Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova

Alexandre Andreev

Sulla stabilità asintotica ed instabilità

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 75 (1986), p. 235-245

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1986__75__235_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 75 (1986)

Sulla stabilità asintotica ed instabilità

ALEXANDRE ANDREEV (*)

SUMMARY - The paper deals with a nonautonomous system of differential equations, precompact in the sense of G. R. Sell, Z. Arstein. We investigate the asymptotic stability and instability of the zero solution of such a system using the Liapunov functions with semidefinite derivative.

1. Introduzione.

Lo studio della stabilità della soluzione identicamente nulla di un sistema di equazioni differenziali ordinarie $\dot{x} = X(t, x)$, ove $x \in R^m$ e $X(t, 0) = 0$, effettuato con il metodo diretto di Liapunov, consiste nella ricerca di una funzione ausiliaria soddisfacente alcune condizioni. Tra generalizzazioni dei famosi teoremi di Liapunov ricordiamo i teoremi di E. A. Barbascin-N. N. Krasovskij e N. N. Krasovskij sulla stabilità asintotica ed instabilità che fanno uso di una funzione di Liapunov con la derivata semidefinita [1, 2], i teoremi di V. M. Matrosov che fanno uso di due e più funzioni ausiliarie [3] ed il metodo della famiglie ad un parametro di funzioni introdotto da L. Salvadori [4, 5].

I citati teoremi di [1, 2] valgano limitatamente a sistemi autonomi e periodici nel tempo. Scopo del presente lavoro è sviluppare questi teoremi per sistemi non autonomi usando i concetti di equazione limite [6-9]. I teoremi ottenuti generalizzano quelli contenuti nei lavori [9-13].

Nel n. 2 si presentano le definizioni di precompatezza di un sistema

(*) Indirizzo dell'A.: Lisunov 3, 93, 700120 Taskent-120, URSS.

non autonomo di equazioni differenziali nel senso di G. R. Sell [6], Z. Arstein [7, 8]. Si mostra che la stabilità uniforme della soluzione nulla del sistema originale e l'attrattività del punto $x = 0$ rispetto alle soluzioni di almeno un sistema limite implicano la stabilità equiasintotica della soluzione nulla del sistema originale.

Nel n. 3 si introducono alcune definizioni le quali permettono di valutare esattamente il comportamento limite delle soluzioni del sistema originale. A tale proposito si dimostrano quattro teoremi sulla stabilità asintotica ed instabilità.

I risultati del n. 3 si applicano nel n. 4 allo studio della stabilità asintotica ed instabilità della posizione d'equilibrio di un sistema meccanico soggetto ad una sollecitazione conservativa e dissipativa dipendente dal tempo.

2. Considerazioni preliminari.

Consideriamo il sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$\dot{x} = X(t, x) \qquad \big(X(t, 0) = 0\big) \tag{2.1}$$

dove $X\colon G = R^+ \times \Gamma \to R^m$, $R^+ = [0, +\infty[$, Γ è un insieme aperto di R^m.

Supporremo che X sia continua rispetto ad x, misurabile rispetto a t e soddisfi localmente la condizione di Caratheodory, cioè per ogni x dall'insieme limitato risulti $\|X(t, x)\| < \alpha(t)$ (con $\|x\|$ si è indicata una norma dello spazio R^m) con $\alpha(t)$ localmente integrabile. Inoltre valga la proposizione seguente [6]: per ogni insieme compatto $K \subset \Gamma$ esista una funzione nondecrescente $\nu_K(t)\colon R^+ \to R^+$ continua in 0, $\nu_K(0) = 0$ e tale che per ogni funzione continua $u(t)\colon [a, b] \to \Gamma$ si abbia

$$\left\| \int_a^b X\big(t, u(t)\big)\, dt \right\| < \nu_K(b - a)\,. \tag{2.2}$$

Dunque per ogni $(t_0, x_0) \in G$ esiste una soluzione di (2.1) $x = x(t, t_0, x_0)$ $(t \geqslant t_0)$ definita nell'intervallo $[t_0, \omega[$, e tale che, se $\omega < +\infty$, allora $x(t, t_0, x_0) \to \partial\Gamma$ per $t \to \omega$. Anche ogni soluzione di (2.1) ammette la funzione $\nu_K(t)$ come modulo di continuità in ogni intervallo $[a, b]$, tale che $x(t, t_0, x_0)\colon [a, b] \to K$.

Introduciamo come Z. Arstein in [8] l'operatore ordinario di tipo integrale che alla funzione continua $u\colon [\alpha, \beta] \to \Gamma$ associa per ogni $\tau \in [\alpha, \beta]$ una funzione continua $\Phi_\tau u$ da $[\alpha, \beta]$ a R^m tale che $\Phi_\tau u$ è continua nella norma dell'estremo superiore nell'intervallo compatto e $(\Phi_\tau u)(t) = (\Phi_\tau u)(s) + (\Phi_s u)(t)$ per tutti gli s, t, τ dall'intervallo di definizione di u. La funzione $u(t)$ risulta una soluzione della equazione operatoriale $x = \Phi x$, se $u(t) = u(\tau) + (\Phi_\tau u)(t)$.

Seguendo [7, 8] diamo le definizioni.

DEFINIZIONE 2.1. *Il sistema* (2.1) *si chiama precompatto se per ogni successione* $t_n \to +\infty$ *esistono una sottosuccessione* $t_{nk} \to +\infty$ *e l'operatore di tipo integrale* Φ, *tale che se una successione di funzioni continue* $u_k\colon [a, b] \to \Gamma$ *converge uniformemente a* $\varphi\colon [a, b] \to \Gamma$ *allora si ha*

$$(\Phi_a \varphi)(b) = \lim_{n_k \to +\infty} \int_a^b X\big(t_{nk} + t, u_k(t)\big)\, dt\,.$$

Con ciò l'operatore Φ *è l'operatore limite associato a* $X(t, x)$. *Il sistema di equazioni*

$$x = \Phi x \tag{2.3}$$

si chiama limite per (2.1).

DEFINIZIONE 2.2. *Il sistema* (2.1) *è precompatto* (*in senso limitato*) *se per ogni successione* $t_n \to +\infty$ *esistono una sottosuccessione* $t_{nk} \to +\infty$ *e una funzione* $\Phi(t, x)\colon G \to R^m$ *con la seguente proprietà: per ogni successione di funzioni continue* $u_k\colon [a, b] \to \Gamma$ *convergente uniformemente a* $\varphi\colon [a, b] \to \Gamma$ *si ha*

$$\int_a^b \Phi\big(\tau, \varphi(\tau)\big)\, d\tau = \lim_{n_k \to +\infty} \int_a^b X\big(t_{nk} + \tau, u_k(\tau)\big)\, d\tau\,.$$

Con ciò il sistema di equazioni differenziali

$$\dot{x} = \Phi(t, x) \tag{2.4}$$

si chiama limite per (2.1).

Le condizioni sufficienti a garantire la precompatezza di (2.1) sono ottenuti anche nei lavori [7, 8]. In seguito indicheremo nello stesso modo la convergenza di $X_n(t, x) = X(t_n + t, x)$ per $t_n \to +\infty$ sia all'operatore Φ (definizione 2.1) sia alla funzione $\Phi(t, x)$ (definizione 2.2).

La relazione tra il comportamento limite delle soluzioni di (2.1) e il comportamento delle soluzioni dei sistemi limite (2.3) o (2.4) è stata studiata nei lavori [14, 15]. A complemento di [14, 15] si può ottenere il risultato seguente [16].

TEOREMA 2.1. *Sia $x = 0$ uniformemente stabile per* (2.1) *ed esista almeno un sistema limite $x = \Phi_0 x$ per cui $x = 0$ sia un punto di attrattività per le sue soluzioni aventi valore iniziale in un intorno di $x = 0$. Allora $x = 0$ è equiasintoticamente stabile rispetto a* (2.1).

3. Sulla stabilità asintotica ed instabilità della soluzione nulla del sistema (2.1).

Sia $V = V(t, x)\colon G \to R^+$ una funzione continua soddisfacente localmente la condizione di Lipschitz in x uniformemente rispetto a t. Allora per questa funzione esiste la derivata rispetto al sistema (2.1) [12]

$$\dot V(t, x) = \limsup_{h \to 0^+} \frac{V(t + h, x + hX(t, x)) - V(t, x)}{h}$$

DEFINIZIONE 3.1. *Sia Ω un operatore di tipo integrale il quale associ ad ogni $\tau \in [\alpha, \beta]$ una funzione continua $\varphi\colon [\alpha, \beta] \to \Gamma$ la funzione continua $\Omega_\tau \varphi$ da $[\alpha, \beta]$ a R^+. L'operatore Ω si chiama limite di una funzione $W\colon G \to R^+$, quando esite una successione $t_k \to +\infty$ con la seguente proprietà: per ogni successione di funzioni continue $u_k\colon [a, b] \to \Gamma$ convergente uniformemente a $\varphi\colon [a, b] \to \Gamma$ si ha*

$$(\Omega_a \varphi)(b) = \lim_{k \to \infty} \int_a^b W\big(t_k + \tau, u_k(\tau)\big)\, d\tau$$

La funzione $\varphi\colon [a, b] \to \Gamma$ appartiene all'insieme $\{\Omega = 0\}$ se $(\Omega_a \varphi)(t) = 0$ per ogni $t \in [a, b]$.

DEFINIZIONE 3.2. *Gli operatori Φ e Ω costituiscono la coppia limite (Φ, Ω) se Φ e Ω sono limiti di $X(t, x)$ e $W(t, x)$ per la stessa successione $t_n \to +\infty$.*

DEFINIZIONE 3.3. *Sia $V: G \to R^+$ una funzione di Liapunov e $t_n \to +\infty$ una assegnata successione. Per ogni numero $c \geqslant 0$ e per ogni $t \geqslant 0$ indicheremo con $V_\infty^{-1}(t, c)$ l'insieme dei punti x, per ciascuno dei quali esiste almeno una sottosuccessione $t_{nk} \to +\infty$ e una successione $x_k \to x$ tali che*

$$\lim_{\substack{t_{nk} \to +\infty \\ x_k \to x}} V(t_{nk} + t, x_k) = c .$$

TEOREMA 3.1. *Supponiamo che: a) esista una funzione $V(t, x)$ definita positiva con la derivata $\dot{V}(t, x) \leqslant -W(t, x) \leqslant 0$; b) per ogni coppia limite l'insieme delle soluzioni massimali del sistema $\dot{x} = \Phi x$ che appartengono all'insieme $\{\Omega = 0\} \cap V_\infty^{-1}(t, c_0)$ $(c_0 = const)$ si reduce al solo punto $x = 0$. Allora la soluzione di* (1.1) $x = 0$ *è asintoticamente stabile.*

DIMOSTRAZIONE. Dalla condizione a) segue la stabilità di $x = 0$. Sia $x = x(t, t_0, x_0)$ una soluzione di (2.1) limitata nel futuro a un insieme compatto $K \subset \Gamma$. Mostriamo dunque che $x(t, t_0, x_0) \to 0$ per $t \to +\infty$.

Supponiamo per assurdo che esista una soluzione $x = x(t, t_0, x_0)$ per cui vi sia una successione $t_n \to +\infty$ tale che $\|x(t_n, t_0, x_0)\| \geqslant \varepsilon_0 > 0$. Indicheremo con $x_n(t) = x(t_n + t, t_0, x_0)$ le soluzioni dei sistemi $\dot{x} = X_{t_n}(t, x)$ tali che $x_n(0) = x_n = x(t_n, t_0, x_0)$.

La funzione $V(t) = V\big(t, x(t, t_0, x_0)\big)$ è monotona decrescente limitata inferiormente: perciò $V(t) \to c_0 = \text{const}$ per $t \to +\infty$. Inoltre in virtù di a) valgono le disuguaglianze

$$V(t_n + t) - V(t_n) \leqslant -\int_{t_n}^{t_n + t} W\big(\tau, x(\tau, t_0, x_0)\big)\, d\tau \leqslant 0 .$$

Esse possono essere riscritte nel modo seguente

$$V(t_n + t) - V(t_n) \leqslant -\int_0^t W_{t_n}\big(\tau, x_n(\tau)\big)\, d\tau \leqslant 0 , \tag{3.1}$$

dove $W_{t_n}(t, x) = W(t_n + t, x)$.

Scegliamo $\{t_{nk}\}$ in modo che esista la coppia limite (Φ_0, Ω_0) e che $\{x_{nk}\}$ tenda ad x_0. È evidente che $\|x_0\| > \varepsilon_0$. In virtù della convergenza $X_{t_{nh}} \to \Phi_0$ esiste una sottosuccessione $x_{nkl}(t)$ la quale converge alla soluzione $x = \varphi(t)$ $(\varphi(0) = x_0,\ \|x_0\| \geqslant \varepsilon_0)$ del sistema $x = \Phi_0 x$ [8].

Passando al limite per $n_{kl} \to +\infty$ dalla proprietà

$$V(t_{nkl} + t, x(t_{nkl} + t, t_0, x_0)) = V(t_{nkl} + t, x_{nkl}(t)) \to c_0$$

per $t_{nkl} \to +\infty$ e per ogni $t \geqslant 0$ si ottiene $\varphi(t) \in V_\infty^{-1}(t, c_0)$. Passando al limite per $n_{kl} \to +\infty$ dalle disuguaglianze (3.1) si deduce $c_0 - c_0 \leqslant \leqslant (\Omega_0 \varphi)(t) \leqslant 0$, da cui segue $(\Omega_0 \varphi)(t) = 0$ per ogni $t \geqslant 0$, in contrasto con l'ipotesi *b*).

TEOREMA 3.2. *Supponiamo che*: *a*) *esista una funzione* $V(t, x)$ *definita positiva con la derivata* $\dot{V}(t, x) \leqslant -W(t, x) \leqslant 0$; *b*) *esista almeno una successione* $t_n \to +\infty$ *per cui la coppia limite* (Φ_0, Ω_0) *e l'insieme limite* $V_\infty^{-1}(t, c)$ *sono tali che per ogni fissato* $c = c_0 > 0$ *l'insieme* $\{\Omega_0 = 0\} \cap V_\infty^{-1}(t, c_0)$ *non contenga alcuna soluzione del sistema* $x = \Phi_0 x$; *c*) *le soluzioni di* (2.1) *dipendano con continuità dalle condizioni iniziali. Allora, la soluzione di* (2.1) $x = 0$ *è equiasintoticamente stabile.*

DIMOSTRAZIONE. Dalla condizione *a*) segue che la soluzione nulla di (2.1) è stabile.

Facciamo vedere che per ogni soluzione di (2.1) $x = x(t, t_0, x_0)$ contenuta nel futuro in un insieme compatto $K \subset \Gamma$ la funzione $V(t) = V(t, x(t, t_0, x_0)) \downarrow 0$ (decresce e tende allo zero) per $t \to +\infty$.

Supponiamo per assurdo che esista una soluzione $x = x(t, t_0, x_0)$, $x(t, t_0, x_0) \in K \subset \Gamma$ per tutti i $t \geqslant t_0$ e tale che $V(t, x(t, t_0, x_0)) \downarrow c_0 \neq 0$. Sia $t_n \to +\infty$ la successione soddisfacente l'ipotesi *b*). Poniamo $x_n = x(t_n, t_0, x_0)$ e $x_n(t) = x(t_n + t, t_0, x_0)$; allora le funzioni $x_n(t)$ saranno le soluzioni dei sistemi $x = X_{t_n}(t, x)$. Scegliamo la sottosuccessione $t_{nk} \to +\infty$ tale che $x_{nk}(t)$ converge ad una funzione $\varphi_0(t)$ uniformemente in ogni intervallo $[0, T]$. La funzione $\varphi_0(t)$ risulta essere soluzione del sistem $x = \Phi_0 x$.

Dalla proprietà $V(t_{nk} + t, x_{nk}(t)) \downarrow c_0$ e da disuguaglianze di tipo (3.1) segue che $\varphi_0(t) \in V_\infty^{-1}(t, c_0)$ e $\varphi_0(t) \in \{\Omega = 0\}$. Troviamo così una contraddizione rispetto all'ipotesi *b*).

Pertanto per ogni soluzione limitata di (2.1) si ha che $V(t, x(t, t_0, x_0)) \downarrow 0$. Questa proprietà insieme alla condizione *c*) è sufficiente per la stabilità equiasintotica [17, 12].

I seguenti due teoremi si dimostrano analogamente ai teoremi 3.1 e 3.2 e ai teoremi 3.3 e 3.5 di [13].

TEOREMA 3.3. *Supponiamo che*: *a*) *esista una funzione* $V(t, x)$ *definita positiva e soddisfacente la condizione di Lipschitz rispetto a* t

ed x con la derivata $\dot{V}(t, x) \leqslant -W(t, x) \leqslant 0$; b) per ogni coppia limite l'insieme $V_{\infty}^{-1}(t, c_0) \cap \{\Omega = 0\}$ non contenga alcuna soluzione del sistema $x = \Phi x$, tranne $x = 0$; c) le soluzioni di (2.1) e di ogni sistema limite dipendano con continuità dalle condizioni iniziali. Allora la soluzione nulla di (2.1) è uniformemente asintoticamente stabile.

TEOREMA 3.4. *Supponiamo che: a) esista una funzione $V(t, x)$ la quale sia limitata nella regione $V(t, x) > 0$ e tale che per qualche $t = t_0 \geqslant 0$ in ogni piccolo intorno di $x = 0$ esistano dei punti nei quali si ha $V > 0$ inoltre la derivata di $V(t, x)$ soddisfi la relazione $\dot{V}(t, x) \geqslant W(t, x) \geqslant 0$; b) esista almeno una successione $t_n \to +\infty$ per cui la coppia limite (Φ_0, Ω_0) e l'insieme limite $V_{\infty}^{-1}(t, c)$ siano tali che per ogni fissato $c = c_0 > 0$ l'insieme $\{\Omega_0 = 0\} \cap V_{\infty}^{-1}(t, c_0)$ non contenga alcuna soluzione del sistema $x = \Phi_0 x$. Allora la soluzione nulla di (2.1) è instabile.*

OSSERVAZIONE 3.1. *I teoremi* 3.1-3.4 *generalizzano i risultati ottenuti nei lavori* [9-12] *poichè in questi casi si suppone che la funzione $W(t, x)$ possa dipendere anche dal tempo. In tal modo si generalizzano i teoremi sulla stabilità asintotica ed instabilità per i sistemi non autonomi periodici nel tempo* [2].

OSSERVAZIONE 3.2. *Nei teoremi* 2.2 *e* 2.4 *si suppone che esista almeno una coppia limite (Φ, Ω) soddisfacente la condizione b). Tali teoremi garantiscono la stabilità quasiasintotica e l'instabilità anche se il sistema* (2.1) *e la funzione $W(t, x)$ soddisfano soltanto le condizioni di precompatezza per una successione infinita degli intervalli* $[t_n, t_n + T_n]$ $(t_n \to +\infty,\ T_n \geqslant T_0 > 0)$.

4. Sulla stabilità asintotica di un sistema meccanico.

Consideriamo un sistema a vincoli olonomi indipendenti dal tempo ad n gradi di libertà. Con riferimento ad una n-pla di coordinate lagrangiane indipendenti $q_1, q_2, \dots, q_n$ otteniamo per l'energia cinetica la seguente espressione

$$T = \tfrac{1}{2}(\dot{q})' A(q) \dot{q}\,, \qquad (\dot{q})' = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)\,,$$

Supponiamo che il sistema sia soggetto alle seguenti sollecitazioni:

a) una sollecitazione derivante dal potenziale $U(t, q) = g(t)\,U_0(q)$ con $0 < g(t) \leqslant g_1$, $g(t) \in C^1$, e con $U_0\colon \Gamma_a \to R$ di classe C^1, $U_0(0) = 0$ (ove Γ_a è un intorno di $q = 0$), $\partial U_0/\partial q = 0$ per $q = 0$;

b) una sollecitazione dissipativa $Q = Q(t, q, \dot{q})$, dove $Q(t, q, 0) = 0$ e $Q(t, q, \dot{q})$ soddisfa condizioni di precompatezza in senso limitato [7].

Le equazioni di moto del sistema sono quindi:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = g(t)\,\frac{\partial U_0}{\partial q} + Q\,. \tag{4.1}$$

Ovviamente esso ammette la posizione d'equilibrio

$$\dot{q} = q = 0\,. \tag{4.2}$$

Le equazioni (4.1) possono essere messe nella forma

$$\ddot{q} = (\dot{q})' B \dot{q} + g(t) A^{-1} \frac{\partial U_0}{\partial q} + A^{-1} Q\,, \tag{4.3}$$

dove $\{(\dot{q})' B \dot{q}\}$ è una famiglia di forme n-quadratiche. In virtù delle ipotesi su $g(t)$ e $Q(t, q, \dot{q})$ le equazioni precedenti soddisfano le condizioni di precompatezza in senso limitato. Le equazioni limite hanno una forma analoga a (4.3)

$$\ddot{q} = (\dot{q})' B \dot{q} + g_0(t) A^{-1} \frac{\partial U_0}{\partial q} + A^{-1} Q_0\,, \tag{4.4}$$

dove

$$\int_0^t g_0(\tau)\,d\tau = \lim_{t_n \to +\infty} \int_0^t g(t_n + \tau)\,d\tau\,,$$

$$\int_0^t Q_0(\tau, q, \dot{q})\,d\tau = \lim_{n_k \to +\infty} \int_0^t Q(t_n + \tau, q, \dot{q})\,d\tau\,.$$

Supporremo che sia $g(t) \geqslant s_0 > 0$ per t appartenente ad una successione di intervalli $[t_n, t_n + T_n]$ ($t_n \to +\infty$, $T_n \geqslant T_0 > 0$). Ovviamente per ogni funzione limite $g_0(t)$ corrispondente alla sottosuccessione $t_{nk} \to +\infty$ risulta $g_0(t) \geqslant s_0 > 0$ per $t \in [0, T_0]$.

Supporremo inoltre che sia soddisfatta la condizione

$$Q'\dot{q} \leqslant -h(t)\|\dot{q}\|^{\alpha(t)} \qquad \left(h(t) \geqslant 0,\ \|q\|^2 = q_1^2 + q_2^2 + \ldots + q_n^2\right),$$

dove la funzione $\alpha(t)$ è uniformemente continua nell'intervallo $[0, +\infty[$ e verifica $0 < \delta \leqslant \alpha(t) \leqslant 1$.

Valgano infine almeno una delle condizioni seguenti:

$$(4.5) \qquad 0 < h_0 \leqslant h(t) \leqslant h_1,\ \alpha(t) \leqslant \varepsilon < 1,\ \frac{\dot{g}(t)}{g^2(t)} \leqslant M ;$$

per ogni $q \in \Gamma_q$

$$(4.6) \qquad \frac{h(t)}{g(t)} E + \frac{\dot{g}(t)}{g^2(t)} A(t, q) \geqslant l(t) E ,$$

dove $l(t) \geqslant 0$, $l(t) \geqslant b_0 > 0$ per $t \in [t_n, t_n + T_n](t_n \to +\infty, T_n \geqslant T_0 > 0)$.

TEOREMA 4.1. *Supponiamo che: a) la funzione $U_0(q)$ abbia nel punto $q = 0$ un massimo forte; b) la posizione d'equilibrio $q = 0$ sia isolata, cioè $\|\partial U_0/\partial q\| = 0$ se e solo se $q = 0$. Allora la posizione d'equilibrio (4.2) è equiasintoticamente stabile.*

DIMOSTRAZIONE. Poniamo $V = T/g - U_0$. Tenendo conto della condizione a) e della proprietà $0 < g(t) \leqslant g_1$ è facile verificare che la funzione V è definita positiva. La derivata $\dot{V}$ soddisfa la stima

$$\dot{V} = \frac{1}{g} Q'\dot{q} - \frac{\dot{g}}{g^2} T \leqslant -\frac{h(t)}{g(t)} \|\dot{q}\|^{\alpha(t)+1} - \frac{\dot{g}(t)}{g^2(t)} (\dot{q})' A(q)\, \dot{q} \leqslant -l_1(t)\|\dot{q}\|^2 \leqslant 0 ,$$

dove si ha: $l_1(t) = h(t)/g(t)$ nel caso (4.5); $l_1(t) = l(t)$ nel caso (4.6).

Ovviamente in entrambi i casi si ha $l_1(t) \geqslant b_{1l} > 0$ per $t \in [t_n, t_n + T_n]$. La funzione limite della funzione $W(t, \dot{q}) = l_1(t)\|\dot{q}\|^2$ ha una forma analoga, cioè la funzione limite $\Omega(t, \dot{q}) = l_{10}(t)\|\dot{q}\|^2$, dove la funzione $l_{10}(t)$ è definita dall'uguaglianza

$$\int_0^t l_{10}(\tau)\, d\tau = \lim_{n_k \to \infty} \int_0^t l_1(t_{nk} + \tau)\, d\tau .$$

È immediato osservare che da $l_1(t) \geqslant b_{12} > 0$ segue $l_{10}(t) \geqslant b_{10} > 0$

per $t \in [0, T_0]$. Dunque $\Omega(t, \dot{q}) = 0$ per $t \in [0, T_0]$ se e solo se $\dot{q} = 0$.

Sia $q = q(t)$ una soluzione di (4.4) tale che $\dot{q}(t) = 0$ per $t \in [0, T_0]$. Sostituendo $\dot{q}(t) = 0$ nella equazione (4.4) si ottiene $(\partial U_0/\partial q)(q(t)) = 0$ per $t \in [0, T_0]$. In virtù dell'ipotesi *b*) questa relazione può valere se e solo se $q(t) = 0$ per $t \in [0, T_0]$. Allora l'insieme $\{\Omega(t, \dot{q}) = 0\}$ contiene per $t \in [0, T_0]$ solo la soluzione $q(t) = 0$ di (4.4).

L'insieme $V_\infty^{-1}(t, c)$ associato alla successione $t_n \to +\infty$ è definito per $t \in [0, T_0]$ mediante la formula

$$V_\infty^{-1}(t, c) = \left\{q, q : \frac{T(q, \dot{q})}{g_0(t)} - U_0(q) = c = const\right\}$$

Ovviamente per $c > 0$ esso non contiene la soluzione $q(t) \equiv 0$. Dunque l'insieme $\{\Omega(t, \dot{q}) = 0\} \cap V_\infty^{-1}(t, c_0)$ $(c_0 > 0)$ non contiene alcuna soluzione di (4.4).

Usando il teorema 3.2 otteniamo la tesi.

TEOREMA 4.2. *Supporremo che: la funzione $g(t)$ abbia le seguenti proprietà: a)* $0 < s_0 < g(t) \leqslant s_1$; *b) $g(t)$ sia uniformemente continua per $t \in [0, +\infty[$; c) la funzione $k(t)$ della proposizione* (4.6) *soddisfi la relazione $l(t) \geqslant b_0 > 0$ per $t \in [t_n, t_n + T_n]$, dove $T_n \geqslant t_0 > 0$ e la successione $\{t_n\}$ verifichi la condizione* $t_{n+1} - t_n \leqslant \varrho = \text{const}$. *Allora usando il teorema* 3.3 *si dimostra (procedendo in modo analogo alla dimostrazione del teorema* 4.1) *che la posizione d'equilibrio* (4.2) *è uniformemente asintoticamente stabile.*

BIBLIOGRAFIA

[1] E. A. BARBASCIN - N. N. KRASOVSKIJ, *Sulla stabilità globale del moto (in russo)*, Doklady Akad. Nauk SSR, **36**, no. 3, 1952.

[2] N. N. KRASOVSKIJ, *Stability of motion*, Chap. III, Sec. 14, 15, Stanford University Press, Stanford, California, 1963.

[3] V. M. MATROSOV, *On the stability of motion*, PMM (J. appl. math. and mech.), **26** (1962).

[4] L. SALVATORI, *Sulla stabilità del movimento*, Le Matematiche, **24** (1969).

[5] L. SALVADORI, *Famiglie ad un parametro di funzioni di Liapunov nello studio della stabilità*, Symposia Math., **6** (1971).

[6] G. R. SELL, *Nonautonomous differential equations and topological dynamics*, Trans. Amer. Mat. Soc., **127** (1967).

[7] Z. Arstein, *Topological dynamics of a ordinary differential equations*, J. of Differ. Equations, **23** (1877).

[8] Z. Arstein, *The limiting equations of nonautonomous ordinary differential equations*, J. of Differ. Equations, **25** (1977).

[9] A. S. Andreev, *Asymptotic stability and instability of nonautonomous systems*, PMM (J. appl. math. and mech.), **43** (1979).

[10] D. R. Wakeman, *An application of topological dynamics to obtain a new invariance property for nonautonomous ordinary differential equations*, J. of Differ. Equations, **17** (1975).

[11] J. P. LaSalle, *Stability of nonautonomous systems*, Nonlinear Analysis, TMA, **1** (1976).

[12] N. Rouche - P. Abets - M. Laloy, *Stability theory by Liapunov's direct method*, Springer, Berlin, 1977.

[13] A. S. Andreev, *Sulla stabilità asintotica ed instabilità della soluzione nulla di un sistema nonautonomo*, PPM, **48** (1984).

[14] P. Bondi - V. Moauro - F. Visentin, *Limiting equations in the stability problem*, Nonlinear Analysis, TMA, **1** (1976).

[15] Z. Arstein, *Uniform asymptotic stability via the limiting equations*, J. of Differ. Equations, **27** (1978).

[16] A. Andreev, *Sulla stabilità asintotica ed instabilità*, Quad. no. 15/S dell'Istituto di Matematica «F. Enriques» di Milano, (1984).

[17] A. S. Oziraner, *On asymptotic stability and instability relative to a part of variables*, PMM (J. appl. math. and mech.), **37** (1973).

Manoscritto pervenuto in redazione il 4 dicembre 1984.