonction d'ensemble croissante β sur X, est une fonctionnelle $T\colon \overline{\mathbf{R}}^X \to \overline{\mathbf{R}}$, qui satisfait aux propriétés suivantes qui la caractérisent:

(3) si $f \leqslant g$, alors $T(f) \leqslant T(g)$

(4) $T(\psi \circ f) = \psi(T(f))$ pour toute $f \in \overline{\mathbf{R}}^X$ et toute $\psi\colon \overline{\mathbf{R}} \to \overline{\mathbf{R}}$ fonction continue et non décroissante.

THÉORÈME 1 *Soit* $T\colon \overline{\mathbf{R}}^X \to \overline{\mathbf{R}}$ *une fonctionnelle qui vérifie les propriétés* (3) *et* (4). *Alors la fonction d'ensemble* β, *définie par* $\beta(A) = T(\chi_A)$ *pour toute partie* A *de* X, *est croissante, et* $T(f) = \int_X f\, d\beta$ *pour toute* $f \in \overline{\mathbf{R}}^X$.

Ce théorème est une conséquence d'un théorème de représentation (type Riesz) des intégrales par rapport à une fonction d'ensemble [6].

D'après ce théorème, dans le cas où $T(f) = \sup_{A \in \mathfrak{B}} \inf_A f$, on a:

THÉORÈME 2. *Soit* $\mathfrak{B}$ *une famille précroissante sur* X. *Alors pour toute* $f \in \overline{\mathbf{R}}^X$ *on a*:

$$\lim_{\mathfrak{B}} f = \int_X f\, d\chi_{\mathfrak{B}^{\mathrm{cr}}}\,.$$

Donc tout énoncé formulé en terms de « limite suivant une famille d'ensembles » peut être formulé en termes d'« intégrale par rapport a une fonction d'ensemble croissante », et inversement. Par exemple:

THÉORÈME 1'. *Toute fonctionnelle* $T\colon \overline{\mathbf{R}}^X \to \overline{\mathbf{R}}$ *qui vérifie* (3) *et* (4) *est une limite dont le soutien est* $\mathfrak{B} = \{A\colon T(\chi_A) = 1\}$, *c'est-à-dire* $T(f) = \lim_{\mathfrak{B}} f$ *pour toute fonction numérique définie sur* X.

D'après la définition d'intégrale et les propriétés de grille, il résulte:

(5) $$\lim_{\mathfrak{B}} f = \lim_{\mathfrak{B}} f^+ - \lim_{\mathfrak{B}^\#} f^- \quad \text{et} \quad \lim_{\mathfrak{B}} (-f) = -\lim_{\mathfrak{B}^\#} f$$

(6) $$\lim_{\mathfrak{B}} f = \sup \{t \in \overline{\mathbf{R}}\colon \{f \geqslant t\} \in \mathfrak{B}^{\mathrm{cr}}\}\,.$$

Soient γ et β_y des fonctions d'ensemble croissantes, respectivement, sur Y et sur X pout tout $y \in Y$; d'après le théorème 1, employé dans le cas où la fonctionnelle T est définie par $T(f) = \int_Y \left(\int_X f\, d\beta_y\right) d\gamma(y)$, on a:

THÉORÈME 3. *Soit β la fonction d'ensemble croissante sur X, définie par* $\beta(A) = \int\limits_Y \Big(\int\limits_X \beta_y(A) \Big) d\gamma(y)$. *Alors pour toute* $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ *et tout* $A \in \mathcal{P}(X)$ *on a* $\int\limits_X f\, d\beta = \int\limits_Y \Big(\int f\, d\beta_y \Big) d\gamma(y)$ *et* $\tilde{\beta}(A) = \int\limits_Y h_y(A)\, d\tilde{\gamma}(y)$.

Soit $\mathsf{M}(y)$ une famille croissante sur X pour tout $y \in Y$; soit $\mathcal{C}$ une famille d'ensembles précroissante sur Y. La famille d'ensembles $\mathsf{M}(\mathcal{C}) = \bigcup\limits_{A \in \mathcal{C}} \bigcap\limits_{y \in A} \mathsf{M}(y)$ $\Big(= \bigcap\limits_{A \in \mathcal{C}^\#} \bigcup\limits_{y \in A} \mathsf{M}(y)$, voir théorème de Tarski [12, pag. 111]$\Big)$ est croissante; sa fonction d'ensemble associée $\chi_{\mathsf{M}(\mathcal{C})}$ est telle que $\chi_{\mathsf{M}(\mathcal{C})} = \lim\limits_{y, \mathcal{C}} \chi_{\mathsf{M}(y)}$. Donc du théorème 3 il résulte:

$$\lim_{\mathsf{M}(\mathcal{C})} f = \lim_{y, \mathcal{C}} \big(\lim_{\mathsf{M}(y)} f\big) \qquad \text{et} \qquad (\mathsf{M}(\mathcal{C}))^\# = \mathsf{M}^\#(\mathcal{C}^\#)\,. \tag{7}$$

En outre soit $\mathsf{N}(x)$ une famille croissante sur Z pour tout $x \in X$; on pose $(\mathsf{NM})(y) = \mathsf{N}(\mathsf{M}(y))$; alors il résulte $\mathsf{N}(\mathsf{M}(\mathcal{C})) = (\mathsf{NM})(\mathcal{C})$. Donc si $\mathsf{S}(z)$ est une famille croissante sur W pout tout $z \in Z$, on a la propriété associative: $\mathsf{S}(\mathsf{NM}) = (\mathsf{SN})\mathsf{M}$.

On dit *support d'une fonction d'ensemble croissante β sur X*, le filtre sur X, composé des parties A telles que $\int\limits_X f\, d\beta = \int\limits_A f\, d\beta$ pour toute $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$. Le support de β est égal au support de sa conjuguée, puisque $\int\limits_X f\, d\tilde{\beta} = -\int\limits_X (-f)\, d\beta$. Le support de β est identique à la famille des parties A de X qui sont $'\beta$-measurables dans le sens de Carathéodory et telles que $\beta(A) = 1$. Les fonctions numériques qui sont β-mesurables, sont les fonctions pour lesquelles «il existe la limite», soit liminf = = limsup, suivante le filtre-support de β.

On dit *filtre associé à une famille d'esnembles $\mathcal{B}$ précroissante* (voir Choquet [4]), le filtre $F(\mathcal{B}) = \{A \in \mathcal{B}^{cr}\colon A \cap B \in \mathcal{B}^{cr}$ pour tout $B \in \mathcal{B}\}$. Ce filtre $F(\mathcal{B})$ est le support de $\chi_{\mathcal{B}^{cr}}$. Donc

$$A \in F(\mathcal{B}) \text{ si et seulement si } \lim_{\mathcal{B}} f = \lim_{\mathcal{B}} f\chi_A \text{ pour tout } f \in \overline{\mathbb{R}}^X, \tag{8}$$

$$F(\mathcal{B}) = F(\mathcal{B}^\#)\,. \tag{9}$$

Enfin soient $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ et $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(Y)$ deux familles d'ensembles précroissantes. On désigne avec $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ la famille croissante sur $X \times Y$, engendrée par les ensembles $A \times B$, où $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{B}$. Alors on a:

$$F(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) \supset F(\mathcal{A}) \times F(\mathcal{B})\,. \tag{10}$$

REMARQUE. Let intégrales par rapport à une fonction d'ensemble croissante à valeurs dans $\{0, 1\}$ on été employées dans [7] afin de caractériser les fonctions measurables par rapport à une famille d'ensembles. En effet soit $\mathbb{H}$ une famille d'ensembles telle que $\emptyset \in \mathbb{H}$ et $X \in \mathbb{H}$. On dit q'une fonction numérique f est $\mathbb{H}$-measurable, si pour chaque couple $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a > b$, il existe un ensemble $H \in \mathbb{H}$ tel que $\{f > a\} \subset H \subset \{f > b\}$. Alors *une fonction* $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ *est* $\mathbb{H}$-*measurable si et seulement si pour chaque couple* $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ *de familles d'ensembles croissantes sur* X, *telle que* $\mathcal{A} \cap \mathbb{H} = \mathcal{B} \cap \mathbb{H}$, *on a* $\lim\limits_{\mathcal{A}} f = \lim\limits_{\mathcal{B}} f$.

2. – Limites et Γ-limites.

Si $\mathcal{F}$ est un filtre sur X, il résulte

$$\lim_{\mathcal{F}} f = \liminf_{\mathcal{F}} f \quad \text{et} \quad \lim_{\mathcal{F}^\#} f = \limsup_{\mathcal{F}} f . \tag{1}$$

Dans le cas particulier où $\mathcal{F}$ est le filtre $\mathcal{N}_\iota(A)$ engendré par un ensemble A on a

$$\lim_{\mathcal{N}_\iota(A)} f = \inf_A f \quad \text{et} \quad \lim_{\mathcal{N}_\iota(A)} f = \sup_{\mathcal{F}} f . \tag{2}$$

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des ensembles sur lesquels on a, respectivement, les filtres $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_n$. Soit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ une suite de signes $+$ ou $-$; on pose $\text{ext}^+ = \sup$ et $\text{ext}^- = \inf$; on définit alors, suivant [8], les Γ-limites de De Giorgi [1]:

$$\Gamma(\mathcal{F}_1^{\alpha_1}, \ldots, \mathcal{F}_n^{\alpha_n}) \lim f = \operatorname*{ext}^{-\alpha_n}_{B_n \in \mathcal{F}_n} \ldots \operatorname*{ext}^{-\alpha_1}_{B_1 \in \mathcal{F}_1} \operatorname*{ext}^{\alpha_1}_{x_1 \in B_1} \ldots \operatorname*{ext}^{\alpha_n}_{x_n \in B_n} f(x_1, \ldots, x_n) . \tag{3}$$

Si $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ et $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(Y)$ sont deux familles précroissantes, on a

$$\lim_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}} f = \sup_{B \in \mathcal{B}} \liminf_{x, \mathcal{A}} \inf_{y \in B} f(x, y) \quad \text{et} \quad \lim_{(\mathcal{A} \times \mathcal{B})^\#} f = \inf_{B \in \mathcal{B}} \limsup_{x, \mathcal{A}} \sup_{y \in B} f(x, y) ; \tag{4}$$

et les supports de ces limites contiennent le filtre $F(\mathcal{A}) \times F(\mathcal{B})$, d'après les propriétés (9), (10) du par. 1.

Donc les Γ-limites de De Giorgi sont les limites qui obéissent à ces régles: (a) toute limite suivant un filtre est une Γ-limite; (b) la limite

$\lim\limits_{\mathcal{B}^\#}$ est une Γ-limite, lorsque $\lim\limits_{\mathcal{B}}$ est une Γ-limite; (c) $\lim\limits_{\mathcal{B}\times\mathcal{F}}$ est une Γ-limite, lorsque $\mathcal{F}$ est un filtre et $\lim\limits_{\mathcal{B}}$ une Γ-limite.

Le soutien des Γ-limites (3) est $\left(\dots\left((\mathcal{F}_1^{-\alpha_1\alpha_2}\times\mathcal{F}_2)^{-\alpha_2\alpha_3}\times\mathcal{F}_3\right)^{-\alpha_3\alpha_4}\times\times\dots\mathcal{F}_n\right)^{\alpha_n}$, où on pos $\mathcal{F}^-=\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^+=\mathcal{F}^\#$; leur support contient le filtre $\mathcal{F}_1\times\mathcal{F}_2\times\dots\times\mathcal{F}_n$.

Si on substitue la règle (c) avec (c'): «toute limite suivant l'intersection des familles $\mathcal{B}\times\mathcal{F}$, où $\mathcal{F}$ parcourt un ensemble F de filtres non vide, est une Γ-limite, si la limite suivant $\mathcal{B}$ est une Γ-limite», on obtient les Γ-limites dans les structures de convergence pseudotopologiques (voir [11]). Ici l'ensemble F peut jouer le rôle de l'ensemble de tous le filtres (ou de tous les filtres élémentaires) convergents vers un point.

3. Inégalités entre limites.

Dans la théorie des Γ-limtes on considère plusieurs inégalités. Une partie de celles-ci se remène à

$$\lim_{\mathcal{B}} f \leqslant \lim_{\mathcal{A}} f\,, \qquad \text{si } \mathcal{B}\subset\mathcal{A}^{\mathrm{cr}}\,. \tag{1}$$

D'autres se ramènent aux inégalités suivantes:

$$\psi(\lim_{\mathcal{F}} f, \lim_{\mathcal{B}} g) \leqslant \lim_{\mathcal{B}} \psi(f,g) \leqslant \psi(\lim_{\mathcal{F}^\#} f, \lim_{\mathcal{B}} g)\,, \tag{2}$$

$$\lim_{\mathcal{F}} \psi(f,g) \leqslant \psi(\lim_{\mathcal{B}} f, \lim_{\mathcal{B}^\#} g) \leqslant \lim_{\mathcal{F}^\#} \psi(f,g)\,, \tag{3}$$

où $\mathcal{F}$ est un filtre moins fin que $F(\mathcal{B})$, et $\psi\colon \overline{\mathbf{R}}\times\overline{\mathbf{R}}\to\overline{\mathbf{R}}$ est une fonction continue et non décroissante dans les deux variables. En effet d'après (2) (3), si $\mathcal{F}_1,\dots,\mathcal{F}_n$ sont de filtres, on a bien (voir prop. 1.11 [9] et prop. 1.11 [10] pour $\mathcal{F}=\mathcal{F}_1\times\mathcal{F}_2\times\dots\times\mathcal{F}_n$:

$$\begin{aligned}\psi(\liminf_{\mathcal{F}} f, \Gamma(\mathcal{F}_1^{\alpha_1},\dots,\mathcal{F}_n^{\alpha_n})\lim g) \leqslant \Gamma(\mathcal{F}_1^{\alpha_1},\dots,\mathcal{F}_n^{\alpha_n})\lim \psi(f,g) \leqslant \\ \leqslant \psi(\limsup_{\mathcal{F}} f, \Gamma(\mathcal{F}_1^{\alpha_1},\dots,\mathcal{F}_n^{\alpha_n})\lim g)\,,\end{aligned} \tag{2'}$$

$$\begin{aligned}&\liminf_{\mathcal{F}} \psi(f,g) \leqslant \\ &\leqslant \psi(\Gamma(\mathcal{F}_1^{\alpha_1},\dots,\mathcal{F}_n^{\alpha_n})\lim f, \Gamma(\mathcal{F}_1^{-\alpha_1},\dots,\mathcal{F}_n^{-\alpha_n})\lim g) \leqslant \limsup_{\mathcal{F}} \psi(f,g)\,.\end{aligned} \tag{3'}$$

D'autres enfin se ramènent à une notion d'équi-semicontinuité (voir th. 4.1 et 4.4 [8]). En effet soient $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ et $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{P}(Y)$ des familles croissantes. On dit qu'une fonction f est *équi-*$(\mathcal{M}; \mathcal{B}/\mathcal{A})$-*semicontinue*, si pour tout $\varepsilon > 0$ et $A \in \mathcal{A}$ il existe $B \in \mathcal{B}$ et $M \in F(\mathcal{M})$ tels que

$$\inf_{y \in B} f(x, y) \geqslant \inf_{y \in A} f(x, y) - \varepsilon$$

pour tout $x \in M$. Alors l'équi-$(\mathcal{M}; \mathcal{B}/\mathcal{A})$-semicontinuité de f implique

$$\lim_{\mathcal{M} \times \mathcal{A}} f \leqslant \lim_{\mathcal{M} \times \mathcal{B}} f \,. \tag{4}$$

4. Egalités entre limites.

On peut obtenir de nombreuses expressions de limites, en écrivant leur soutien au moyen de réunions ou d'intersections d'autres familles croissantes. En effet si I est un ensemble non vide, et $\mathcal{B}_i$ est une famille d'ensembles croissante pour tout $i \in I$, de la propriété (7) du par. 2 on déduit les égalités:

$$\lim_{\cap \mathcal{B}_i} f = \inf_{i \in I} \lim_{\mathcal{B}_i} f \quad \text{et} \quad (\cap \mathcal{B}_i)^{\#} = \cup \mathcal{B}_i^{\#} \,, \tag{1}$$

$$\lim_{\cup \mathcal{B}_i} f = \sup_{i \in I} \lim_{\mathcal{B}_i} f \quad \text{et} \quad (\cup \mathcal{B}_i)^{\#} = \cap \mathcal{B}_i^{\#} \,, \tag{2}$$

Exemple 1. Tout filtre $\mathcal{F}$ est une intersection de ses ultrafiltres $\mathcal{U}$ et sa grille est une réunion des mêmes ultrafiltres, donc on a les égalités bien connues:

$$\lim_{\mathcal{F}} f = \inf_{\mathcal{U} \supset \mathcal{F}} (\lim_{\mathcal{U}} f) \quad \text{et} \quad \lim_{\mathcal{F}^{\#}} f = \sup_{\mathcal{U} \supset \mathcal{F}} (\lim_{\mathcal{U}} f) \,. \tag{3}$$

Exemple 2. Dans un espace toplogique localement dénombrable (ou, en général, dans les espaces de Fréchet), tout filtre $\mathcal{F}$ de voisinages est une intersection des filtres $\mathcal{E}$ élémentaires qui le contiennent et sa grille est la réunion des mêmes filtres élémentaires. Donc on a les égalités suivantes:

$$\lim_{\mathcal{F}} f = \inf_{\mathcal{E} \supset \mathcal{F}} (\liminf_{\mathcal{E}} f) = \inf_{\mathcal{E} \supset \mathcal{F}} (\limsup_{\mathcal{E}} f) \tag{4}$$

$$\lim_{\mathcal{F}^{\#}} f = \sup_{\mathcal{E} \supset \mathcal{F}} (\limsup_{\mathcal{E}} f) = \sup_{\mathcal{E} \supset \mathcal{F}} (\liminf_{\mathcal{E}} f) \,. \tag{4'}$$

EXAMPLE 3. Pour toute famille précroissante il résulte $\mathcal{B}^{\mathrm{cr}} = \bigcap_{A \in \mathcal{B}^\#} \mathcal{N}_\iota(A)^\#$ et $\mathcal{B}^\# = \bigcap_{A \in \mathcal{B}} \mathcal{N}_\iota(A)^\#$. Donc d'après la propriété (2) du par. 2, on a

$$\lim_{\mathcal{B}} f = \inf_{A \in \mathcal{B}^\#} \sup_A f \quad \text{et} \quad \lim_{\mathcal{B}^\#} f = \inf_{A \in \mathcal{B}} \sup_A f\,. \tag{5}$$

EXEMPLE 4. Toute famille d'ensemble croissante $\mathcal{B}$ est une réunion de filtres plus fins que $F(\mathcal{B})$ (voir Choquet [4]); de façon plus précise $\mathcal{B} = \bigcup_{A \in \mathcal{B}} (F(\mathcal{B}) \vee A)$, où $F(\mathcal{B}) \vee A$ est le filtre engendré par $F(\mathcal{B})$ et A. Donc:

$$\lim_{\mathcal{B}} f = \sup_{A \in \mathcal{B}} \lim_{F(\mathcal{B}) \vee A} f = \inf_{A \in \mathcal{B}^\#} \lim_{(\mathcal{F}(\mathcal{B}) \vee A)^\#} f\,, \tag{6}$$

$$\lim_{\mathcal{B}^\#} f = \inf_{A \in \mathcal{B}} \lim_{(F(\mathcal{B}) \vee A)^\#} f = \sup_{A \in \mathcal{B}^\#} \lim_{(F(\mathcal{B}) \vee A)} f\,. \tag{7}$$

EXEMPLE 5. Soit $\mathcal{N}$ le filtre de Fréchet sur l'ensemble des nombres naturels et soit $\mathcal{F}$ un filtre à base dénombrable. Etant $\mathcal{N}^\# \times \mathcal{F} = \bigcap_{\mathcal{E} \supset \mathcal{F}} (\mathcal{N} \circ \mathcal{E})^\#$, où $\mathcal{E}$ est le filtre élémentaire associé à une suite $\{x_n\}_n$ (on écrit $\mathcal{E} \equiv \{x_n\}_n$) et $\mathcal{N} \circ \mathcal{E} \equiv \{(n, x_n)\}_n$, on a (voir [9] prop. 3.1):

$$\lim_{\mathcal{N}^\# \times \mathcal{F}} f = \Gamma(\mathcal{N}^+, \mathcal{F}^-) \lim f = \inf_{\{x_n\}_n \supset \mathcal{F}} \limsup_n f(x, n_n)\,. \tag{8}$$

EXEMPLE 6. Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ des filtres à base dénombrable. Etant $F^\# \times \mathcal{G} = \bigcup_{\mathcal{E} \supset \mathcal{F}} \bigcap_{\mathcal{E}' \supset \mathcal{G}} (\mathcal{E} \circ \mathcal{E}')^\#$, où $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ sont des filtres élémentaires, il résulte (voir [10] prop. 3.3):

$$\lim_{\mathcal{F}^\# \times \mathcal{G}} f = \Gamma(\mathcal{F}^+, \mathcal{G}^-) \lim f = \sup_{\{x_n\}_n \supset \mathcal{F}} \inf_{\{y_n\}_n \supset \mathcal{G}} \limsup_n f(x_n, y_n)\,. \tag{9}$$

EXEMPLE 7. Si $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre, on a $\mathcal{U}^\# \times \mathcal{G} = \mathcal{U} \times \mathcal{G}$; donc la Γ-limite $\Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{G}^-) \lim f$ « existe » (c'est-à-dire $\Gamma(\mathcal{U}^+, \mathcal{G}^-) \lim f = \Gamma(\mathcal{U}^-, \mathcal{G}^-) \lim f$) pour toute fonction f. D'autre part, si $\mathcal{F}$ est un filtre il résulte $\mathcal{F}^\# \times \mathcal{G} = \bigcup_{\mathcal{U} \supset \mathcal{F}} (U \times \mathcal{G})$ et $\mathcal{F} \times \mathcal{G} = \bigcap_{\mathcal{U} \supset \mathcal{F}} (\mathcal{U} \times \mathcal{G})$, où $\mathcal{U}$ parcourt les ultrafiltres plus fins que le filtre $\mathcal{F}$. D'après (1) et (2) on a donc

$$\Gamma(\mathcal{F}^+, \mathcal{G}^-) \lim f = \sup_{\mathcal{U} \supset \mathcal{F}} \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{G}^-) \lim f \tag{10}$$

et

$$\Gamma(\mathcal{F}^-, \mathcal{G}^-) \lim f = \inf_{\mathcal{U} \supset \mathcal{F}} \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{G}^-) \lim f .$$

La première de ces égalités est une différente formulation de la proposition 1.14 de [10]

De la même façon on peut obtenir d'autres égalités sur les Γ-limites, connues ou non.

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. De Giorgi, *Γ-convergenza e G-convergenza*, Boll. Un. Mat. Ital., (5), **14**-A (1977), pp. 213-220.

[2] G. Vitali, *Sulla definizione d'integrale delle funzioni di una variabile reale*, Ann. Mat. Pura e Appl., (IV), **2** (1925), pp. 111-121.

[3] G. Choquet, *Theory of capacities*, Ann. Inst. Fourier, **5** (1953), pp. 131-295.

[4] G. Choquet, *Sur les notions de filtre et de grille*, C. R. Acad. Sc. Paris, **224** (1947), pp. 171-173.

[5] S. Dolecki - G. H. Greco - A. Lechicki, *Compactoid and compact filters*, Pacific J. Math. (à paraître).

[6] G. H. Greco, *Integrale monotono*, Rend. Sem. Mat. Padova, **57** (1977), pp. 149-166.

[7] G. H. Greco, *Sur la mesurabilité d'une fonction numérique par rapport à une famille d'ensembles*, Rend. Sem. Mat. Padova, **65** (1981), pp. 163-176.

[8] S. Dolecki, *Tangency and differentiation: some applications of convergence theory*, Ann. Mat. Pura e Appl., (IV), **130** (1982), pp. 223-255.

[9] E. De Giorgi - T. Franzoni, *Su un tipo di convergenza variazionale*, Atti Acc. Naz. Lincei Rend., **58** (8) (1975), pp. 842-850.

[10] G. Buttazzo, *Su una definizione generale dei Γ-limiti*, Boll. Un. Mat. It., (5), **14**-B (1977), pp. 722-744.

[11] G. Moscariello: *Γ-limiti in spazi con convergenza*, Ricerche di Mat. Napoli, **28** (1979), pp. 301-321.

[12] K. Kuratowski - A. Mostowski, *Set theory*, North-Holland Publ. Company, 1976.

Manoscritto pervenuto in redazione il 9 aprile 1983.