Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Oscar Stefani

# Condizioni di continuità in una misura approssimante

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, tome 73 (1985), p. 271-277

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1985__73__271_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
*Article numérisé dans le cadre du programme*
*Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 73 (1985)

# Condizioni di continuità in una misura approssimante.

OSCAR STEFANI (*)

Sia $(X, \varrho)$ uno spazio metrico, sia $E \subset X$ e sia $d(E)$ il diametro di $E$; si dice che l'insieme $E$ è $\delta$-massimale se $d(E) = \delta$ e se $X \supset A \supset E$, con $d(A) = \delta$, implica $A = E$. È noto che negli spazi euclidei gli insiemi $\delta$-massimali coincidono con quelli ad ampiezza costante $\delta$. In [S.Z] sono state date delle condizioni sufficienti affinchè le misure approssimanti la misura unidimensionale di Hausdorff di un insieme $\delta$-massimale $E$ e della sua frontiera $\partial E$, non presentino discontinuità nel punto $t = \delta$.

Nel presente lavoro dimostreremo che le stesse condizioni sono anche necessarie, e ne daremo delle altre equivalenti (teorema § 2).

Per la terminologia e le notazioni usate facciamo riferimento a [S.Z] ed a [S]. In particolare per i simboli: $\mu(\cdot)$, $m(\cdot)$, $l(\cdot)$, $\nu_\delta(\cdot)$, $(\cdot)^s$, $s_\delta(\cdot)$, $\omega$, $N_R$, $K_0$, $\mathcal{K}$, $f(\cdot)$, $R(\cdot)$ si veda [S.Z]; per i simboli $\mu_\delta(\cdot)$, $N^*$, $N'$, e per la definizione di $\delta$-ricoprimento ottimale si veda [S].

Per le proprietà degli insiemi ad ampiezza costante negli spazi euclidei si veda, tra l'altro, [V], Th. 12.19 e [E], Ch. VII.

Lo spazio in cui opereremo sarà sempre $\mathbb{R}^2$ euclideo e quando avremo a che fare con un ricoprimento $\mathcal{F} = \{F_i, i \in N^*\}$ tale che $\sum d(F_i) < +\infty$, intenderemo sempre che gli insiemi $F_i$ siano ordinati per diametri decrescenti, cioè: se $i > j$, allora $d(F_i) \leqslant d(F_j)$.

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica Applicata, Università di Padova, Via Belzoni 7 - 35131 Padova.

Ricerca effettuata con fondi erogati dal M.P.I.

**1.** Premettiamo due lemmi che useremo nella dimostrazione del Teorema del § 2.

LEMMA 1. *Sia $E$ $\delta$-massimale in $\mathbb{R}^2$ euclideo, sia $\delta^*$ tale che $0 < \delta^* < \delta$ e sia $\mathcal{F} = \{F_i,\ i = 1, \dots, n\}$ un $\delta^*$-ricoprimento ottimale finito di $\partial E$, allora esistono due indici $p$ e $q$, con $p \neq q$, $1 < p \leqslant n$, $1 < q \leqslant n$, tali che $F_1 \cap F_p \neq \emptyset$ e $F_1 \cap F_q \neq \emptyset$.*

DIM. Posto $d_1 = d(F_1)$, è $d_1 \leqslant \delta^* < \delta$; poichè $\mathcal{F}$ è ottimale, $d(F_1 \cap \partial E) = d_1$; esistono quindi, data la compattezza di $F_1 \cap \partial E$, $x_1$, $x_2 \in F_1 \cap \partial E$ tali che $|x_1 - x_2| = d_1$. Sia $u = (x_1 - x_2)/|x_1 - x_2|$, siano $r$ ed $s$ le due rette per $x_1$ e $x_2$ rispettivamente, ortogonali ad $u$, sia $\pi_1$ il semipiano delimitato da $r$ e non contenente $s$, e $\pi_2$ il semipiano delimitato da $s$ non contenente $r$; ricordando le proprietà della rappresentazione canonica di $\partial E$: $f: \omega \to \mathbb{R}^2$, costruita mediante le rette d'appoggio, poichè $r$ ed $s$ non possono essere rette d'appoggio, è immediato vedere che $f(u)$ è interno a $\pi_1$ e $f(-u)$ è interno a $\pi_2$.

Sia $\Gamma_1$ l'arco di $\partial E$ di estremi $x_1$ e $f(u)$ e contenuto in $\pi_1$, e $\Gamma_2$ l'arco di $\partial E$ gli estremi $x_2$ e $f(-u)$ e contenuto in $\pi_2$, è evidente che:

1.A $\quad \forall x \in \Gamma_1 \setminus \{x_1\}$, $|x - x_2| > d_1$ e quindi $\Gamma_1 \cap F_1 = \{x_1\}$ ,

1.B $\quad \forall x \in \Gamma_2 \setminus \{x_2\}$, $|x - x_1| > d_1$ e quindi $\Gamma_2 \cap F_1 = \{x_2\}$ .

Da 1.A segue che $\Gamma_1 \setminus \{x_1\} \subset \bigcup_{i=2}^{n} (F_i \cap \Gamma_1)$ e pertanto $\Gamma_1 = \bigcup_{i=2}^{n} (F_i \cap \Gamma_1)$, ma allora esiste un $p > 1$ tale che $x_1 \in F_p$ e quindi $F_1 \cap F_p \neq \emptyset$. Da 1.B segue che $\Gamma_2 \setminus \{x_2\} \subset \bigcup_{i=2}^{n} (F_i \cap \Gamma_2)$, e da 1.B e dal fatto che $x_1 \in F_p$ e $d(F_p) \leqslant d_1$ segue che:

$$\Gamma_2 \setminus \{x_2\} \subset \bigcup_{\substack{2 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq p}} (F_i \cap \Gamma_2) \qquad \text{da cui} \qquad \Gamma_2 = \bigcup_{\substack{2 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq p}} (F_i \cap \Gamma_2)$$

e quindi esiste un $q > 1$, $q \neq p$ tale che $x_2 \in F_q$, pertanto $F_q \cap F_1 \neq \emptyset$. //

LEMMA 2. *Sia $C$ chiuso e convesso in $\mathbb{R}^2$ euclideo, sia $D \subset \partial C$; se esistono $\delta > 0$ e $k > 0$ tali che $\nu_\delta(D) < k$, allora si ha: $\mu(D) < \pi k$.*

DIM. Poichè $\nu_\delta(D) < k$ esiste un $\delta$-ricoprimento ottimale $\mathcal{F} = \{F_i,\ i \in N^*\}$ di $D$ (cfr. [S], Prop. 4) tale che:

2.A $\quad \sum d(F_i) < k$ .

Si ha ovviamente:

2.B $$\mu(D) \leqslant \sum \mu(D \cap F_i) \leqslant \sum \mu(\partial C \cap F_i) \leqslant \sum \mu\big(\partial(C \cap F_i)\big) .$$

Poichè $\mathcal{F}$ è ottimale, per ogni $i \in N^*$, $F_i$ è ad ampiezza costante $d(F_i)$; dal fatto, poi, che $F_i \cap C$ è compatto e convesso ed $F_i \cap C \subset F_i$, per note proprietà dei convessi (cfr. [L], sec. 22 e sec. 11) si ha:

2.C $$\mu\big(\partial(C \cap F_i)\big) \leqslant \mu(\partial F_i) = \pi d(F_i) .$$

Da 2.B, 2.C, 2.A segue subito la tesi. //

**2.** Sia $I \subset \mathbb{R}^2$ ricordiamo che dire che $\nu_t(I)$ è continua, come funzione di $t$, per $t = \delta$, equivale a dire che $s_\delta(I) = 0$. Con riferimento al seguente Teorema, in [S.Z] si è dimostrato che: viii $\Rightarrow$ v $\Rightarrow$ vi $\Rightarrow$ i.

TEOREMA. *Sia $\delta > 0$ e sia $E$ $\delta$-massimale in $\mathbb{R}^2$ euclideo, le seguenti proposizioni sono equivalenti*:

i) $s_\delta(\partial E) = 0$;

ii) $\forall \varepsilon > 0$ *e* $\forall \theta$: $0 < \theta < \delta$, *esiste un* $\delta^*$, *con* $0 < \delta^* < \delta$ *e un* $\delta^*$-*ricoprimento ottimale finito* $\mathcal{F} = \{F_i, i \in N^*\}$ *di* $\partial E$ *tale che* $\sum d(F_i) < \delta + \varepsilon$ *e* $\theta < d(F_1)$;

iii) $\forall \varepsilon > 0$ *esiste un ricoprimento chiuso* $\mathcal{F} = \{F_i, i \in N^*\}$ *di* $\partial E$ *tale che* $\sum d(F_i) < \delta + \varepsilon$ *e* $\delta - \varepsilon < d(F_1) < \delta$;

iv) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists K \in \mathcal{K}$ *tale che* $\nu_\delta(f(K)) < \varepsilon$;

v) $\inf\{\nu_\delta(f(K)), K \in \mathcal{K}\} = 0$;

vi) $s_\delta(E) = 0$;

vii) $\forall \varepsilon > 0$ *esiste un ricoprimento chiuso* $\mathcal{F} = \{F_i, i \in N^*\}$ *di* $E$ *tale che* $\sum d(F_i) < \delta + \varepsilon$ *e* $\delta - \varepsilon < d(F_1) < \delta$;

viii) $m(K_0) = \pi$.

DIM.

i $\Rightarrow$ ii. Poichè $s_\delta(\partial E) = 0$, $\nu_t(\partial E)$ è continua in $t = \delta$, allora è continua anche $\mu_t(\partial E)$ ed in particolare è:

$$\lim_{t \to \delta^-} \mu_t(\partial E) = \mu_\delta(\partial E) = \nu_\delta(\partial E) = \delta .$$

Fissati $\varepsilon$ e $\theta$, posto

3.A $\qquad \varepsilon_1 = \min\{\varepsilon, (\delta - \theta)/3\}$

esiste un ricoprimento aperto, che per la compattezza di $\partial E$ non è restrittivo supporre finito, $\mathcal{G} = \{G_i, i = 1, ..., n\}$, tale che

$$\sum d(G_i) < \delta + \varepsilon_1 \qquad \text{e} \qquad d(G_1) < \delta .$$

Preso $\delta^*$ tale che:

3.B $\qquad \max\{\delta - \varepsilon_1, d(G_1)\} < \delta^* < \delta ,$

$\mathcal{G}$ è un $\delta^*$-ricoprimento di $\partial E$; esiste quindi (vedi [S], Prop. 3) un $\delta^*$-ricoprimento ottimale finito $\mathcal{F} = \{F_i, i = 1, ..., m\}$ di $\partial E$ tale che:

3.C $\qquad \sum_{i=1}^{m} d(F_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} d(G_i) < \delta + \varepsilon_1 .$

$\mathcal{F}$ è il ricoprimento cercato. Siano, infatti, $F_p$ ed $F_q$ due insiemi intersecanti $F_1$, di cui si è dimostrata l'esistenza nel Lemma 1; posto, per $1 \leqslant i \leqslant m$, $d_i = d(F_i)$, per proprietà dei ricoprimenti ottimali (cfr. [S], 5.1) e la 3.B si ha:

$$d_1 + d_p > \delta^* > \delta - \varepsilon_1 , \qquad d_1 + d_q > \delta^* > \delta - \varepsilon_1 .$$

Dalla seconda relazione si ricava: $d_q > \delta - \varepsilon_1 - d_1$.
Ora se fosse $d_1 \leqslant \theta$ si avrebbe:

$$d_1 + d_p + d_q > 2\delta - 2\varepsilon_1 - \theta \geqslant \delta + \varepsilon_1 ,$$

ma questo sarebbe in contraddizione con 3.C; pertanto $d(F_1) > \theta$; 3.C e 3.A implicano inoltre che $\sum d(F_i) < \delta + \varepsilon$.

ii $\Rightarrow$ iii. Basta prendere $\theta = \max\{\delta/2, \delta - \varepsilon\}$.

iii $\Rightarrow$ iv. Dimostriamo che iii implica che, per ogni $\varepsilon$, esiste un aperto $A \subset \omega$ tale che:

3.D.1 $\quad A \supset K_0$;

3.D.2 $\quad$ se $u \notin A$, allora $-u \in A$;

3.D.3 $\quad \nu_\delta(f(A)) < \varepsilon$.

Non è restrittivo supporre $\varepsilon < \delta/2$. Poichè $\mu(f(K_0)) = 0$ ([S.Z], Coroll. 9.A) esiste un ricoprimento aperto $\mathcal{G} = \{G_i,\ i \in N^*\}$ di $f(K_0)$ tale che $\sum d(G_i) < \varepsilon/2$.

Posto $G' = \left(\bigcup G_i\right) \cap \partial E$, $G'$ è aperto in $\partial E$ e poichè $\varepsilon < \delta$ si ha:

$$\nu_\delta(G') \leqslant \sum d(G_i) < \varepsilon/2\ .$$

In base a iii, fissato $\varepsilon$, esiste un ricoprimento chiuso $\mathcal{F} = \{F_i,\ i \in N'\}$ tale che $\sum d(F_i) < \delta + \varepsilon/4$ e $\delta - \varepsilon/4 < d(F_1) < \delta$. Sia $G'' = \partial E \setminus F_1$; $G''$ è aperto in $\partial E$ e $G'' \subset \bigcup\limits_{N'\setminus\{1\}} F_i$; ne segue facilmente che:

$$\nu_\delta(G'') \leqslant \sum_{N'\setminus\{1\}} d(F_i) = \sum_{N'} d(F_i) - d(F_1) < \varepsilon/2\ .$$

Ma allora $\nu_\delta(G' \cup G'') < \varepsilon$.
Sia $A = f^{-1}(G' \cup G'')$, $A$ è l'aperto di $\omega$ cercato. Infatti, $A \supset K_0$, poichè $f(K_0) \subset G'$; se $u \notin A$, allora $-u \in A$; infatti se $u \notin A$ e $-u \notin A$, allora $f(u), f(-u) \notin G' \cup G''$ e quindi in particolare $f(u), f(-u) \notin G''$. Quindi $f(u), f(-u) \in F_1$; il che è in contraddizione col fatto che $d(F_1) < \delta$. Ora, poichè $f(A) = G' \cup G''$, è $\nu_\delta(f(A)) < \varepsilon$. Pertanto $A$ verifica le proprietà 3.D.

Si costruisca infine un insieme $K \in \mathcal{K}$ tale che $K \subset A$. Basta a tal fine considerare l'insieme $K'$ di cui all'Osservazione 0.B di [S.Z] e prendere: $K = (A \cap K') \cup (K' \setminus A)^s$. Dalla disuguaglianza $\nu_\delta(f(K)) \leqslant \leqslant \nu_\delta(f(A))$ segue la iv.

iv $\Rightarrow$ v. È immediata.

v $\Rightarrow$ vi. È immediata conseguenza della Prop. 11 di [S.Z].

vi $\Rightarrow$ i. È immediata.

vii $\Rightarrow$ iii. È immediata.

ii $\Rightarrow$ vii. Non è restrittivo supporre $\varepsilon < \delta/10$. Fissato $\theta = \delta - \varepsilon$, sia $\mathcal{F} = \{F_i,\ i = 1, \ldots, n\}$ il $\delta^*$-ricoprimento ottimale di $\partial E$ di cui ii afferma l'esistenza. Per dimostrare che l'implicazione è vera, basterà dimostrare che $\mathcal{F}$ è un ricoprimento anche di $E$.

Data l'ipotesi su $\varepsilon$ ed il valore di $\theta$ è immediato che:

$$\sum_{i=2}^{n} d(F_i) < 2\varepsilon < 2\delta/10 < \delta^*/2\,; \qquad \text{allora } d(F_i) < \delta^*/2, \text{ per } i \geqslant 2\ .$$

Questo per proprietà dei ricoprimenti ottimali (cfr. [S], 5.2) implica $F_i \cap F_j = \emptyset$ per $i \neq j$ e $i, j > 1$.

Sia $G = \partial E \setminus F_1$, $G$ è aperto in $\partial E$, pertanto $G = \bigcup \Delta_i$, ove $\Delta_i$ sono archi aperti disgiunti e l'unione indicata è al più numerabile. Dimostriamo che:

3.E Per ogni $i$, esiste un $j^*$ con $2 \leqslant j^* \leqslant n$ tale che $\Delta_i \subset F_{j^*}$.

In caso contrario, infatti, poichè $G \subset \bigcup_{j=2}^{n} F_j$, si avrebbe

$$\Delta_i = \bigcup_{j=2}^{n} (F_j \cap \Delta_i)$$

che, essendo per ogni $j$, $F_j \cap \Delta_i$ chiuso in $\Delta_i$, sarebbe in contraddizione con la connessione di $\Delta_i$.

Poichè $\mathcal{F}$ è un ricoprimento di $\partial E$, per dimostrare che è un ricoprimento anche di $E$ basterà dimostrare che $E^\circ \setminus F_1 \subset \bigcup_{j=2}^{n} F_j$. A tal fine, sia $x \in E^\circ \setminus F_1$, poichè $x \notin F_1$, che è compatto e convesso, esiste una retta $r$ passante per $x$, senza punti in comune con $F_1$; è facile vedere che $r$ incontra $\partial E$ in due punti $x_i, y_i$ appartenenti ad uno stesso $\Delta_i$; per la 3 E esiste quindi un $j^*$: $2 \leqslant j^* \leqslant n$ tale che $x_i, y_i \in F_{j^*}$, ma poichè $F_{j^*}$ è convesso anche $x \in F_{j^*}$ e quindi $x \in \bigcup_{j=2}^{n} F_j$.

viii $\Rightarrow$ v. È il Coroll. 11.B di [S.Z].

v $\Rightarrow$ viii. Se $\inf \{\nu_\delta(f(K)), K \in \mathcal{K}\} = 0$, esiste una successione $K_n$ di elementi di $\mathcal{K}$ tali che $\nu_\delta(f(K_n)) < 1/(\pi n^2)$. Per il Lemma 2 segue che $\mu(f(K_n)) < 1/n^2$ e quindi (vedi [S.Z], 0.1) $l(K_n) < 1/n^2$.

Posto $H_n = \{u \in \omega \setminus N_R : R(u) < 1/n\}$ si ha $K_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n$ e quindi:

3.F $m(H_n) \to m(K_0)$ .

Poichè (cfr. [S.Z], 0.3):

$$\frac{1}{n^2} > l(K_n) = \int_{K_n} R(u)\, m(du) \geqslant \int_{K_n \setminus H_n} R(u)\, m(du) \geqslant \frac{1}{n}\, m(K_n \setminus H_n)$$

si ha: $m(K_n \setminus H_n) < 1/n$ e quindi:

3.G $m(K_n \setminus H_n) \to 0$ .

Tenuto conto che (cfr. [S.Z], Prop. 1): $\pi = m(K_n) = m(K_n \setminus H_n) + m(K_n \cap H_n)$ da 3.G segue che:

3.H $\quad m(K_n \cap H_n) \to \pi$ .

Ora, se $m(K_0) \neq \pi$, deve essere $m(K_0) < \pi$.

Ma è facile vedere che, se fosse $m(K_0) < \pi$, tenendo conto del fatto che $m(K_n \cap H_n) \leqslant m(H_n)$, 3.F e 3.H sarebbero in contraddizione tra loro. //

COROLLARIO. *Se $E$ è $\delta$-massimale in $\mathbb{R}^2$ euclideo allora $v_t(E)$ è continua in $t = \delta$ se e solo se è ivi continua $v_t(\partial E)$.*

DIM. È: i $\Leftrightarrow$ vi. //

## BIBLIOGRAFIA


[E] EGGLESTON H. G., *Convexity*, Cambridge University Press, 1963.

[L] LAY S. R., *Convex Sets and Their Applications*, Wiley & Sons, 1982.

[Le] LEICHTWEISS K., *Konvexe Mengen*, Springer, Berlin, 1980.

[R] ROGERS R. A., *Hausdorff measures*, Cambridge University Press, 1970.

[S] STEFANI O., *Ricoprimenti e misure approssimanti*, Rend. Acc. Naz. di Scienze detta dei XL, Memorie di Matematica, 102° (1984), vol. VIII. pagg. 121-136.

[S.Z] STEFANI O. - ZIRELLO G., *Misure approssimanti ed insiemi ad ampiezza costante*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 72 (1984), pp. 191-202.

[V] VALENTINE F. A., *Convex Sets*, McGraw-Hill, New York, 1964.


Manoscritto pervenuto in redazione il 31 gennaio 1984.