

RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

RICCARDO MARCONI

**Il gruppo degli automorfismi esterni di un p -gruppo
nilpotente infinito e suoi p -sottogruppi normali**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 74 (1985), p. 123-127

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1985__74__123_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**Il gruppo degli automorfismi esterni
di un p -gruppo nilpotente infinito
e suoi p -sottogruppi normali.**

RICCARDO MARCONI (*)

È un risultato noto (Schmid, [7]) che il gruppo degli automorfismi esterni di un p -gruppo finito, salvo poche eccezioni ben individuate, ammette un p -sottogruppo non banale normale in esso. Questo risultato estende il famoso teorema di Gaschutz ([2]) sull'esistenza di un automorfismo esterno di ordine p in un p -gruppo finito non identico di ordine diverso da p . Un teorema simile a questo è stato recentemente dimostrato da Menegazzo e Stonehewer ([4]) nel caso dei p -gruppi nilpotenti infiniti. In questo lavoro si esaminerà l'esistenza di un p -sottogruppo non banale normale nel gruppo degli automorfismi esterni di tali gruppi.

1. Le notazioni saranno quelle usuali. Se G è un p -gruppo, $O_p(\text{Out } G)$ sarà il p -sottogruppo normale massimale in $\text{Out } G$. Se A è un sottogruppo normale in G , $X(A)$ sarà il sottogruppo degli elementi x di G tali che $[x, G]$ è contenuto in A . Si osserva che se A è caratteristico in G , $X(A)$ è caratteristico in G . Se M, N sono sottogruppi caratteristici di G , $\text{Aut}^M(G)$ è il gruppo degli automorfismi di G che centralizzano G/M , $\text{Aut}_N(G)$ è il gruppo degli automorfismi di G che centralizzano N e $\text{Aut}_N^M(G)$ ne è l'intersezione. È immediato che $\text{Aut}^M(G)$ e $\text{Aut}_N(G)$ sono normali in $\text{Aut}(G)$. Inoltre $\text{Aut}_M^M(G) \cong Z^1(G/M, Z(M))$, il gruppo degli 1-cocicli da G/M in $Z(M)$, e se M è contenuto in $N \cap Z(G)$,

(*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico dell'Università di Padova' via Belzoni 7, 35131 Padova (Italy).

allora $\text{Aut}_N^M(G) \cong \text{Hom}(G/N, M)$. Altro risultato noto è che se M è abeliano e $|M| > \aleph_0$, allora $|\Omega_1(M)| = |M|$. B denoterà un sottogruppo basilico di G , cioè un sottogruppo contenente G' tale che B/G' è basilico in G/G' come gruppo abeliano. Per le proprietà principali di B si rimanda a [8]. Si richiama che un gruppo del tipo di Hall è un p -gruppo finito non abeliano senza sottogruppi caratteristici abeliani non ciclici. La caratterizzazione di questi gruppi che qui verrà utilizzata si può trovare in [3], Satz III.13.10.

2. Enunciamo il seguente

TEOREMA. *Sia G un p -gruppo nilpotente infinito. Allora $O_p(\text{Out } G) = 1$ se e solo se:*

- 1) G è abeliano elementare,
- 2) G è divisibile e $p \neq 2$,
- 3) G è prodotto centrale di $\Omega_1(G)$ e di un p -gruppo quasi-ciclico, con $\Omega_1(G)$ finito extraspeciale di esponente $p \neq 2$.

DIMOSTRAZIONE. Se G è abeliano elementare finito, è noto ([7], paragrafo 3) che $O_p(\text{Out } G) = 1$. Se G è abeliano elementare infinito, sia $P \trianglelefteq \text{Aut } G$ un p -gruppo. Se $\alpha \in P$, esistono un insieme di indici I e dei sottogruppi G_i di G , con $i \in I$, finiti e stabili per α tali che G sia generato da essi. Se B_i è il sottogruppo di $\text{Aut } G$ che stabilizza G_i e K_i quello che centralizza G_i , allora $B_i/K_i \cong \text{Aut } G_i$. Inoltre $P \cap B_i \trianglelefteq B_i$, quindi $P \cap B_i \leq K_i \forall i \in I$. Abbiamo quindi che $\alpha \in P \cap B_i \leq K_i \forall i \in I$, cioè $\alpha = 1$. Poichè α è generico, $P = 1$.

Se G è divisibile di rango finito, G è di Černikov. Quindi, se $P \trianglelefteq \text{Aut } G$ è un p -gruppo, P è finito per [6], Theorem 3.29.2. Inoltre $\Omega_1(G)$ è finito, di conseguenza $\Omega_1(G)\lambda P$ è nilpotente. Segue che $[\Omega_1(G), P] \not\leq \Omega_1(G)$, ma per la normalità di $P_1[\Omega_1(G), P]$ è caratteristico in G , quindi $[\Omega_1(G), P] = 1$, perchè $\Omega_1(G)$ non ha sottogruppi caratteristici in G non banali. Applicando un risultato dovuto a Baer ([6], Lemma 3.28) si ottiene che, se $p \neq 2$, allora $P = 1$. Se G è divisibile di rango infinito il ragionamento è identico al caso precedente, con le ovvie modifiche, fermo restando che $p \neq 2$.

Nel terzo caso $Z(G)$ è divisibile di rango 1. Sia $P \trianglelefteq \text{Aut } G$ un p -gruppo. Allora la restrizione di P a $\Omega_1(G)$ è costituita da automorfismi interni di $\Omega_1(G)$, per [7], Proposition 3.2., la restrizione di P a $Z(G)$ è il gruppo identico, per [4], 3.1(i). Segue che $P \leq \text{Inn } G$. Vediamo ora che in tutti gli altri casi $O_p(\text{Out } G) \neq 1$.

Se G è un 2-gruppo abeliano non elementare, l'inversione, cioè l'automorfismo che manda $g \in G$ in g^{-1} , ha ordine 2 ed è contenuta in $Z(\text{Aut } G)$, quindi $O_2(\text{Out } G) \neq 1$.

Se G è abeliano non elementare nè divisibile, $\text{Aut}_\varphi^p(G) \cong \text{Hom}(G/\varphi(G), \varphi(G)) \neq 1$, perciò $O_p(\text{Out } G) \neq 1$.

Se G ha un sottogruppo basico B finito, $G = BZ(G)$ ([8], XV)). Se $Z(B) \not\cong \varphi(B)$, allora $\text{Aut}_Z^p(B) \not\cong \text{Inn } B$ ([5], Proposition 3.1). L'applicazione che manda $\alpha \in \text{Aut}_Z^p(B)$ in $\bar{\alpha} \in \text{Aut } G$, l'estensione di α a G che centralizza $Z(G)$, è un omomorfismo iniettivo, la cui immagine è contenuta in $\text{Aut}_Z^p(G)$ e non in $\text{Inn } G$. $\text{Aut}_Z^p(G)$ è un p -gruppo. Infatti $\text{Aut}_Z^p(G)/\text{Aut}_Z^{p \wedge Z}(G)$ è isomorfo a un sottogruppo di $\text{Aut}^p(G/\varphi(G) \cap Z(G))$. $\text{Aut}^p(G/\varphi(G) \cap Z(G))$ è un p -gruppo finito, perchè lo è $G/\varphi(G) \cap Z(G)$. Infatti $G/\varphi(G) \cong B/\varphi(B)$ ([8], XIV)) e $\varphi(G)/\varphi(G) \cap Z(G)$ è isomorfo a un sottogruppo di $G/Z(G)$. Inoltre $\text{Aut}_Z^{p \wedge Z}(G) \cong \text{Hom}(G/Z(G), \varphi(G) \cap Z(G))$, p -gruppo. Perciò $\text{Aut}_Z^p(G) \not\leq \text{Inn } G$ ed è un p -gruppo. Se $Z(B) \geq \varphi(B)$, allora $Z(G) \geq \varphi(G)$ e $\text{Inn } G \leq \text{Aut}_\varphi^p(G) \cong \text{Hom}(G/\varphi(G), \varphi(G))$. $\text{Aut}_\varphi^p(G) = \text{Inn } G$ se e solo se $\varphi(G) = Z(G)$ e $|\Omega_1(\varphi(G))| = p$, cioè se e solo se $Z(G)$ è divisibile di rango 1. In quest'ultimo caso esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $G = \Omega_n(G)Z(G)$ con $\Omega_n(G)$ finito. Sia $P \leq \text{Aut}(\Omega_n(G))$ un p -gruppo che centralizza $Z(\Omega_n(G))$. L'applicazione che manda $\alpha \in P$ in $\bar{\alpha} \in \text{Aut } G$, l'estensione di α a G che è l'identità su $Z(G)$, è un omomorfismo iniettivo e la sua immagine è un p -sottogruppo normale in $\text{Aut } G$, poichè $\Omega_n(G)$ è caratteristico in G . Se $\Omega_n(G)$ non è del tipo di Hall, per [7], Corollary 4.2, esiste un tale $P \not\leq \text{Inn } \Omega_n(G)$. Quindi la sua immagine non è contenuta in $\text{Inn } G$. Se $\Omega_n(G)$ è del tipo di Hall, allora se $p \neq 2$, per [3], Satz III.13.10, $\Omega_n(G) = \Omega_1(\Omega_n(G))Z(\Omega_n(G)) = \Omega_1(G)Z(\Omega_n(G))$, con $\Omega_1(G)$ extraspeciale di esponente p . Quindi $G = \Omega_1(G)Z(G)$ e già sappiamo che in questo caso $O_p(\text{Out } G) = 1$. Se $p = 2$ e $|Z(\Omega_n(G))| = 2$, allora è $n = 1$. Si consideri l'automorfismo che è l'identità su $\Omega_1(G)$ e l'inversione su $Z(G)$. Ha ordine 2 ed è contenuto in $Z(\text{Aut } G)$. Perciò $O_2(\text{Out } G) \neq 1$. Se $|Z(\Omega_n(G))| \geq 4$, in base alla dimostrazione di Satz III.13.10 in [3], si ha che $\Omega_n(G) = EZ(\Omega_n(G))$, con E extraspeciale e $Z(\Omega_n(G))$ ciclico, $\varphi(\Omega_n(G)) \leq Z(\Omega_n(G))$ e $\Omega_n(G) = \Omega_2(\Omega_n(G))Z(\Omega_n(G)) = \Omega_2(G)Z(\Omega_n(G))$, dove $\Omega_2(G) = \{g \in G/g^4 = 1\}$. Segue che $G = \Omega_2(G)Z(G)$ e $Z(G) \cap \Omega_2(G)$ è ciclico di ordine 4. Sia $P \leq \text{Aut}(\Omega_2(G))$ un p -gruppo. L'applicazione che manda $\alpha \in P$ in $\bar{\alpha} \in \text{Aut } G$, l'estensione di α a G che è l'identità o l'inversione su $Z(G)$ a seconda di come agisce su $\Omega_2(G) \cap Z(G)$, è un omomorfismo iniettivo e l'immagine è un 2-sottogruppo normale in $\text{Aut } G$, perchè $\Omega_2(G)$ è caratteristico in G e l'inversione è in $Z(\text{Aut } Z(G))$. Poichè per [7], Proposition 3.3, esiste un tale

$P \notin \text{Inn}(\Omega_2(G))$, allora l'immagine non è contenuta in $\text{Inn } G$.

Se G ha un sottogruppo basico B infinito, si pone $\Delta = \Omega_1(Z(G) \cap G') \cap G'$ e $Y = \Omega_1(Z(X(\Delta)))$. Se $u \in \Delta$, $\text{Aut}_\varphi^{\langle u \rangle}(G) \cong \text{Hom}(G/\varphi(G), \langle u \rangle)$, p -gruppo di cardinalità $2^{|\Delta|}$, per [8], XIV. È lecito supporre $\text{Inn } G \geq \text{Aut}_\varphi^{\langle u \rangle}(G) \geq \text{Aut}_\varphi^{\langle u \rangle}(G) \forall u \in \Delta$. Questo comporta che per ogni $u \in \Delta$ $|X(\langle u \rangle)/Z(G)| = 2^{|\Delta|}$ e quindi, tenendo presente che $C_G(X(\langle u \rangle)) \geq \varphi(G)$, che $|Z(X(\langle u \rangle))| = |\Omega_1(Z(X(\langle u \rangle)))| \geq 2^{|\Delta|}$. In particolare esiste $\bar{u} \in \Omega_1(Z(X(\langle u \rangle))) - G'$. Esiste $v \in G$ tale che $G = \langle v \rangle M$, M massimale con $C_G(\bar{u}) \geq M \geq C_G(X(\Delta)) \geq \varphi(G)$. Se $p \neq 2$, si costruisce un automorfismo α di G , ponendo $\alpha v = v\bar{u}$ e $\alpha m = m \forall m \in M$. Se $\Delta = \langle u \rangle$, allora $\alpha \in \text{Aut}_\varphi^{\langle u \rangle}(G)$. Altrimenti si può supporre $X(\langle u \rangle) \leq \varphi(G)$. Infatti se $g \in X(\langle u \rangle) - \varphi(G)$, $u' \in \Delta - \langle u \rangle$ e $G = \langle g \rangle M$, con M massimale, allora si può definire $\beta \in \text{Aut}_\varphi^{\langle u \rangle}(G)$ in questa maniera: $\beta g = gu'$, $\beta m = m \forall m \in M$. β non è interno, perchè altrimenti esisterebbe $w \in G$, con $[g, w] = u' \notin \langle u \rangle$. Di conseguenza $X(\langle u \rangle) \leq \varphi(G)$ e quindi $X(\langle u \rangle) \leq C_G(X(\Delta)) \cap X(\Delta) \cap C_G(X(\langle u \rangle))$. Perciò $X(\langle u \rangle) = Z(X(\langle u \rangle)) \leq Z(X(\Delta))$ e $\Omega_1(Z(X(\langle u \rangle))) \leq Y$. Quindi in ogni caso $\alpha \in \text{Aut}_\varphi^{\langle u \rangle}(G) \cong Z^1(G/Y, Y)$, p -gruppo e α non è interno. Sia ora $p = 2$. La dimostrazione è pressochè identica a quella del caso $p \neq 2$, ma si devono fare alcune lievi modifiche. Siano $\Gamma = \Omega_1(Z(G) \cap G') \cap \bar{O}_1(Z(G) \cap G')$ e $K = \Omega_1(Z(X(\Gamma))) \Omega_2(Z(G) \cap G')$. Poichè si può supporre $Z(G) \cap G'$ di esponente infinito (altrimenti $|B| \geq |G/Z(G)|$ e $\text{Inn } G \cong \text{Aut}_\varphi^{\langle u \rangle}(G)$, vedi [1], dimostrazione di Theorem 2.4), $\Gamma \neq 1$. Come sopra, si arriva a dimostrare che si può supporre l'esistenza di $\bar{u} \in \Omega_1(Z(X(\langle u \rangle))) - G'$, dove u è un qualsiasi elemento di Γ . Esiste $v \in G$ tale che $G = \langle v \rangle M$, con M massimale e $C_G(\bar{u}) \geq M \geq C_G(X(\Gamma)) \geq \varphi(G)$. Sia $d \in Z(G) \cap G'$ tale che $d^4 = 1$ e $d^2 = [v, \bar{u}]$. Allora si pone $\alpha v = v\bar{u}d$ e $\alpha m = m \forall m \in M$. Alla stessa maniera di prima si vede che $\alpha \in \text{Aut}_\varphi^{\langle u \rangle}(G) \cong Z^1(G/K, K)$, 2-gruppo e α non è interno, potendo supporre che $\bar{u} \in K$. Va osservato che la dimostrazione dell'ultima parte del teorema, quella relativa a B infinito, è un adattamento della dimostrazione già data da Menegazzo e Stonehewer in [4], 2.

BIBLIOGRAFIA

- [1] J. BUCKLEY - J. WIEGOLD, *On the number of outer automorphisms of an infinite nilpotent p-group*, Arch. Math., **31** (1978), pp. 321-328.
- [2] W. GASCHUTZ, *Nichtabelsche p-gruppen besitzen äußere p-Automorphismen*, J. Algebra, **4** (1966), pp. 1-2.

- [3] B. HUPPERT, *Endliche Gruppen I*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1967.
- [4] F. MENEGAZZO - S. STONEHEWER, *On the automorphism group of a nilpotent p -group*, in corso di stampa presso il J. London Math. Soc.
- [5] O. MÜLLER, *On p -automorphisms of finite p -groups*, Arch. Math., **32** (1979), pp. 533-538.
- [6] D. J. S. ROBINSON, *Finiteness conditions and generalized soluble groups*, part 1, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972.
- [7] P. SCHMID, *Normal p -subgroups in the group of outer automorphisms of a finite p -group*, Math. Z., **147** (1976), pp. 271-277.
- [8] A. E. ZALESSKII, *A nilpotent p -group has an outer automorphism*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **196** (1971) (traduzione in inglese: Soviet Math. Dokl., **12** (1971), pp. 127-130).

Manoscritto pervenuto in redazione il 6 luglio 1984.