

# RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

STEFANO TRAPANI

## **Inviluppi di olomorfia e gruppi di coomologia di Hausdorff**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,*  
tome 75 (1986), p. 25-37

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1986\\_\\_75\\_\\_25\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1986__75__25_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

## Involuppi di olomorfia e gruppi di coomologia di Hausdorff.

STEFANO TRAPANI (\*)

### Introduzione.

Consideriamo un dominio (aperto connesso)  $D$  in una varietà <sup>(1)</sup> di Stein  $X$ . È noto che per ogni  $q \geq 0$  è possibile assegnare sui gruppi di coomologia del fascio strutturale  $H^q(D; \mathcal{O})$  una topologia di spazio vettoriale topologico.

Scopo di questo lavoro è studiare le relazioni che intercorrono tra le seguenti proprietà del dominio  $D$ :

- 1)  $H^1(D; \mathcal{O})$  ha una topologia di Hausdorff.
- 2)  $D$  è di Stein.
- 3)  $D$  possiede involuppo di olomorfia contenuto in  $X$ .

Più precisamente:

Sia  $\mathcal{H}_D$  la famiglia dei sottoinsiemi analitici chiusi in  $X$  di dimensione complessa 1 che hanno intersezione non vuota con  $D$ . Fissato  $I \in \mathcal{H}_D$ , sia  $\mathcal{F}_I$  il fascio delle funzioni olomorfe nulle su  $I$ .

Vale allora il seguente:

(\*) Indirizzo dell'A.: Via Fleming 99, 00191 Roma.

<sup>(1)</sup> In tutto il lavoro le varietà e gli spazi considerati si supporranno connessi.

**TEOREMA 1.** *Sia  $D$  un dominio in una varietà di Stein  $X$ ;  $D$  è una varietà di Stein se e soltanto se entrambe le condizioni seguenti sono soddisfatte:*

- 1)  $H^1(D; \mathcal{O})$  è uno spazio di Hausdorff.
- 2)  $H^1(D; \mathcal{F}_I)$  ha la topologia banale  $\forall I \in \mathcal{H}_D$ .

Nel caso particolare in cui  $\dim X = 2$  la condizione 2 del teorema precedente può essere sostituita da una condizione topologica:

**TEOREMA 2.** *Sia  $D$  un dominio in una varietà di Stein  $X$  di dimensione complessa 2.*

*Allora  $D$  è una varietà di Stein se e soltanto se entrambe le condizioni seguenti sono soddisfatte:*

- 1)  $H^1(D; \mathcal{O})$  è uno spazio di Hausdorff.
- 2)  $X - D$ , con la topologia indotta, non possiede componenti connesse compatte.

Dato comunque un dominio  $D$  in  $X$ , si può considerare il complementare in  $X$  della riunione delle componenti connesse non compatte di  $X - D$ , indicheremo questo insieme con  $D^1$ .

Dimostreremo in seguito che  $D^1$  è un dominio.

L'introduzione del dominio  $D^1$  permette di caratterizzare i domini  $D$  in  $X$  tali che  $H^1(D; \mathcal{O})$  è di Hausdorff.

Precisamente: Sia  $D$  un dominio in una varietà di Stein  $X$  di dimensione complessa 2; indichiamo con  $\Omega^2$  il fascio delle 2 forme differenziali olomorfe su  $X$ ; vale allora il seguente:

**TEOREMA 3.** *Sia  $D$  un dominio in una varietà di Stein  $X$  tale che  $\dim X = 2$ .*

*Lo spazio  $H^1(D; \mathcal{O})$  è di Hausdorff se e soltanto se entrambe le condizioni seguenti sono soddisfatte:*

- 1)  $D^1$  è di Stein.
- 2)  $\forall L$  componente connessa compatta di  $X - D$  si ha che  $H^1(L; \Omega^2) = \text{In } \varinjlim_{U \supseteq L} H^1(U; \Omega^2) = 0$ .

**OSSERVAZIONE 1.** Gli esempi nel seguito mostrano che il Teorema 2 non è valido se  $\dim X > 2$  e che le condizioni 1) e 2) poste nei teoremi precedenti sono tutte tra loro indipendenti.

Per spazi complessi vale un Teorema analogo al Teorema 3, precisamente:

**TEOREMA 3.** — *Sia  $D$  un domino in uno spazio complesso di Stein normale di dimensione 2.*

*Lo spazio  $H^1(D; \mathcal{O})$  è di Hausdorff se e soltanto se entrambe le condizioni seguenti sono soddisfatte:*

- 1)  $D^1$  è di Stein
- 2)  $H^1(D^1 - L; \mathcal{O})$  è di Hausdorff  $\forall L$  componente connessa compatta di  $X - D$ .

Le condizioni del Teorema 3 risultano soddisfatte ad esempio, quando  $D^1$  è di Stein ed ogni componente connessa compatta di  $X - D$  è un compatto di Stein [1]. Vedremo in seguito che se  $X$  è uno spazio complesso di Stein normale di dimensione  $n > 1$ , allora ogni funzione olomorfa sul dominio  $D$  si estende olomorficamente al dominio  $D^1$ . Vale allora il:

**COROLLARIO 1.** *Nelle ipotesi del teorema 3' se  $H^1(D; \mathcal{O})$  è di Hausdorff,  $D^1$  è l'inviluppo di olomorfa di  $D$ .*

## 1. Dimostrazioni.

### DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 1.

Premettiamo il

**LEMMA.** *Nelle ipotesi del teorema 1; scelto un sottoinsieme analitico  $I \in \mathcal{H}_D$ , ogni funzione olomorfa su  $I \cap D$  si può approssimare uniformemente sui compatti di  $I \cap D$  con restrizioni di funzioni olomorfe su tutto  $D$ .*

Per la dimostrazione, vedere [3] pag. 319.

### DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 1.

$\Rightarrow$  Segue dal Teorema B.

$\Leftarrow$  1° Caso  $X = \mathbb{C}^n$ .

Se per assurdo  $D$  non fosse un dominio di olomorfa in  $\mathbb{C}^n$ , esisterebbe un punto  $P \in D$  e un policilindro  $\Delta$  di centro  $P$  tale che  $\Delta \not\subset D$

e tale che ogni funzione olomorfa su  $D$  risulta sviluppabile in serie di potenze su tutto  $\Delta$ . (Vedi [6] pag. 158.)

Sia  $Q \in \Delta - D$ ,  $I$  la retta complessa che congiunge  $P$  e  $Q$ .  $I \in \mathcal{H}_D$ .

$I \cap \Delta \cap \partial D \neq \emptyset$ . Prendiamo un punto  $R \in I \cap \Delta \cap \partial D$ .

Sia  $f \in \Gamma(I - \{R\}; \mathcal{O})$  con un polo in  $R$ .

Per il lemma esiste una successione di funzioni  $f_n \in \Gamma(D; \mathcal{O})$  che converge ad  $f$  uniformemente sui compatti di  $I \cap D$ .

Sia  $D^*$  la componente connessa di  $P$  in  $\Delta \cap D$ .  $f_n|_{D^*}$  si estende olomorficamente ad  $\tilde{f}_n$  olomorfa su  $\Delta$ .  $\tilde{f}_n|_{I \cap \Delta}$  è olomorfa in un intorno del punto  $R$  ed approssima uniformemente la funzione  $f$ , polare in  $R$ , sui sottoinsiemi compatti di  $I \cap D^*$ ;  $R \in \overline{I \cap D^*}$ . Questo è assurdo.

2° Caso.  $X$  qualunque.

Basta dimostrare che per ogni punto  $P_0 \in \partial D$  esiste un intorno aperto  $U$ , di Stein, di  $P$  tale che  $U \cap D$  è di Stein ([12] pag. 484).

Possiamo scegliere  $U$  in modo tale che esista un aperto convesso  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$  ed una applicazione biolomorfa  $\phi: U \rightarrow \Omega$ . Se  $D_1$  è una componente connessa di  $U \cap D$ , resta da dimostrare che  $\phi(D_1)$  è un dominio di olomorfia in  $\mathbb{C}^n$ .

Poichè  $X$  è di Stein esiste una funzione olomorfa  $\tilde{\phi}: X \rightarrow \mathbb{C}^n$  tale che  $\tilde{\phi}|_U = \phi$ .

Se per assurdo  $\phi(D_1)$  non fosse di olomorfia potremmo scegliere  $P, Q, \Delta, I$  ed  $R$  come sopra.

Poniamo  $J = \tilde{\phi}^{-1}(I)$ ;  $J$  è un sottoinsieme analitico chiuso in  $X$ .  $\phi(J \cap U) = I \cap \Omega$  è convesso,  $\phi$  è biolomorfa, perciò  $J \cap U$  è connesso non singolare ed ha dimensione 1.

Sia  $J^*$  la componente irriducibile di  $J$  di dimensione 1 tale che  $P_0 \in J^*$ ,  $J \cap U = J^* \cap U$ . Poichè  $U$  è di Stein  $\phi(U) \supseteq \Delta$ .

$J^* \in \mathcal{H}_D$ . La tesi segue allora dal lemma applicato al dominio  $D$  ed al sottoinsieme analitico  $J^*$ , tenendo conto del fatto che  $\phi$  è un biolomorfismo.

Premettiamo alcuni lemmi fondamentali per il seguito:

**LEMMA 1.** *Sia  $X$  uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto, ogni componente connessa compatta di  $X$  possiede un sistema fondamentale di intorni aperti e compatti.*

Per la dimostrazione vedi: [2] T.G. II 32.

**LEMMA 2.** *Sia  $X$  uno spazio topologico connesso e localmente connesso; sia  $D \subseteq X$  un dominio, sia  $H$  un sottoinsieme simultaneamente chiuso ed aperto nella topologia indotta di  $X$  su  $X - D$ .*

L'insieme  $\tilde{D} = D \cup H$  è allora un dominio.

DIM.  $X - (D \cup H) = (X - D) - H$  è chiuso in  $X - D$ , perciò in  $X$ , ne segue che  $\tilde{D}$  è aperto in  $X$ .

$\tilde{D}$  è connesso. Sia infatti  $D_0$  la componente connessa di  $\tilde{D}$  che contiene  $D$ ;  $D_0$  è aperto in  $X$  dato che  $X$  è localmente connesso e  $D_0$  è una componente connessa di un aperto di  $X$ . Ne segue che  $\tilde{D} - D_0$  è chiuso in  $\tilde{D}$ .  $\tilde{D} - D_0 \subseteq H \subseteq \tilde{D}$ .

L'insieme  $\tilde{D} - D_0$  è allora chiuso in  $H$ .  $H$  è chiuso in  $X$ , in fine  $\tilde{D} - D_0$  è chiuso in  $X$ .

Tuttavia  $\tilde{D} - D_0$  è riunione di componenti connesse di  $\tilde{D}$  ed è perciò aperto in  $X$ ,  $X$  è connesso,  $\tilde{D} - D_0 \neq X$  perciò  $\tilde{D} - D_0 = \emptyset$  ovvero che  $\tilde{D} = D_0$  è connesso.

Sia  $X$  uno spazio topologico di Hausdorff a base numerabile di aperti, sia  $\{K_i\}_{i \in I}$  una famiglia di sottoinsiemi simultaneamente compatti ed aperti in  $X$ ; sia  $F = \bigcup_{i \in I} K_i$ .

LEMMA 3. *Esiste una esaustione al più numerabile di  $F$  mediante sottoinsiemi simultaneamente compatti ed aperti in  $X$ .*

DIM.  $F$  è uno spazio a base numerabile di aperti; segue che dal ricoprimento aperto  $\{K_i\}_{i \in I}$  si può estrarre un sottoricoprimento numerabile  $\{K'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

Consideriamo gli insiemi:  $K''_n = \bigcup_{h=1}^n K'_h$ . Essi formano una esaustione di  $F$  con le proprietà richieste dal lemma.

LEMMA 4. *Sia  $X$  uno spazio complesso normale e connesso, sia  $D$  un dominio in  $X$ , allora l'insieme  $D^1$  definito nell'introduzione è un dominio.*

DIM. Sia  $\{K_i\}_{i \in I}$  la famiglia dei sottoinsiemi di  $X - D$ , che sono simultaneamente compatti e aperti in  $X - D$  con la topologia indotta da  $X$ .

In base al lemma 1,  $D^1 = D \cup \bigcup_{i \in I} K_i$ .

$D \cup K_i$  è un dominio  $\forall i \in I$ , in base al lemma 2. Ne segue che  $D^1$  è un dominio.

LEMMA 5. *Nella ipotesi del lemma 4 se  $\dim X > 1$  tutte le funzioni olomorfe su  $D$  si estendono olomorficamente a  $D^1$ .*

Dim. Sia  $\{K'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una esaustione al più numerabile di  $F$  mediante compatti aperti.

Poniamo  $D_n = D \cup K_n$ ,  $D_n$  è un dominio  $\forall n \in N$ , (lemma 2),  
 $D_n \subseteq D_{n+1}$ ,  $D^1 = \bigcup_{n \in N} D_n$ .

Ogni funzione olomorfa su  $D$  si estende olomorficamente a  $D_n$   
 $\forall n \in N$ , (Teorema di Hartogs) ([1] pag. 50). Ne segue la tesi.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 2.

$\Rightarrow$  Segue dal Teorema B e dal lemma 5.

$\Leftarrow$  Nella ipotesi del Teorema  $H_k^1(D; \Omega^2) = 0$  ([9] pag. 429).  
 Poichè  $H^1(D; \mathcal{O})$  è di Hausdorff,  $H^1(D; \mathcal{O}) = H_k^1(D; \Omega^2) = 0$ . Teo-  
 rema di dualità di Serre [2] pag. 316. Ne segue che  $D$  è di Stein ([7]  
 pag. 160).

LEMMA 6. Sia  $D$  un dominio in uno spazio complesso normale con-  
 nesso di Stein  $X$ , di dimensione  $n > 1$ ,  $\{K_r\}_{r \in R}$  una famiglia di compatti  
 aperti in  $X - D$ ,  $S = \bigcup_{r \in R} K_r$ ,  $\tilde{D} = D \cup S$ . Allora  $\tilde{D}$  è un dominio e  
 se  $H^1(D; \mathcal{O})$  è uno spazio di Hausdorff anche  $H^1(\tilde{D}; \mathcal{O})$  è di Hausdorff.

DIM.  $\tilde{D}$  è un dominio per il lemma 2.

Esiste una esaustione al più numerabile di  $S$ ,  $\{K_m\}_{m \in N}$  mediante  
 compatti aperti.

Poniamo  $D_m = D \cup K_m$ .

Le funzioni olomorfe su  $D$  si estendono a  $D_m \forall m \in N$ .

Perciò per dimostrare che  $H^1(\tilde{D}; \mathcal{O})$  è di Hausdorff basta mostrare  
 che  $H^1(D_m; \mathcal{O})$  è di Hausdorff per ogni  $m \in N$  ([4]).

Rimane perciò da far vedere che  $H^1(D; \mathcal{O})$  di Hausdorff implica  
 $H^1(D_m; \mathcal{O})$  di Hausdorff per ogni  $m \in N$ . Consideriamo allora la suc-  
 cessione di coomologia relativa:

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \Gamma(X - K_m; \mathcal{O}) \xrightarrow{r} \Gamma(X; \mathcal{O}) \rightarrow H_{K_m}^1(X; \mathcal{O}) \rightarrow \\ \rightarrow H^1(X; \mathcal{O}) \rightarrow \dots \quad ([1] \text{ pag. } 13) . \end{aligned}$$

Lo spazio  $X - K_m = (X - D_m) \cup (D_m - K_m) = (X - D_m) \cup D$  è con-  
 nesso per via del lemma 2.

Allora per il Teorema di Hartogs  $r$  è surgettiva. Poichè inol-  
 tre  $H^1(X; \mathcal{O}) = 0$  ne segue che  $H_{K_m}^1(X; \mathcal{O}) = 0$ . Per escissione  
 $H_{K_m}^1(D_m; \mathcal{O}) = 0$ .

Poichè nella successione di coomologia relativa:

$$\dots \rightarrow H_{K_m}^1(D_m; \mathcal{O}) \rightarrow H^1(D_m; \mathcal{O}) \xrightarrow{r^*} H^1(D; \mathcal{O}) \rightarrow \dots$$

$H_{\mathcal{K}_m}^1(D_m; \mathcal{O}) = 0$ , deve essere  $r^*$  iniettiva, ne segue che se  $H^1(D; \mathcal{O})$  è di Hausdorff anche  $H^1(D_m; \mathcal{O})$  deve esserlo.

**LEMMA 7.** *Sia  $D$  un dominio in uno spazio complesso connesso di Stein normale  $X$  di dimensione 2, allora se  $H^1(D; \mathcal{O})$  è uno spazio di Hausdorff,  $D^1$  è di Stein e  $D^1 - L$  è un dominio con  $H^1(D^1 - L; \mathcal{O})$  di Hausdorff  $\forall L$  componente connessa compatta di  $X - D$ .*

**DIM.** Applicando il lemma 6 alla famiglia di tutti i compatti aperti in  $X - D$  si dimostra che  $H^1(D^1; \mathcal{O})$  è di Hausdorff. La restrizione  $r^*: H^1(X; \mathcal{O}) \rightarrow H^1(D^1; \mathcal{O})$  ha immagine densa ([11] pag. 32); segue che  $H^1(D^1; \mathcal{O}) = 0$ , perciò  $D^1$  è di Stein ([5] pag. 63 e [11] pag. 318).

Sia ora  $\{K_i\}_{i \in I}$  la famiglia dei compatti aperti di  $X - D$  che non incontrano  $L$ , dal lemma 1 segue che  $D^1 - L = D \cup \bigcup_i K_i$ . Dal lemma 6 segue allora che  $D^1 - L$  è un dominio con  $H^1(D^1 - L; \mathcal{O})$  di Hausdorff.

Il lemma 5 e il lemma 7 dimostrano il corollario 1 dell'introduzione.

**LEMMA 8.** *Sia  $X$  una varietà complessa di Stein, di dimensione  $n > 1$ , sia  $D$  un dominio in  $X$ , supponiamo che ogni funzione olografa su  $D$  si possa estendere olograficamente a tutto  $X$ .*

Allora, posto  $A = X - D$ ,  $H^1(D; \mathcal{O})$  è di Hausdorff se e soltanto se  $H_k^{n-1}(A; \Omega^n) = 0$ .

**DIM.** Consideriamo la successione esatta di fasci:  $0 \rightarrow \mathcal{O}_D^n \rightarrow \Omega^n \rightarrow \mathcal{O}_A^n \rightarrow 0$  (dove  $\mathcal{O}_D^n$  ed  $\mathcal{O}_A^n$  sono i fasci ottenuti restringendo  $\Omega^n$  a  $D$  ed  $A$  rispettivamente, ed estendendo con 0 fuori).

Prendiamone la successione di coomologia a supporto compatto:

$$\dots \rightarrow H_k^{n-1}(X; \Omega^n) \rightarrow H_k^{n-1}(A; \Omega^n) \rightarrow H_k^n(D; \Omega^n) \xrightarrow{e^*} H_k^n(X; \Omega^n) \rightarrow \dots$$

Dove  $e^*$  è l'applicazione indotta dall'estensione.  $H^1(X; \mathcal{O})$  è di Hausdorff, segue perciò dal teorema di dualità di Serre che  $H_k^n(X; \Omega^n)$  è di Hausdorff e che  $H^1(D; \mathcal{O})$  è di Hausdorff se e solo se  $H_k^n(D; \Omega^n)$  lo è.  $H_k^n(D; \Omega^n)$  è di Hausdorff se e solo se  $e^*$  è iniettiva. Infatti se  $e^*$  è iniettiva, poichè  $H_k^n(X; \Omega^n)$  è di Hausdorff anche  $H_k^n(D; \Omega^n)$  lo è.

Inversamente supponiamo che entrambi gli spazi  $H_k^n(X; \Omega^n)$  ed  $H_k^n(D; \Omega^n)$  siano di Hausdorff, il Teorema di Serre stabilisce allora degli isomorfismi topologici

$$i_1: [\Gamma(X; \mathcal{O})]' \rightarrow H_k^n(X; \Omega^n) \quad \text{ed} \quad i_2: [\Gamma(D; \mathcal{O})]' \rightarrow H_k^n(D; \Omega^n)$$



tali che il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} [\Gamma(D; \mathcal{O})]' & \xrightarrow{t_r} & [\Gamma(X; \mathcal{O})]' \\ \downarrow t_1 & & \downarrow t_2 \\ H_{\mathbb{K}}^n(D; \Omega^n) & \xrightarrow{e^*} & H_{\mathbb{K}}^n(X; \Omega^n) \end{array}$$

è commutativo.

$t_r$  è un isomorfismo topologico perchè  $r$  lo è.

Ne segue che  $e^*$  è iniettivo.

Poichè  $X$  è di Stein  $H_{\mathbb{K}}^{n-1}(X; \Omega^n) = 0$ . Allora  $e^*$  è iniettivo se e solo se  $H_{\mathbb{K}}^{n-1}(A; \Omega^n) = 0$ . Questo conclude la dimostrazione.

**LEMMA 9.** *Sia  $X$  una varietà complessa connessa di Stein, di dimensione  $n > 1$ ,  $K \subseteq X$  un compatto tale che  $X - K$  è connesso, allora  $H^1(X - K; \mathcal{O})$  è uno spazio di Hausdorff se e solo se*

$$H^{n-1}(K; \Omega^n) = \text{inj lim}_{U \supseteq K} H^{n-1}(U; \Omega^n) = 0 .$$

**DIM.** Tenendo conto del teorema di Hartogs basta applicare il lemma 8 ed osservare che

$$H_{\mathbb{K}}^{n-1}(K; \Omega^n) = H^{n-1}(K; \Omega^n) = \text{Inj lim}_{U \supseteq K} H^{n-1}(U; \Omega^n) = 0 .$$

([6] pag. 151 e 193).

**DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 3.**

$\Rightarrow$  Segue dal lemma 7 e dal lemma 9.

$\Leftarrow$  Consideriamo da prima il caso in cui  $F = D^1 - D$  è compatto. Per ipotesi  $D^1$  è di Stein e  $H^1(L; \Omega^2) = 0$  per ogni  $L$  componente connessa di  $F$ ; resta da dimostrare che  $H^1(F; \Omega^2) = 0$ . Seguirà allora (Lemma 9) che  $H^1(D; \mathcal{O})$  è di Hausdorff.

Consideriamo una risoluzione fiacca di  $\Omega^n$ :

$$0 \rightarrow \Omega^n \rightarrow A_0 \xrightarrow{\delta_0} A_1 \xrightarrow{\delta_1} A_2 \rightarrow \dots$$

sia  $\varphi \in \Gamma(F; A_1)$  tale che  $\delta_1(\varphi) = 0$ ; esiste un aperto  $U \supseteq F$  ed una sezione  $\psi \in \Gamma(U; A_1)$  tale che  $\delta_1(\psi) = 0$  e  $\psi|_F = \varphi$ .  $H^1(L; \Omega^2) = 0$  per ogni  $L$  componente connessa di  $F$ , ne segue che per ogni  $L$  esiste un

aperto  $V_L$  contenente  $L$  e contenuto in  $U$  ed esistono sezioni  $\varphi_L \in \Gamma(V_L; A_0)$  tali che  $\delta_0(\varphi_L) = \psi$  su  $V_L$ .

Per il lemma 1 per ogni  $L$  esiste un aperto  $W_L$  contenente  $L$  e contenuto in  $V_L$  tale che  $W_L \cap F$  è compatto.

Gli aperti  $W_L$  formano un ricoprimento aperto di  $F$ . Da questo si può estrarre un sottoricoprimento finito  $W_1, W_2 \dots W_m$  cui corrispondono sezioni  $\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_m$ , tali che  $\varphi_i \in \Gamma(W_i; A_0)$  e  $\delta_0(\varphi_i) = \psi$  su  $W_i$  per ogni  $i$  tra 1 ed  $m$ . Dimostriamo che esiste una famiglia di aperti  $\{\Omega_i\}$   $1 \leq i \leq m$  tale che  $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$  se  $i \neq j$ ,  $\Omega_i \subseteq W_i$  per  $1 \leq i \leq m$  e  $\bigcup_{i=1}^m \Omega_i \supseteq F$ .

Procediamo per induzione su  $m$ : se  $m = 1$  poniamo  $\Omega_1 = W_1$ .

Se l'asserzione è già dimostrata per  $m - 1$ , poniamo  $F_1 = \bigcup_{i=1}^{m-1} W_i \cap F$ ,  $F_2 = (F - F_1) \cap W_m$ .  $F_1$  ed  $F_2$  sono compatti,  $F_1 \cup F_2 = F$ ,  $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ . Gli aperti  $\{W_i\}$   $1 \leq i \leq m - 1$  formano un ricoprimento di  $F_1$  tale che  $W_i \cap F_1$  è compatto per ogni  $i$  compreso tra 1 ed  $m - 1$ .

Perciò per ipotesi induttiva esistono aperti  $\{\Omega_i\}$   $1 \leq i \leq m - 1$  tali che  $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$  per  $i \neq j$ ,  $\Omega_i \subseteq W_i$  per ogni  $i$  compreso tra 1 ed  $m - 1$  ed  $F_1 \subseteq \bigcup_{i=1}^{m-1} \Omega_i$ .

Siano  $U_1$  ed  $U_2$  intorni aperti disgiunti di  $F_1$  ed  $F_2$  rispettivamente.

Poniamo  $\Omega_i = \Omega_i \cap U_1$  per  $i$  compreso tra 1 ed  $m - 1$   $\Omega'_m = W_m \cap U_2$ .

La famiglia di aperti  $\{\Omega'_i\}$  verifica le condizioni richieste.

È ora facile concludere la dimostrazione. Poniamo  $\Omega = \bigcup_{i=1}^m \Omega'_i$ .  $F \subseteq \Omega \subseteq U$ .

La sezione  $\theta \in \Gamma(\Omega; A_0)$  definita da  $\theta|_{\Omega_i} = \varphi_i|_{\Omega_i}$  è tale che  $\delta_j(\theta|_F) = \psi$ .

Ne segue che  $H^1(F; \Omega^2) = 0$  come volevasi. Consideriamo ora il caso in cui  $F$  non è compatto: Sia  $K$  un compatto aperto di  $F$ ,  $F - K$  è per il lemma 1 unione dei compatti aperti di  $F$  che non intersecano  $K$ ; segue del lemma 2 che  $D^1 - K$  è connesso. Se si ripete la dimostrazione precedente sostituendo a  $D$ ,  $D^1 - K$  si vede che  $H^1(K; \Omega^2) = 0$ . Resta da dimostrare che  $H^1_k(F; \Omega^2) = 0$ . Seguirà allora dal lemma 8 che  $H^1(D; \emptyset)$  è di Hausdorff.

Consideriamo una risoluzione fiacca di  $\Omega^2$ ;

$$0 \rightarrow \Omega^2 \rightarrow A_0 \xrightarrow{\delta_2} A_1 \xrightarrow{\delta_1} A_2 \dots$$

Sia  $\varphi \in \Gamma_k(F; \Omega^2)$  tale che  $\delta_1(\varphi) = 0$ , per il lemma 3 esiste una esau-

stione al più numerabile  $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  di  $F$  mediante compatti aperti. Poichè il supporto di  $\varphi$  è compatto esiste un numero  $n_0$  tale che  $\text{supp } \varphi \subseteq K_{n_0}$ . Abbiamo visto poco sopra che  $H^1(K_{n_0}; \Omega^2) = 0$ . Esiste perciò una sezione  $\psi \in \Gamma(K_{n_0}; A_0)$  tale che  $\delta_0(\psi) = \varphi$ . Il compatto  $K_{n_0}$  è aperto in  $F$ ; la  $\psi$  si può perciò estendere con 0 fuori da  $K_{n_0}$  ottenendo così una  $\tilde{\psi} \in \Gamma_k(F; A_0)$ . Se ne conclude che  $H_k^1(F; \Omega^2) = 0$ , come volevasi.

**DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 3'.**

$\Rightarrow$  Segue ancora dal lemma 7.

$\Leftarrow$  Sostituendo alla successione:

$$\dots \rightarrow H_k^q(D; \Omega^2) \rightarrow H_k^q(X; \Omega^2) \rightarrow H_k^q(A; \Omega^2) \rightarrow H_k^{q+1}(D; \Omega^2) \rightarrow \dots$$

la successione:

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \text{Ext}_k^{-q}(D; \mathcal{O}; \mathcal{K}_X^*) &\rightarrow \text{Ext}_k^{-q}(X; \mathcal{O}; \mathcal{K}_X^*) \rightarrow \\ &\rightarrow \text{Ext}_k^{-q}(A; \mathcal{O}; \mathcal{K}_X^*) \rightarrow \text{Ext}_k^{1-q}(D; \mathcal{O}; \mathcal{K}_X^*) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Si può dimostrare un lemma analogo al lemma 8 e dedurne la tesi in modo analogo al caso della varietà ([6] e [10]).

## 2. Controesempi.

**ESEMPIO 1.** Vediamo ora con un esempio che il Teorema 2 è in generale falso se la dimensione di  $X$  è maggiore di 2.

Sia

$$D = (\mathbb{C}^2 - \{0\}) \times \mathbb{C} = \mathbb{C}^3 - I, \quad I = \{(z_1; z_2; z_3) \in \mathbb{C}^3: z_1 = z_2 = 0\}.$$

$H^q(\mathbb{C}^2 - \{0\}; \mathcal{O})$  è di Hausdorff per ogni  $q \geq 0$  (lemma 9).  $H^q(\mathbb{C}; \mathcal{O}) = 0$  per ogni  $q > 0$ .

Segue dalla formula di Kuneth ([8] pag. 166) che  $H^q(D; \mathcal{O})$  è di Hausdorff per ogni  $q \geq 0$ .  $D = D^1$  tuttavia  $D$  non è di Stein.

**ESEMPIO 2.** Vediamo ora un esempio di un compatto connesso  $K \subseteq \mathbb{C}^2$  tale che  $\mathbb{C}^2 - K$  è connesso ma  $H^1(\mathbb{C}^2 - K; \mathcal{O})$  non è di Hausdorff.

Dati  $a$  e  $b$  numeri reali positivi, consideriamo gli aperti:

$$\Delta'_n = \left\{ (z_1; z_2) \in \mathbf{C}^2: a - \frac{1}{n} < |z_1| < a + \frac{1}{n}; |z_2| < b + \frac{1}{n} \right\} \quad \left( n > \frac{1}{a} \right).$$

$$\Delta'_n = \left\{ (z_1; z_2) \in \mathbf{C}^2: |z_1| < a + \frac{1}{n}; |z_2| < \frac{1}{n} \right\}.$$

$$\Delta_n = \Delta'_n \cup \Delta''_n.$$

$$\tilde{\Delta}_n = \left\{ (z_1; z_2) \in \mathbf{C}^2: |z_1| < a + \frac{1}{n}; |z_2| < b + \frac{1}{n} \right\}.$$

Poniamo  $K = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \Delta_n$ ,  $K_1 = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \tilde{\Delta}_n$ .  $K, K_1, \mathbf{C}^2 - K$  e  $\mathbf{C}^2 - K_1$  sono connessi.

$\Delta_n$  è un sistema fondamentale di intorni di  $K$  e  $\tilde{\Delta}_n$  è un sistema fondamentale di intorni di  $K_1$ .

Consideriamo le successioni esatte di fasci:

$$0 \rightarrow \Omega_{\mathbf{C}^2 - K}^2 \rightarrow \Omega^2 \rightarrow \Omega_K^2 \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \Omega_{\mathbf{C}^2 - K_1}^2 \rightarrow \Omega^2 \rightarrow \Omega_{K_1}^2 \rightarrow 0.$$

Le successioni di coomologia a supporto compatto ad esse associate sono:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \Gamma(K_1; \Omega^2) & \xrightarrow{\delta_1} & H_k^1(\mathbf{C}^2 - K_1; \Omega^2) & \rightarrow & H_k^1(\mathbf{C}^2; \Omega^2) \rightarrow \dots \\ & & \downarrow e & & \downarrow e^* & & \\ 0 & \rightarrow & \Gamma(K; \Omega^2) & \xrightarrow{\delta_2} & H_k^1(\mathbf{C}^2 - K; \Omega^2) & \rightarrow & H_k^1(\mathbf{C}^2; \Omega^2) \rightarrow \dots \end{array}$$

Dove  $e^*$  è l'applicazione indotta dall'estensione.  $E$  posto

$$\varrho_n: \Gamma(\tilde{\Delta}_n; \Omega^n) \rightarrow \Gamma(\Delta_n; \Omega^2)$$

la restrizione, sia  $\varrho = \text{Inj} \lim_n \varrho_n$ :

$\varrho_n$  è un isomorfismo per ogni  $n \in \mathbf{N}$  perchè i  $\Delta_n$  sono cappelli di Hartogs ed i  $\tilde{\Delta}_n$  sono i policilindri associati.

Ne segue che  $\varrho$  è un isomorfismo. Lo spazio  $H_k^1(\mathbf{C}^2; \Omega^2) = 0$ , perciò

per la commutatività del diagramma  $e^*$  è un isomorfismo.

$H^1(\mathbf{C}^2 - K; \Omega^2)$  e  $H_k^1(\mathbf{C}^2 - K_1; \Omega^2)$  sono spazi di Hausdorff ([9] pag. 429).

Segue dal teorema di Serre che esistono isomorfismi topologici:

$$i_1: H_k^1(\mathbf{C}^2 - K; \Omega^2) \rightarrow [H^1(\mathbf{C}^2 - K; \mathcal{O})]'$$

$$i_2: H_k^1(\mathbf{C}^2 - K_1; \Omega^2) \rightarrow [H^1(\mathbf{C}^2 - K_1; \mathcal{O})]'$$

in modo che, posto  $r^*: H^1(\mathbf{C}^2 - K; \mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathbf{C}^2 - K_1; \mathcal{O})$  l'applicazione indotta dalla restrizione, il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} H_k^1(\mathbf{C}^2 - K_1; \Omega^2) & \xrightarrow{e^*} & H_k^1(\mathbf{C}^2 - K; \Omega^2) \\ \downarrow i_2 & & \downarrow i_1 \\ [H^1(\mathbf{C}^2 - K_1; \mathcal{O})]' & \xrightarrow{r^*} & [H^1(\mathbf{C}^2 - K; \mathcal{O})]' \end{array}$$

risulta commutativo. Ne segue che  $r^*$  è un isomorfismo.  $K_1$  possiede un sistema fondamentale di intorni di Stein, segue allora dal lemma 9; che  $H^1(\mathbf{C}^2 - K_1; \mathcal{O})$  è di Hausdorff.

Se ne conclude che  $H^1(\mathbf{C}^2 - K; \mathcal{O})$  è di Hausdorff se e soltanto se  $r^*$  è iniettiva.

Dimostriamo allora che  $r^*$  non è iniettiva. Sia  $T = K_1 - K$ ; consideriamo la successione di coomologia relativa:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & \Gamma(\mathbf{C}^2 - K; \mathcal{O}) & \xrightarrow{r} & \Gamma(\mathbf{C}^2 - K_1; \mathcal{O}) & \xrightarrow{\delta} & H_T^1(\mathbf{C}^2 - K; \mathcal{O}) \xrightarrow{i} \\ & & & & & & \xrightarrow{i} H^1(\mathbf{C}^2 - K; \mathcal{O}) \xrightarrow{r^*} H^1(\mathbf{C}^2 - K_1; \mathcal{O}) \rightarrow \dots \end{array}$$

Per il Teorema di Hartogs  $r$  è surgettiva, segue che  $\delta = 0$  perciò  $i$  è iniettiva;  $r^*$  è allora iniettiva se e soltanto se  $H_T^1(\mathbf{C}^2 - K; \mathcal{O}) = 0$ .

Consideriamo l'aperto:

$$D^* = \{(z_1; z_2) \in \mathbf{C}^2: |z_1| < a, |z_2| > 0\}.$$

$T \subset D^* \subset \mathbf{C}^2 - K$ ;  $T$  è chiuso in  $D^*$ . Per escissione  $H_T^1(D^*; \mathcal{O}) = H_T^1(\mathbf{C}^2 - K; \mathcal{O})$ .

Se nella successione di coomologia relativa:

$$\dots \rightarrow \Gamma(D^*; \mathcal{O}) \xrightarrow{\tilde{r}} \Gamma(D^* - T; \mathcal{O}) \rightarrow H_T^1(D^*; \mathcal{O}) \rightarrow \dots$$

fosse  $H^1_{\mathcal{F}}(D^*; \mathcal{O}) = 0$  ne seguirebbe che  $\tilde{r}$  è surgettiva. Ma  $D^* - T$  è un aperto di Stein, perciò  $\tilde{r}$  non può essere surgettiva.

RIASSUMENDO. Lo spazio  $\mathbb{C}^2 - \{0\}$  verifica la condizione 1 ma non la 2 nei teoremi 1 e 2.

Un cappello di Hartogs in  $\mathbb{C}^2$  verifica la condizione 2 ma non la 1 nei teoremi 1 e 2 ([3]).

Il dominio dell'esempio 2 verifica la condizione 1 ma non la 2 dei teoremi 3 e 3'.

Un cappello di Hartogs in  $\mathbb{C}^2$  a cui sia tolto un punto verifica la condizione 2 ma non la 1 nei teoremi 3 e 3'.

Perciò le condizioni che compaiono nei teoremi di questo lavoro sono tutte tra di loro indipendenti.

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] BANICA - STANASILA, *Methodes algebrigue dans la théorie globale des espaces complexes*, Paris, Gauthier-Villars, 1977.
- [2] BOURBAKI, *Topologie Générale*, Chap. 1-4, Herman, Paris, 1971.
- [3] CASSA, *Coomologia separata sulle varietà complesse*, Ann. Sc. Nor. Pisa, **25** (1971), pp. 291-323.
- [4] CASSA, *The cohomology of a complex analytic space through the cohomology of an increasing sequence of open sets*, in corso di stampa sul Boll. U.M.I.
- [5] COEN, *Annulations de la cohomologie...*, Composition Mathematica, **37** (1978), pp. 63-75.
- [6] GODEMENT, *Topologie algebrigue et théorie des faisceaux*, Herman, Paris, 1958.
- [7] GRAUERT - REMMERT, *Theory of Stein spaces*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1979).
- [8] KAUP, *Eine Künnethformel für...*, Mat. Zeitschr., **97** (1967), pp. 158-168.
- [9] LAUFER, *On Serre duality and envelopes of holomorphy*, Trans. A.M.S., **128** (1967), pp. 414-436.
- [10] RAMIS - RUGET, *Complexes dualisants et théorème de dualité en géometrie analytique complexe*, Publ. I.H.E.S., **38** (1970), pp. 77-91.
- [11] SILVA, *Behnke-Stein theorem for analytic spaces*, Trans A.M.S., **199** (1974), pp. 317-326.
- [12] SIU, *Pseudoconvexity and the problem of Levi*, Bulletin of the A.M.S., **84** (1978), pp. 481-512.

Manoscritto pervenuto in redazione l'11 giugno 1984