RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

BIANCA ROSA BELLOMO

Una classe di soluzioni asintotiche per una equazione ellittica degenere

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 75 (1986), p. 111-127
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1986__75__111_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 76 (1986)

Una classe di soluzioni asintotiche per una equazione ellittica degenere.

BIANCA ROSA BELLOMO

1. Introduzione.

In questo lavoro si considera una classe di operatori ellittici degeneri, in un semispazio ($t > 0$) dati da

$$P(t, x, D_t, D_x) = tP_2(t, x, D_t, D_x) + P_1(t, x, D_t, D_x)$$

dove P_2 è un operatore differenziale propriamente ellittico del secondo ordine e coefficienti reali $C^\infty(t > 0, x \in R^n)$ e P_1 è un operatore del primo ordine a coefficienti C^∞.

Scopo del lavoro è di costruire esplicitamente una funzione $E(t, x)$ tale che

$$PE(t, x) \in C^\infty(]0, T[\times R^n_x)$$

e di calcolare esplicitamente il comportamento di E per $t \to 0+$.

Osserviamo che la regolarità di soluzioni di equazioni del tipo $Pu = f$, f appartenente ad un conveniente spazio di Sobolov con peso, è stata studiata da vari autori; citiamo qui P. Bolley-J. Camus [2], [3], M.S. Baouendi-C. Goulaouic [1], G. Goulaouic-N. Shimakura [5], quest'ultimo per il caso a coefficienti Hölderiani.

Indirizzo dell'A.: Dipartimento di Matematica, Università di Bologna.

Più precisamente l'operatore considerato è della forma

$$P = t\Big[\partial_t^2 + 2\sum_{j=1}^{n} a_{0j}(t,x)\,\partial_{x_j}\partial_t + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\,\partial_{x_i}\partial_{x_j}\Big] + \\ + \alpha(t,x)\,\partial_t + \sum_{j=1}^{n} b_j(t,x)\,\partial_{x_j} + c(t,x)\,, \tag{1.1}$$

dove si suppone che

$$A(t,x,\xi) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j \geqslant C|\xi|^2\,. \tag{1.2}$$

Nel § 2 si stabiliscono alcune notazioni usate nel seguito.

Nel § 3 si descrive il metodo impiegato per costruire formalmente la soluzione.

Nei §§ 4 e 5 si risolvono le equazioni di trasporto così ottenute e si dà un teorema di andamento asintotico di tali soluzioni.

Nel § 6 si dà senso a quanto fatto precedentemente.

2. Notazioni ed osservazioni preliminari.

Sia O^m, $m \in R$, l'insieme delle funzioni $g(x,\xi) \in C^\infty(R_x^n \times R_\xi^n)$ tale che $g(x,\lambda\xi) = \lambda^m g(x,\xi)$, $\lambda > 0$.

Sia ψ^m, $m \in R$, l'insieme delle funzioni $f(t,x,\xi) \in C^\infty(R_t^+ \times R_x^n \times R_\xi^n)$ tali che $f(t/\lambda, x, \lambda\xi) = \lambda^m f(t,x,\xi)$, $\lambda > 0$.

Osserviamo che gli operatori ∂_t, $t\cdot$, $g\cdot$, con $g \in O^k$, si comportano nel modo seguente

$$\left\{\begin{aligned} &\partial_t\colon \psi^m \to \psi^{m+1} \\ &\colon \psi^m \to \psi^{m+1} \\ &O^k_\times \psi^m \in (g,f) \to gf \in \psi^{m+k} \end{aligned}\right. \tag{2.1}$$

Riferendoci all'operatore (1.1) poniamo

$$\left\{\begin{aligned} A_0(t,x,\xi) &= 2\sum_{j=1}^{n} a_{0j}(t,x)\,\xi_j \\ A(t,x,\xi) &= \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(t,x)\,\xi_i\xi_j \\ B(t,x,\xi) &= \sum_{j=1}^{n} b_j(t,x)\,\xi_j \\ M(t,x,\xi,\partial_x) &= \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(t,x)\,\xi_i\,\partial_{x_j} \end{aligned}\right. \tag{2.2}$$

$$(2.3)\qquad \begin{cases} a_{0j}^{(k)}(x) = \dfrac{1}{k!}\,\partial_t^k\, a_{0j}(t,x)|_{t=0}, & k\geqslant 0,\ 1\leqslant j\leqslant n \\ A_{0k}(x,\partial_x) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{0j}^{(k)}(x)\,\partial_{x_j} \\ A_{0k}(x,\xi) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{0j}^{(k)}(x)\,\xi_j \end{cases}$$

$$(2.4)\qquad \begin{cases} a_{ij}^{(k)}(x) = \dfrac{1}{k!}\,\partial_t^k\, a_{ij}(t,x)|_{t=0}, & k\geqslant 0,\ 1\leqslant i,\ j\leqslant n \\ A_k(x,\partial_x) = \sum\limits_{ij=1}^{n} a_{ij}^{(k)}(x)\,\partial_{x_i}\partial_{x_j} \\ A_k(x,\xi) = \sum\limits_{ij=1}^{n} a_{ij}^{k}(x)\,\xi_i\xi_j \\ M_k(x,\xi,\partial_x) = \sum\limits_{ij=1}^{n} a_{ij}^{k}(x)\,\xi_i\partial_{x_j} \end{cases}$$

$$(2.5)\qquad \begin{cases} b_j^{(k)}(x) = \dfrac{1}{k!}\,\partial_t^k\, b_j(t,x)|_{t=0}, & k\geqslant 0,\ 1\leqslant j\leqslant n \\ B_k(x,\partial_x) = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j^{(k)}(x)\,\partial_{x_j} \\ B_k(x,\xi) = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j^{(k)}(x)\,\xi_j \end{cases}$$

$$(2.6)\qquad \begin{cases} \alpha_k(x) = \dfrac{1}{k!}\,\partial_t^k\, \alpha(t,x)|_{t=0}, & k\geqslant 0 \\ c_k(x) = \dfrac{1}{k!}\,\partial_t^k\, c(t,x)|_{t=0}, & k\geqslant 0\,. \end{cases}$$

Sia inoltre

$$(2.7)\qquad D(x,\xi) = \sqrt{A_0(x,\xi) - A_{00}^2(x,\xi)}\,.$$

Osserviamo che per la (1.2) D è reale.

3. Parametrice formale.

Consideriamo, dunque, l'operatore P; cerchiamo di risolvere

$$Pu = 0, \quad t > 0 \tag{3.1}$$

mediante un operatore

$$E(t, x) = \int \exp[ix\xi] q(t, x, \xi) đ\xi, \qquad đ\xi = (2\pi)^{-n} d\xi$$

essendo q una certa ampiezza da determinare.

Applichiamo P ad E, otteniamo:

$$PE(t, x) = \int \exp[ix\xi] \tilde{q}(t, x, \xi) đ\xi$$

essendo $\tilde{q}(t, x, \xi) = \exp[-ix\xi] P(\exp[ix\xi] q(t, x, \xi))$. Si cerca quindi di scegliere $q(t, x, \xi)$ decrescente in modo esponenziale per $|\xi| \to \infty$, $t > 0$ e tale che $\tilde{q}(t, x, \xi) = 0$.

Osservando che

$$\partial_t(\exp[ix\xi] q) = \exp[ix\xi] \partial_t q ,$$

$$\partial_t^2(\exp[ix\xi] q) = \exp[ix\xi] \partial_t^2 q$$

$$\partial_{x_j}(\exp[ix\xi] q) = \exp[ix\xi] (i\xi_j q + \partial_{x_j} q) ,$$

$$\partial_{x_i}\partial_{x_j}(\exp[ix\xi] q) = \exp[ix] (-\xi_i\xi_j q + i\xi_j \partial_{x_i} + i\xi_i \partial_{x_j} q + \partial_{x_i}\partial_{x_j} q)$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \tilde{q}(t, x, \xi) = [&t\partial_t^2 + itA_0(t, x, \xi)\partial_t + tA_0(t, x, \partial_x)\partial_t - \\ &- tA(t, x, \xi) + 2itM(t, x, \xi, \partial_x) + tA(t, x, \partial_x) + \alpha(t, x)\partial_t + \\ &+ iB(t, x, \xi) + B(t, x, \partial_x) + c(t, x)] q(t, x, \xi) . \end{aligned} \tag{3.2}$$

Cerchiamo q nella forma

$$\left\{\begin{array}{l} q(t, x, \xi) \sim \sum\limits_{j\geqslant 0} q_{-j}(t, x, \xi) \\ q_{-j} \in \psi^{-j}, \qquad j \geqslant 0 \end{array}\right. \tag{3.3}$$

dove il significato di $q \sim \sum\limits_{j\geqslant 0} q_{-j}$ verrà opportunamente precisato. Utilizzando le (2.2)-(2.6), scriviamo formalmente

$$A(t, x, \partial_x) = \sum_{k\geqslant 0} t^k A_k(x, \partial_x)\,, \qquad A(t, x, \xi) = \sum_{k\geqslant 0} t^k A_k(x, \xi)\,,$$

$$A_0(t, x, \partial_x) = \sum_{k\geqslant 0} t^k A_{0k}(x, \partial_x)\,, \qquad A_0(t, x, \xi) = \sum_{k\geqslant 0} t^k A_{0k}(x, \xi)\,,$$

$$B(t, x, \partial_x) = \sum_{k\geqslant 0} t^k B_k(x, \partial_x)\,, \qquad B(t, x, \xi) = \sum_{k\geqslant 0} t^k B_k(x, \xi)\,,$$

$$M(t, x, \xi, \partial_x) = \sum_{k\geqslant 0} t^k M_k(x, \xi, \partial_x)\,, \qquad \alpha(t, x) = \sum_{k\geqslant 0} t^k \alpha_k(x)\,,$$

$$c(t, x) = \sum_{k\geqslant 0} t^k c_k(x)\,.$$

Raggruppiamo ora, in (3.2) i termini di omogeneità corrispondente; veniamo così a definire i seguenti operatori:

$$\left\{\begin{array}{l} L_1 = t\partial_t^2 + \left(2itA_{00}(x, \xi) + \alpha_0(x)\right)\partial_t - tA_0(x, \xi) + iB_0(x, \xi) \\ L_{-k} = 2it^{k+2} A_{0,k+1}(x, \xi)\,\partial_t + 2it^{k+1} A_{0,k}(x, \partial_x)\,\partial_t - \\ \qquad - t^{k+2} A_{k+1}(x, \xi) + 2it^{k+1} M_k(x, \xi, \partial_x) + \\ \qquad + H(k)\, t^k A_{k-1}(x, \partial_x) + t^{k+1}\alpha_{k+1}(x)\,\partial_t + \\ \qquad + it^{k+1} B_{k+1}(x, \xi) + t^k B_k(x, \partial_x) + t^k c_k(x) \end{array}\right. \tag{3.4}$$

essendo $H(0) = 0$, $H(k) = 1$ se $k > 0$.

Osserviamo che per ogni $m \in R$ si ha

$$L_1\colon \psi^m \to \psi^{m+1}, \qquad L_{-k}\colon \psi^m \to \psi^{m-k}.$$

Tenendo conto di (3.4) formalmente si può scrivere

$$\tilde{q}(t, x, \xi) = L_1 q + \sum_{k\geq 0} L_{-k} q \,.$$

Scrivendo $q \sim \sum_{j\geq 0} q_{-j}$ con $q_{-j} \in \psi^{-j}$, si ottiene, raggruppando i termini di uguale omogeneità

$$\tilde{q}(t, x, \xi) = L_1 q_0 + (L_1 q_{-1} + L_0 q_0) + \\ + (L_1 q_{-2} + L_0 q_{-1} + L_{-1} q_0) + \ldots = \sum_{j\geq 0} Q_{-j}$$

essendo

$$Q_{-j} = \sum_{k=0}^{j} L_{1-j} q_{k-j} \,. \tag{3.5}$$

Per avere $\tilde{q}(t, x, \xi) = 0$ arriviamo alle seguenti equazioni di trasporto

$$\begin{cases} L_1 q_0 = 0\,, & t > 0 \\ L_1 q_{-j} = -\sum_{k=1}^{j} L_{1-k} q_{k-j}\,, & t > 0,\ j \geq 1\,. \end{cases} \tag{3.6}$$

4. Soluzione dell'equazione $L_1 q_0 = 0$.

Risolviamo dunque la prima equazione di trasporto.

Mediante opportune trasformazioni e cambiamenti di variabile, si riconduce l'equazione data ad una equazione ipergeometrica confluente dipendente dai parametri $(x, \xi) \in R^n_x \times R^n_\xi$. Allo scopo poniamo

$$q_0(t, x, \xi) = \exp\left[-itA_{00} - tD\right] \hat{q}_0(t, x, \xi)$$

essendo D definito dalla (2.7).

L'equazione

$$\exp\left[itA_{00} + tD\right] L_1\left[\exp\left[-itA_{00} - tD\right] \hat{q}_0(t, x, \xi)\right] = 0 \tag{4.1}$$

diventa

$$\left[t\partial_t^2 + (\alpha_0 - 2tD)\,\partial_t + (-i\alpha_0 A_{00} - D\alpha_0 + iB_0\right] \hat{q}_0(t, x, \xi) = 0\,.$$

Ponendo inoltre $2tD = z$, si arriva all'equazione

$$2D[z\partial_z^2 + (\alpha_0 - z)\partial_z - (\alpha_0/2 + i(A_{00}\alpha_0 - B_0))/2D]\hat{q}_0(z, x, \xi) = 0 ,$$

da cui

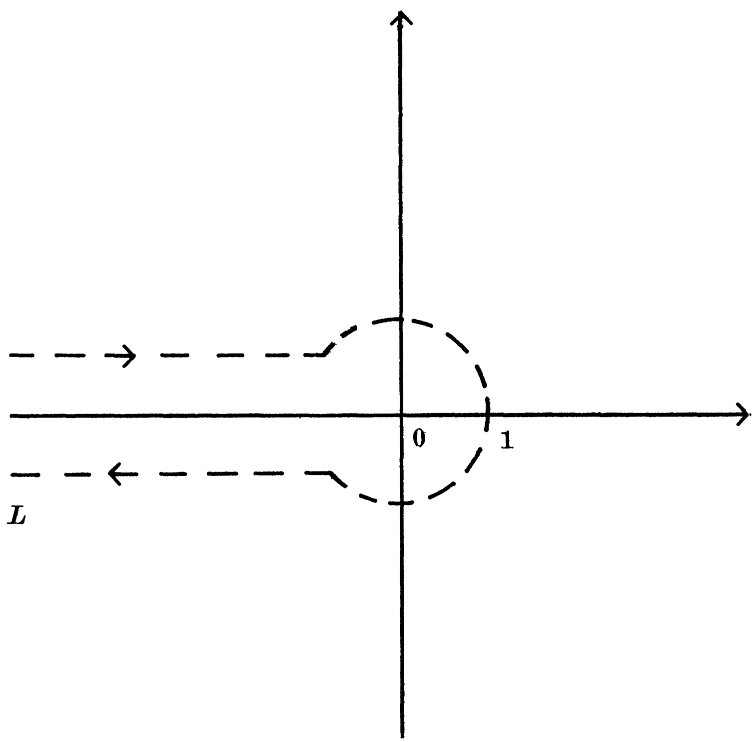
$$[z\partial_z^2 + (\alpha_0 - z)\partial_z - (\alpha/2 + i(A_{00}\alpha_0 - B_0))/2D]\hat{q}_0(z, x, \xi) = 0 . \tag{4.2}$$

Tale equazione è una equazione ipergeometrica confluente di parametri $b = \alpha_0$, $a = \alpha_0/2 + i(A_{00}\alpha_0 - B_0)/2D$.

Dato il tipo richiesto di comportamento all'infinito, scegliamo quella soluzione, tra le due linearmente indipendenti che tale equazione ammette, che in [7] viene indicata con $\psi(a, b, z)$ e che ha la seguente rappresentazione integrale

$$\psi(a, b, z) = \exp[-a\pi i]\Gamma(1-a)\int_L \exp[z\sigma]\sigma^{a-1}(1-\sigma)^{b-a-1}d\!\!\!{}^-\sigma \tag{4.3}$$

essendo $d\!\!\!{}^-\sigma = (2\pi)^{-n}d\sigma$, ed essendo L un contorno del tipo



Da tale rappresentazione ricaviamo, per a, la seguente restrizione: $a \neq n$, per ogni $n \in N$.

5. Soluzione delle altre equazioni di trasporto.

La $(l+1)$-sima equazione di trasporto ha la forma seguente

$$L_1 q_{-(l+1)} = -\sum_{k=0}^{l} L_{-k} q_{k-1} \,. \tag{5.1}$$

Operiamo ancora la trasformazione

$$\exp[itA_{00} + tD]L_1 \exp[-itA_{00} - tD]\hat{q}_{-(l+1)} =$$
$$= -\sum_{k=0}^{l} \exp[itA_{00} + tD]L_{-k} \exp[-itA_{00} - tD]\hat{q}_{k-l}$$

otteniamo

$$t\partial_t^2 + (\alpha - 2tD)\partial_t + (-i\alpha_0 A_{00} + D\alpha_0 + iB_0)\hat{q}_{-(l+1)} =$$
$$= -\sum_{k=0}^{l} (L_{-k} + M_{-k})\hat{q}_{k-l}$$

essendo

$$M_{k-} = t^{k+2}\Big[2i\varphi \sum_{j=1}^{n} a_{0j}^{(k+1)}\xi_j - 2i\sum_{j=1}^{n} a_{0j}^{(k)}\varphi_j\partial_t +$$
$$+ 2i\sum_{j=1}^{n} a_{0j}^{(k)}\varphi\varphi_j - 2i\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(k)}\xi_i\varphi_j + H(k)\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(k-1)}\varphi_i\varphi_j\Big] +$$
$$+ t^{k+1}\Big[-2i\sum_{j=1}^{n} a_{0j}^{(k)}\varphi_j - 2i\sum_{j=1}^{n} a_{0j}^{(k)}\varphi\partial_{x_j} -$$
$$- H(k)\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(k-1)}\varphi_{ij} - H(k)\sum_{i,j=1} a_{ij}^{(k-1)}(\varphi_j\partial_{x_i} + \varphi_i\partial_{x_j}) - \alpha_{k+1}\varphi - \sum_{j=1}^{n} b_j\varphi_j\Big]$$

ove si è posto $\varphi = iA_{00} + D$, $\varphi_j = \partial_{x_j}\varphi$.

Con il cambiamento di variabile $2tD = z$ si ottiene

$$(5.2) \qquad [z\partial_z^2 + (b - z)\partial_z - a]\hat{q}_{-(l+1)} = -\frac{1}{2D}\left[\sum_{k=0}^{l}(L_{-k} + M_{-k})\hat{q}_{-l}\right]$$

dove a e b sono definiti come nel § 4.

Indicando genericamente con $\varrho_{-(k+1)}(x, \xi)$ una funzione di omogeneità $-(k+1)$ in ξ, siamo indotti a dover risolvere equazioni del tipo

$$(5.3) \qquad [z\partial_z^2 + (b - z)\partial_z - a]\hat{q}_{-(l+1)} = \sum_{k=0}^{l} A_k \hat{q}_{k-l}$$

essendo A_k uno degli operatori seguenti

$$(5.4) \qquad \left|\begin{array}{ll} (a) & \varrho_{-(k+1)} z^{k+2}\partial_z \\ (b) & \varrho_{-(k+1)} z^{k+1}\partial_{x_j}\partial_z \\ (c) & \varrho_{-(k+1)} z^{k+2} \\ (d) & \varrho_{-(k+1)} z^{k+1}\partial_{x_j} \\ (e) & \varrho_{-(k+1)} z^{k}\partial_{x_i}\partial_{x_j} \\ (f) & \varrho_{-(k+1)} z^{k}\partial_{x_i}\partial_{x_j} \\ (g) & \varrho_{-(k+1)} z^{k+1} \\ (h) & \varrho_{-(k+1)} z^{k}\partial_{x_j} \\ (i) & \varrho_{-(k+1)} z^{k} \end{array}\right.$$

Siano ora S_0 e $\hat{S}_0$ i seguenti insiemi

$$(5.5) \qquad \begin{cases} S_0 = \{\sigma,\ \sigma \in C,\ |\mathrm{Im}\,\sigma| < 2,\ \sigma \neq 0,\ \sigma \neq 1,\ \sigma \neq x,\ x \in R,\ x \leqslant 0\} \\ \hat{S}_0 = \{\sigma,\ \sigma \in C,\ |\mathrm{Im}\,\sigma| < 2,\ \sigma \neq 0,\ \sigma \neq 1\}\,. \end{cases}$$

DEFINIZIONE 1.5. Con $\mathcal{A}_{-k,j_1,j_2}$, $k, j_1, j_2 \in Z_+$, indichiamo l'insieme delle funzioni

$$\psi(\sigma, x, \xi) \in C^\infty(S_0 \times R_x^n \times \dot{R}_\xi^n)$$

tali che

1) $\psi(\sigma, x, \lambda\xi) = \lambda^{-k}\psi(\sigma, x, \xi)$, $\lambda > 0$.

2) Per ogni α, $\beta \in (Z_+)^n$, si può scrivere $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \psi(\sigma, x, \xi)$ nella forma seguente

$$\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \psi(\sigma, x, \xi) = \sum_{l_1=0}^{m_1^{\alpha\beta}} \sum_{l_2=0}^{m_2^{\alpha\beta}} \psi_{l_1 l_2}^{\alpha\beta}(\sigma, x, \xi)(\log\sigma)^{l_1}\left(\log(1-\sigma)\right)^{l_2}$$

$m_1^{\alpha\beta}$, $m_2^{\alpha\beta} \in Z_+$, essendo $\psi_{l_1 l_2}^{\alpha\beta}(\sigma, x, \xi)$ olomorfe in $\hat{S}_0$ con polo di ordine j_1 al più in $\sigma = 0$ e j_2 al più in $\sigma = 1$.

3) Per ogni insieme Ω tale che $\Omega \subset\subset R_x^n$, e per ogni $\delta \in]0, 1[$ vale la stima

$$\sup_{\substack{(x,\xi)\in\Omega\times S^{n-1} \\ |\mathrm{Im}\,\sigma|\leqslant 1-\delta \\ |\mathrm{Re}\,\sigma|>1}} |\mathrm{Re}\,\sigma|^{2j_1+2j_2}\,|\psi_{l_1 l_2}^{\alpha\beta}(\sigma, x, \xi)| < +\infty\,.$$

La determinazione del logaritmo è fatta tagliando C lungo la semiretta $x + iy$, con $y = 0$, $x \leqslant 0$, e si intende reale il logaritmo di un argomento positivo.

Definizione 2.5. Se $\psi \in \mathcal{A}_{-k,j_1,j_2}$ indichiamo con $I(z, x, \xi; \psi)$ il seguente integrale:

$$I(z, x, \xi; \psi) = \exp[-a\pi i]\Gamma(1-a)\int_L \exp[z\sigma]\sigma^{a-1}(1-\sigma)^{b-a-1}\psi(\sigma, x, \xi)ds\,.$$

Proposizione 1.5. Le equazioni di trasporto (3.4) ammettono una soluzione del tipo

$$q_{-k}(t, x, \xi) = \exp[-itA_{00} - tD]\hat{q}_{-k}(2tD, x, \xi)$$

essendo $\hat{q}_{-k}(z, x, \xi) = I(z, x, \xi; \psi_{-k})$ con $\psi_{-k} \in \mathcal{A}_{-k,2k,2k}$.

Dimostrazione. Si ragiona per induzione su k. Per $k = 0$, l'equazione $L_1 q_0 = 0$ ha, come abbiamo visto, la soluzione cercata. Supponiamo ora che $\hat{q}_{-h}$, $h = 0, 1, \ldots, l$, siano del tipo desiderato, ossia tali che

$$\hat{q}_{-h}(z, x, \xi) = I(z, x, \xi; \psi_{-h}) \qquad \text{con} \qquad \psi_{-h} \in \mathcal{A}_{-h,2h,2h}$$

si tratta di dimostrare che anche $\hat{q}_{-(l+1)} = I(z, x, \xi; \psi_{-(l+1)})$ con $\psi_{-(l+1)} \in \mathcal{A}_{-(l+1),2(l+1),2(l+1)}$.

Tenendo presente le omogeneità e il comportamento dei poli, è facile vedere che per risolvere le equazioni (5.3) basta risolvere la seguente equazione

$$(z\partial_z^2 + (b-z)\partial_z - a)\hat{q} =$$
$$= \exp[-a\pi i]\Gamma(1-a)\int_L \exp[z\sigma]\sigma^{a-1}(1-\sigma)^{b-a-1}\psi(\sigma, x, \xi)\,d\sigma$$

con $\psi \in \mathcal{A}_{-(l+1),2(l+1),2(l+1)}$.

Cerchiamo $\hat{q}$ sotto la forma

$$\hat{q}(z, x, \xi) = \exp[-a\pi i]\Gamma(1-a)\int_L \exp[z\sigma]\sigma^{a-1}(1-\sigma)^{b-a-1}v(\sigma, x, \xi)\,d\sigma\,.$$

Per determinare v, basta risolvere la seguente equazione

$$(\sigma - \sigma^2)\,v' = \psi(\sigma, x, \xi)$$

e, quindi, l'equazione

$$\text{(5.6)} \qquad v' = \psi^*(\sigma, x, \xi) \qquad \text{con} \qquad \psi^* \in \mathcal{A}_{-(l+1),2(l+1)+1,2(l+1)+1}\,.$$

In un intorno di $\sigma = 0$ il secondo membro è del tipo

$$\sigma^{-2(l+1)-1}\sum_{l_1=0}^{m_1}\tilde{\psi}_{l_1}(\log\sigma)^{l_1},$$

$\tilde{\psi}_{l_1}$ olomorfa, e, quindi, una soluzione, in un intorno di $\sigma = 0$ è una funzione del tipo

$$v = \sigma^{-2(l+1)}\sum_{n_1=0}^{m_1'}\tilde{\tilde{\psi}}_{n_1}(\log\sigma)^{n_1}\,, \qquad \tilde{\tilde{\psi}}_{n_1} \text{ olomorfa}\,.$$

Analogamente, in un intorno di $\sigma = 1$. La tesi segue poi per l'unicità della soluzione olomorfa in ogni aperto di $C\setminus\{0, 1\}$ e dal fatto che $(\log\sigma)^m$ e $(\log(1-\sigma))^n$, $m, n \in Z_+$, sono linearmente indipendenti.

Un risultato analogo vale per $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \hat{q}$ e per la verifica della condizione 3, definizione 1.5.

PROPOSIZIONE 2.5. Sia $\psi_j \in \mathcal{A}_{-j,2j,2j}$, allora per $I(z, x, \xi; \psi_j)$, $z \in R_+$, $x \in R_x^n$, $\xi \in R_\xi^n$ (si veda la definizione 2.5, a, b funzioni C^∞), valgono le seguenti stime:

1) $I(z, x, \xi; \psi_j) = z^{-\operatorname{Re} a+\varepsilon+2j}\big(C_{1j} + O(1/z)\big)$ per $z \to +\infty$,

2) $I(z, x, \xi; \psi_j) = z^{1-\operatorname{Re} b-\varepsilon}\big(C_{2j} + O(z)\big)$ per $z \to O_+$ essendo C_{1j}, C_{2j} costanti opportune, $\varepsilon > 0$.

DIMOSTRAZIONE. 1) Operando il cambiamento di variabile $z\sigma = \tau$, si ha, tenendo conto che $(1-\tau/z)^{b-a-1}$ è una quantità limitata per $\tau \to +\infty$:

$$
\begin{aligned}
&|I(z, x, \xi; \psi_j)| \leqslant \\
&\leqslant C'\left|\int_L \exp[\tau]\,(\tau/z)^{a-1}(1-\tau/z)^{b-a-1}(1/z)\psi_j(\tau/z, x, \xi)\,d\tau\right| \leqslant \\
&\leqslant C_j'\left|\int_L \exp[-\operatorname{Re}\tau] z^{\operatorname{Re} a}|\tau|^{\operatorname{Re} a-1}\,|\log(\tau/z)|^M(1+|\tau/z|)^{4j}(\tau/z)^{-2j}d\tau\right| \\
&\leqslant C_j''\left[\int_L \exp[-|\operatorname{Re}\tau|\,|\tau|^{\operatorname{Re} a-1-2j}|\log\tau|^M(1+|\tau|)^{4j}d\tau\right] z^{-\operatorname{Re} a+\varepsilon+2j} \leqslant \\
&\qquad\qquad \leqslant C_{1j} z^{-\operatorname{Re} a+\varepsilon+2j}\,.
\end{aligned}
$$

2) Analogamente, per $z \to O_+$, operando ancora il cambiamento di variabile $z\sigma = \tau$, si ha

$$
\begin{aligned}
&|I(z, x, \xi; \psi_j)| \leqslant \\
&\leqslant C'\frac{1}{z}\int_L \left|\exp[\tau]\left(\frac{\tau}{z}\right)^{a-1}\left(1-\frac{\tau}{z}\right)^{b-a-1}\left(\frac{\tau}{z}\right)^{-2j}\left(1-\frac{\tau}{z}\right)^{-2j}\right. \cdot \\
&\cdot\left|\log\frac{\tau}{z}\right|^M\left|\log\left(1-\frac{\tau}{z}\right)\right|^N\left|1+\left|\frac{\tau}{z}\right|\right|^{4j}d\tau \leqslant \\
&\leqslant C_{2j}\, z^{-1-\operatorname{Re} a+1-\operatorname{Re} b+\operatorname{Re} a+1+2j+2j-4j-\varepsilon} = C_{2j}\, z^{1-\operatorname{Re} b-\varepsilon}\,.
\end{aligned}
$$

Nelle precedenti disuguaglianze si è tenuto conto della limitatezza, per $z \to O_+$, della seguente quantità:

$$\int_L \exp[-|\operatorname{Re}\tau|]\,|\tau|^{\operatorname{Re}a-1-2j}\,|z-\tau|^{\operatorname{Re}b-\operatorname{Re}a-1-2j}\,|\log\tau|^M \cdot$$

$$\cdot|\log(z-\tau)|^N\,||z|+|\tau||^{4j}d\tau\,.$$

6. Costruzione di una soluzione.

Definiamo alcune classi di simboli:

DEFINIZIONE 1.6. Siano $m, p \in R$, indichiamo con $\tilde{S}^m_\mu$ la classe delle funzioni $p(t, x, \xi) \in C^\infty(]0, T[; S^m(R^n_x \times R^n_\xi))$ tali che

$$|t^\mu(t\partial_t)^k\partial^\alpha_x\partial^\beta_\xi p(t, x, \xi)| \leqslant C(1+|\xi|)^{m-|\beta|}$$

per ogni ξ, $|\xi|>1$, per ogni $x \in \Omega \subset\subset R^n_x$, per ogni k, α, β.

Si dimostrano, analogamente a come viene fatto in [6] le seguenti proposizioni:

PROPOSIZIONE 1.6. Sia $(m_j)_{j\in N}$ una successione che diverge decrescendo a $-\infty$ per $j \to +\infty$. Siano p_j funzioni fali che $p_j \in \tilde{S}^{m_j}_\mu$, $j = 1, 2, \ldots$, esiste allora una funzione $p \in \tilde{S}^m_\mu$ tale che

$$p \sim \sum_{j\geqslant 1} p_{m_i}\,.$$

nel senso che per ogni $N>0$, la differenza $p-\sum_{j=1}^{N-1} p_j \in \tilde{S}^{m_N}_\mu$.

PROPOSIZIONE 2.6. Valgono le seguenti proprietà:

1) Se $p \in \tilde{S}^m_\mu$ e $q \in \tilde{S}^{m'}_{\mu'}$. allora $pq \in \tilde{S}^{m+m'}_{\mu+\mu'}$,

2) Per ogni t fissato, $t>0$, $p(t, x, \xi) \in S^m_{1,0}$ (classe di Hormander) [6].

Se con $OP\tilde{S}^m_\mu$ indichiamo l'insieme degli operatori definiti nel modo seguente:

$$p(t,x,D_x)\,u(x) = \int \exp[ix\xi]p(t, x, \xi)\,\hat{u}(\xi)d\xi, \qquad u \in \mathcal{D}'(R^n_x)$$

(integrale oscillante), si ha

PROPOSIZIONE 3.6. Se $p(t, x, D_x) \in OP\tilde{S}^m_\mu$ e $q(t, x, D_x) \in OP\tilde{S}^{m'}_{\mu'}$, allora la composizione $p(t, x, D_x) o q(t, x, D_x) \in OP\tilde{S}^{m+m'}_{\mu+\mu'}$. con simbolo $c(t, x, \xi)$ tale che

$$c(t, x, \xi) \sim \sum_{\alpha \geqslant 0} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha_\xi p(t, x, \xi)\, D^\alpha_x q(t, x, \xi)\,.$$

Vale inoltre la

PROPOSIZIONE 4.6. Siano $q_{-j}(t, x, \xi)$ le soluzioni delle equazioni di trasporto (5.3), la cui forma è stata dimostrata nella proposizione 1.5, allora, per ogni $\varepsilon > 0$ si ha che

$$q_{-j}(t, x, \xi) \in \tilde{S}^{1-\bar{b}-\varepsilon-j}_{\bar{b}-1+\varepsilon} \qquad \bar{b} = \sup_{x \in \Omega \subset\subset R^n_x} \max\{0, \operatorname{Re} b\}\,.$$

DIMOSTRAZIONE. Dalla proposizione 2.5, si ha che

$$\hat{q}(2tD, x, \xi) = z^{-\operatorname{Re} a+\varepsilon+2j}\big(C_{1j} + O(1/2tD)\big) \qquad \text{per} \qquad tD \to +\infty\,,$$

$$\hat{q}(2tD, x, \xi) = z^{1-\operatorname{Re} b-\varepsilon}\big(C_{2j} + O(2tD)\big) \qquad \text{per} \qquad tD \to O_+\,.$$

Ora

$$q_{-j}(t, x, \xi) = \exp\left[-itA_{00}(x, \xi) - tD(x, \xi\right]\hat{q}_{-j}\big(2tD(x, \xi), x, \xi\big)\,.$$

Da qui si ha che

$$|t^{\bar{b}+\varepsilon-1} q_{-j}(t, x, \xi)| \leqslant C(1 + |\xi|)^{1-\bar{b}-\varepsilon-j}$$

Proviamo ora la seguente disuguaglianza

$$|t^{\bar{b}+\varepsilon-1}(t\partial_t)^k \partial^\alpha_x \partial^\beta_\xi q_{-j}(t, x, \xi)| \leqslant C(1 + |\xi|)^{1-\bar{b}-\varepsilon-j-|\beta|}.$$

per ogni $k \in N$, per ogni α, β multiindici, per ogni $t \in [0, T]$, per ogni $x \in \Omega \subset\subset R^n$, per ogni $\xi \in R^n$, $|\xi| \geqslant 1$.

Allo scopo è sufficiente controllare q_{-j} per ogni singola derivata. Ora

$$\partial_{x_k} q_{-j}(t, x, \xi) = \partial_{x_k} h\big(2tD(x, \xi), x, \xi\big)$$

dove

$$h(z, x, \xi) = \exp[-izA_{00}(x, \xi)/2D(x, \xi) - z/2]\hat{q}_{-j}(z, x, \xi) .$$

Si noti che h è positivamente omogenea di grado $-j$ rispetto a ξ.
Dunque

$$\partial_{x_k} h(2tD(x, \xi), x, \xi) = (\partial_z h)(2tD, x, \xi)\, 2t\partial_{x_k} D(x, \xi) + (\partial_{x_k} h)(2tD, x, \xi) =$$
$$= \left\{(z\partial_z h)(2tD, x, \xi)\, \partial_{x_k} D(x, \xi)\cdot\frac{1}{D(x, \xi)} + (\partial_{x_k} h)(z, x, \xi)\right\}_{z=2tD(x,\xi)} .$$

Osservando che $z\partial_z h$ ha lo stesso sviluppo asintotico di h sia per $z \to +\infty$, che per $z \to 0_+$, si ha che

$$|t^{\bar{b}+\varepsilon-1}\partial_{x_k} q_{-j}(t, x, \xi)| \leqslant C(1 + |\xi|)^{1-\bar{b}-\varepsilon-j} .$$

Consideriamo ora $\partial_{\xi_k} q_{-j}$. Usando le stesse notazioni di prima, poniamo

$$\partial_{\xi_k} q_{-j}(t, x, \xi) = \partial_{\xi_k} h(2tD(x, \xi), x, \xi) .$$

Si ha quindi:

$$\partial_{\xi_k} h(2tD(x, \xi), x, \xi) =$$
$$= (\partial_z h)(2tD, x, \xi)\, 2tD(x, \xi)\, \partial_{\xi_k} D(x, \xi)\cdot\frac{1}{D(x, \xi)} + (\partial_{\xi_k} h)(2tD, x, \xi) =$$
$$= \left\{(z\partial_z h)(z, x, \xi)\, \partial_{\xi_k} D(x, \xi)\cdot\frac{1}{D(x, \xi)} + (\partial_{\xi_k} h)(z, x, \xi)\right\}_{z=2tD} .$$

La conclusione segue dal fatto che $h \in O^{-j}$, e che

$$\left|\partial_{\xi_k} D(x, \xi)\cdot\frac{1}{D(x, \xi)}\right| \leqslant C/|\xi| .$$

Per stimare $t\partial_t$ si procede allo stesso modo osservando che l'operatore $z\partial_z$ non altera l'andamento asintotico.

Poniamo $q(t, x, \xi) \sim \sum_{j\geqslant 0} q_{-j}(t, x, \xi)$ allora $q \in S^{1-\bar{b}+\varepsilon}_{\bar{b}-1-\varepsilon}$ mod $\tilde{S}^{-\infty}_{\bar{b}-1-\varepsilon} = \bigcap_{m\in R} \tilde{S}^{m}_{\bar{b}-1-\varepsilon}$.

DEFINIZIONE 2.6. Siano $k \in Z_+$, $\mu \in R$, definiamo $C^k_\mu([0, T] \times R^n_x)$ l'insieme delle funzioni $u \in C^{(k)}(]0, T]; L^2(R^n_x))$ tali che

$$\sup_{t \in [0,T]} \left[t^\mu \sum_{j=1}^{k} \|(t\partial_t)^j u(t, \cdot)\|^2_{H^{k-j}(R^n_x)} \right]^{\frac{1}{2}} < +\infty .$$

OSSERVAZIONE 1.6. Se $u \in C^k_\mu$ allora $u \in H^k([\lambda, T] \times R^n_x)$ per ogni λ tale che $T > \lambda > 0$.

LEMMA 1.6. Sia C un operatore tale che $C \in OP\tilde{S}^0_\mu$, propriamente supportato, $C = C^*$ e tale che per ogni $\Omega \subset\subset R^n_x$ si ha

$$\liminf_{|\xi| \to \infty} \Big(\inf_{\substack{x \in \Omega \subset\subset R^n_x \\ t \in [0,T]}} t^\mu p(t, x, \xi) \Big) > 0 \tag{6.1}$$

allora esiste un operatore B, $B \in \tilde{S}^0_{\mu/2}(\Omega \times \dot{R}^n_\xi)$ propriamente supportato tale che $C - B^* B \in \tilde{S}^{-\infty}_\mu$.

DIMOSTRAZIONE. Dalla (6.1) si deduce che possiamo trovare una funzione cut-off $\chi(x)$ tale che, se poniamo

$$b_0(t, x, \xi) = \chi(x) \sqrt{p(t, x, \xi)} \in \tilde{S}^0_{\mu/2}(\Omega' \times R^n_x)$$

$(\Omega' \subset\subset \Omega)$ si ha $C - B^*_0 B_0 \in \tilde{S}^{-1}_\mu$ con $B_0(t, x, D_x)$ l'operatore associato a b_0.

Ragionando per induzione come in [6], si ha che per ogni j, esiste $B_{-j} \in \tilde{S}^{-j}_{\mu/2}$ tale che

$$C - (B_0 + \ldots + B_{-j})^* (B_0 + \ldots + B_{-j}) \tilde{S}^{-j-1}_\mu .$$

E questo completa la dimostrazione del lemma.

PROPOSIZIONE 5.6. Sia $p \in \tilde{S}^0_\mu(\Omega \times \dot{R}^n_\xi)$, allora $p\colon C^0_\lambda \to C^0_{\lambda+\mu}$ con continuità.

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione è come in [6] e si fonda sul lemma 1.6.

PROPOSIZIONE 5.7. Sia $E(t, x) = \int \exp[ix\xi] q(t, x, \xi) d\xi$, allora $E \in$ $\in C^{(-n/2+\bar{b}-1)}_{\bar{b}-1-\xi}$. Inoltre $E(t, x) \in C^\infty([\varepsilon, T] \times R^n_x)$ per ogni $\varepsilon > 0$.

DIMOSTRAZIONE. Basta osservare che $E = q(t, x, D_x)\delta(x)$ e che per ogni $\varepsilon > 0$ $\delta(x) \in C^{-n/2-\varepsilon}_0$.

BIBLIOGRAFIA

[1] M. S. Baouendi - C. Goulaouic, *Régularité et théorie spectrale pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés*, Arch. Rational Mech. Anal., **34-5** (1969), pp. 361-379.

[2] P. Bolley - J. Camus, *Sur une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés à plusieurs variables*, Bull. Soc. Math. France, Mémoire **34** (1973), pp. 55-140.

[3] P. Bolley - J. Camus, *Régularité pour une classe de problèmes aux limites elliptiques dégénérés variationnels*, Bollettino U.M.I., (5), **14**-B (1977), pp. 77-100.

[4] A. Bove - J. E. Lewis - C. Parenti, *Parametrix for a characteristic Cauchy problem*, preprint, 1983.

[5] C. Goulaouic - N. Shimakura, *Regularitè Hölderienne de certain problèmes aux limites elliptiques dégénérés*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **10** (1983), pp. 79-108.

[6] L. Hörmander, *Fourier Integral Operators, I*, Acta Math., **127** (1971), pp. 87-183.

[7] W. Magnus - F. Oberhettinger - F. G. Tricomi, *Higher Transcendental Functions*, vol. I, McGraw-Hill Book Company, 1953.

Manoscritto pervenuto in redazione il 24 settembre 1984.