

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIORGIO VERGARA CAFFARELLI

**Il problema dinamico della viscoelasticità lineare :
unicità per le soluzioni illimitate nel remoto passato**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 81 (1989), p. 21-29

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1989__81__21_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

**Il problema dinamico della viscoelasticità lineare:
unicità per le soluzioni illimitate nel remoto passato.**

GIORGIO VERGARA CAFFARELLI (*)

SUMMARY - We prove that the dynamic problem in linear viscoelasticity has a unique weak solution in a class of unbounded functions for $t \rightarrow -\infty$. We assume, for the relaxation function of the material, the dissipativity condition considered by Gurtin-Herrera [1] and we require the instantaneous elastic modulus to be greater than a value depending on the dissipativity condition, on the memory of the material and on the asymptotic behaviour in the past of the admissible eigensolutions.

L'equazione unidimensionale di moto di un materiale linearmente viscoelastico non soggetto a forze esterne si scrive, con notazioni ovvie

$$(1) \quad -\rho u_{tt}(x, t) + G(0) u_{xx}(x, t) + \int_0^{+\infty} \dot{G}(s) u_{xx}(x, t-s) ds = 0.$$

Supporremo che x vari nell'intervallo $[0, l]$ e che agli estremi valgano le condizioni omogenee di posto

$$(2) \quad u(0, t) = u(l, t) = 0.$$

Supporremo inoltre che la variabile temporale t percorra la semiretta

(*) Indirizzo dell'A.: Dipartimento di Matematica, Università di Trento, 38050 Povo, Trento.

$(-\infty, 0]$ il cui estremo superiore 0 è scelto con criterio puramente convenzionale, in modo che le soluzioni di (1) saranno cercate nella semistriscia $S = (0, t) \times (-\infty, 0)$.

Nel seguito preciseremo le ipotesi sulla funzione di rilassamento $G(s)$, per ora vogliamo ricordare l'interpretazione, data da G. Capriz in [3], dell'esistenza di autosoluzioni per il problema (1), (2): « se si prescinde da restrizioni termodinamiche (cioè si ammetta che il termine di memoria possa agire anche da fornitore piuttosto che solo da dissipatore di energia), allora anche se si richiede alla soluzione di andare a zero di ordine esponenziale per $t \rightarrow -\infty$, può non essere assicurata l'unicità della soluzione del problema omogeneo: infatti tremori appena percettibili nell'estremo passato (in termini analitici, perturbazioni infinitesime di ordine esponenziale per $t \rightarrow -\infty$) possono alla lunga raccogliere sufficiente energia da dare una vibrazione di ampiezza finita nel presente. Viceversa, se si impone un ruolo puramente dissipativo al termine di memoria, l'esistenza di soluzioni non nulle per il problema omogeneo è concepibile solo se si lascia alla soluzione la possibilità di assumere valori esponenzialmente grandi nel remoto passato; allora l'energia totale che si presuppone disponibile « ab initio » è talmente grande che non può esser dissipata neppure in un intervallo di tempo infinito ».

Ciò si collega con quanto messo in evidenza da G. Fichera in [4], [5] per il caso quasi statico e successivamente da G. Capriz e E. Virga in [6] ove è mostrata, per nuclei non dissipativi, l'esistenza di autofunzioni esponenzialmente infinitesime nel remoto passato. Per quanto poi concerne i nuclei dissipativi, in [7], G. Fichera mostra l'esistenza di autofunzioni esponenzialmente divergenti per $t \rightarrow -\infty$.

Nei risultati di unicità stabiliti per il problema viscoelastico in assenza di dati iniziali [2], [8], [9], è necessario assumere a priori per lo spostamento un affievolimento esponenziale nel remoto passato e supporre quindi che il modulo di elasticità istantaneo sia maggiore di un valore dipendente dal contributo di memoria e dall'andamento asintotico nel passato delle soluzioni ammesse.

In questo lavoro dimostriamo una condizione di unicità in una classe contenente funzioni esponenzialmente divergenti nel remoto passato sotto l'ipotesi di dissipatività $\dot{G}(0) < 0$ considerata da Gurtin-Herrera in [1], e supponendo sempre la risposta elastica istantanea prevalente su quella ritardata.

Cominciamo col dare la seguente definizione di soluzione debole del problema omogeneo (1), (2):

DEFINIZIONE: Sia $u(x, t) \in C^0((-\infty, 0]; L^2(0, l))$ una funzione tale che la convoluzione

$$\int_{-\infty}^t \dot{G}(t - \tau) u(x, \tau) d\tau$$

appartenga a $L^1_{loc}((-\infty, 0]; L^2(0, l))$.

Diremo che $u(x, t)$ è una soluzione (debole) del problema omogeneo (1), (2) se

$$(3) \quad \iint_S \left[\rho u(x, t) \varphi_{tt}(x, t) - [G(0)u(x, t) + \int_{-\infty}^t \dot{G}(t - \tau) u(x, \tau) d\tau] \cdot \varphi_{xx}(x, t) \right] dx dt = 0$$

per ogni $\varphi \in C_c^\infty((-\infty, 0); H_0^1(0, l) \cap H^2(0, l))$.

La definizione data è motivata dal fatto che se Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}_x^n (n \geq 1)$ con frontiera $\partial\Omega$ regolare e se $f \in L^2(\Omega)$, la funzione v definita dalle condizioni

$$(4) \quad v \in L^2(\Omega): \int_{\Omega} v \Delta z dx = \int_{\Omega} f z dx \quad \text{per ogni } z \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$$

coincide con la soluzione u del problema di Dirichlet con dati al bordo omogenei

$$(5) \quad u \in H_0^1(\Omega): \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla z dx = - \int_{\Omega} f z dx \quad \text{per ogni } z \in H_0^1(\Omega).$$

Infatti, considerata la funzione u e presa in (5) z in $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, si ha

$$(5)' \quad \int_{\Omega} u \Delta z dx = \int_{\Omega} f z dx \quad \text{per ogni } z \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega).$$

Sia ora $z \in H_0^1$ soluzione del problema $\Delta z = u - v \in L^2(\Omega)$. Da noti

teoremi di regolarizzazione segue $z \in H^{2,2}(\Omega)$ e, per differenza fra (5)' e (4), si trae $u = v$ (*).

Consideriamo soluzioni (deboli) $u(x, t)$ tali che

$$(6) \quad \|u\|_{0,\nu} = \sup_{t \leq 0} \exp \left[\frac{\nu}{2} t \right] \|u(\cdot, t)\|_{L^2(0,l)} < +\infty, \quad \nu \geq 0.$$

Denoteremo con $C_\nu^0 = C_\nu^0((-\infty, 0]; L^2(0, l))$ lo spazio di Banach delle funzioni $C^0((-\infty, 0]; L^2(0, l))$ che soddisfano la (6), munito della norma ivi indicata.

Indicando con

$$L_\nu^1(0, +\infty) = \left\{ g \in L^1(0, +\infty) : \|g\|_{L_\nu^1} = \int_0^{+\infty} |g(s)| \exp \left[\frac{\nu}{2} s \right] ds < +\infty \right\},$$

è facile controllare, per le proprietà degli integrali di funzioni a valori in spazi di Banach, che:

PROPOSIZIONE: Se $\dot{G} \in L_\nu^1(0, +\infty)$ l'operatore di convoluzione

$$Tu = \int_0^{+\infty} \dot{G}(s) u(x, t-s) ds$$

trasforma C_ν^0 in C_ν^0 e risulta

$$\|Tu\|_{0,\nu} \leq \|\dot{G}\|_{L_\nu^1} \|u\|_{0,\nu}.$$

Nel seguito supporremo che la funzione di rilassamento G sia tale che $\dot{G}, \ddot{G} \in L_\nu^1(0, +\infty)$ e supporremo inoltre che sia soddisfatta la condizione di dissipatività di Gurtin-Herrera in forma stretta, ossia

(*) Pertanto le soluzioni (regolari) del problema (1), (2) sono anche soluzioni della (3). Infatti una soluzione regolare $u(x, t)$ di (3) verifica in S l'equazione integro differenziale (1) ed inoltre, dettate rispettivamente, $u(0, t)$, $u(l, t)$ le tracce su $x = 0$, $x = l$ con $t < 0$, su tali semirette verifica la condizione $G(0)u(y, t) + \int_0^{+\infty} \dot{G}(s)u(y, t-s) ds = 0$, $y = 0$, $y = l$, $t < 0$, che ovviamente risulta soddisfatta se per (2), le tracce $u(0, t)$, $u(l, t)$ sono identicamente nulle.

$\dot{G}(0) < 0$. Indicando con $\lambda_1 = (\pi/l)^2$ il primo autovalore del problema ai limiti, si ha il seguente:

TEOREMA. Detta $a > 0$ la radice dell'equazione $(\rho/4\lambda_1)a^3 + G(0)a + \dot{G}(0) = 0$, sia $0 \leq \nu < a$. Se

$$G(0) > 2\|\dot{G}\|_{L^1} + \frac{1}{a-\nu}\|2\ddot{G} + 3a\dot{G}\|_{L^1},$$

allora la sola soluzione in C^0 del problema omogeneo (3) è la funzione identicamente nulla.

Alla dimostrazione del teorema premettiamo un lemma relativo ai coefficienti $\alpha_n(t)$ dello sviluppo in serie di Fourier di $u(x, t)$ rispetto al sistema delle autofunzioni del problema di Dirichlet. Nel nostro caso 1-dimensionale tale sviluppo coincide con lo sviluppo nella serie trigonometrica di soli seni

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x$$

essendo

$$\alpha_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l u(x, t) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x dx.$$

LEMMA. Se $\alpha_n(t)$ sono i coefficienti di Fourier di una soluzione C^0 del problema (3), allora $\alpha_n(t)$ appartiene a $C^2(-\infty, 0]$, verifica l'equazione

$$(7) \quad \rho \ddot{\alpha}_n(t) + \lambda_n G(0) \alpha_n(t) = - \lambda_n \int_{-\infty}^t \dot{G}(t-\tau) \alpha_n(\tau) d\tau$$

(avendo indicato con $\lambda_n = n^2(\pi/l)^2$, $n \in N$, l'autovalore corrispondente) ed esiste una costante C_n tale che

$$(8) \quad \ddot{\alpha}_n^2(t), \dot{\alpha}_n^2(\tau), \alpha_n^2(t) \leq C_n \exp[-\nu t] \quad \nu \geq 0, t \leq 0, n \geq 1.$$

DIM. Assumendo in (3) $\varphi(x, t) = \psi(t) x \operatorname{sen} (n\pi/l)x$ con $\psi(t) \in C_0^\infty(-\infty, C)$, si vede subito che $\alpha_n(t)$ verifica nel senso della teoria delle distribuzioni l'equazione (7).

Per ipotesi (I/2) $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2(t) = \|u(\cdot, t)\|_{L^2(0,t)}^2 \leq C_0 \exp[-\nu t]$ ed inoltre $\alpha_n(t) \in C^0(-\infty, 0]$.

Posto $h_n(t) = \int_0^{+\infty} \dot{G}(s) \alpha_n(t-s) ds$, si ha

$$(9) \quad |h_n(t)| \leq \|\dot{G}\|_{L^1} \sqrt{C_0} \exp\left[-\frac{\nu}{2} t\right]$$

ed ovviamente $h_n(t) \in C^0(-\infty, 0]$. Ne segue, dalla (7), $\ddot{\alpha}_n \in C^0(-\infty, 0]$, il che implica $\alpha_n \in C^2(-\infty, 0]$ ed inoltre $\ddot{\alpha}_n^2(t) \leq C'_n \exp[-\nu t]$ per $t < 0$, avendo posto $C'_n = (G(0) + \|\dot{G}\|_{L^1})^2 C_0 \lambda_n^2 / \varrho^2$.

Per concludere la dimostrazione osserviamo che se $\nu > 0$ la stima asintotica (8) per $\dot{\alpha}_n$ si ricava dalla relazione $\dot{\alpha}_n(t) = \int_0^t \ddot{\alpha}_n(\tau) d\tau + \dot{\alpha}_n(0)$ mentre se $\nu = 0$ fissato $t \in (-\infty, 0)$ e preso $y < 0$ dalla formula di Taylor segue $\|\dot{\alpha}_n(t)\| |y| \leq 2\sqrt{C_0} + \sqrt{C'_n} y^2/2$ da cui per l'arbitrarietà di y , si ha $\dot{\alpha}_n^2(t) - 4\sqrt{C_0} C'_n \leq 0$.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA. Dal lemma segue che, posto

$$(10) \quad \beta_n(t) = \dot{\alpha}_n^2(t) \exp[at], \quad \gamma_n(t) = \lambda_n \alpha_n^2(t) \exp[at],$$

risulta

$$(11) \quad \beta_n(t), \gamma_n(t) \leq C''_n \exp[(a-\nu)t], \quad 0 \leq \nu < a, t \leq 0$$

ed in particolare, quindi, si ha

$$(12) \quad K_n = \sup_{t \leq 0} \gamma_n(t) \exp[-(a-\nu)t] < +\infty.$$

Per le soluzioni esponenzialmente divergenti non è ovviamente possibile effettuare direttamente una stima dell'energia. Considereremo quindi le seguenti stime con un peso esponenzialmente infinitesimo per $t \rightarrow -\infty$, ottenute moltiplicando la (7) rispettivamente per $\dot{\alpha}_n(t) \exp[at]$ e $-\alpha_n(t) \exp[at]$ con $0 \leq \nu < a$. Consideriamo la prima

stima. Si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\varrho}{2} \frac{d}{d\tau} [\dot{\alpha}_n^2(\tau)] \exp [a\tau] + \frac{G(0)}{2} \frac{d}{d\tau} [\lambda_n \alpha_n^2(\tau)] \exp [a\tau] = \\ = -\lambda_n \dot{\alpha}_n(\tau) \exp [a\tau] \int_{-\infty}^{\tau} \dot{G}(\tau - \sigma) \alpha_n(\sigma) d\sigma. \end{aligned}$$

Integrando per parti su $(-\infty, t)$, e tenendo conto di (8), (10), (11), otteniamo allora:

$$\begin{aligned} (13) \quad \frac{\varrho}{2} \left[\beta_n(t) - a \int_{-\infty}^t \beta_n(\tau) d\tau \right] + \frac{G(0)}{2} \left[\gamma_n(t) - a \int_{-\infty}^t \gamma_n(\tau) d\tau \right] = \\ = \dot{G}(0) \int_{-\infty}^t \gamma_n(\tau) d\tau - \lambda_n \alpha_n(t) \exp [at] \int_{-\infty}^t \dot{G}(t - \sigma) \alpha_n(\sigma) d\sigma + \\ + \lambda_n \int_{-\infty}^t \alpha_n(\tau) \exp [a\tau] \left(\int_{-\infty}^{\tau} [\ddot{G}(\tau - \sigma) + a\dot{G}(\tau - \sigma)] \alpha_n(\sigma) d\sigma \right) d\tau. \end{aligned}$$

Considerando la seconda stima si ha

$$\begin{aligned} (14) \quad -\varrho \int_{-\infty}^t \ddot{\alpha}_n(\tau) \alpha_n(\tau) \exp [a\tau] d\tau - G(0) \lambda_n \int_{-\infty}^t \alpha_n^2(\tau) \exp [a\tau] d\tau = \\ = \lambda_n \int_{-\infty}^t \alpha_n(\tau) \exp [a\tau] \left(\int_{-\infty}^{\tau} \dot{G}(\tau - \sigma) \alpha_n(\sigma) d\sigma \right) d\tau. \end{aligned}$$

D'altra parte si ha:

$$\begin{aligned} -\varrho \int_{-\infty}^t \ddot{\alpha}_n(\tau) \alpha_n(\tau) \exp [a\tau] d\tau = -\varrho \dot{\alpha}_n(t) \alpha_n(t) \exp [at] + \\ + \varrho \int_{-\infty}^t \dot{\alpha}_n^2 \exp [a\tau] d\tau + \varrho \frac{a}{2} \int_{-\infty}^t \frac{d}{d\tau} (\alpha_n^2(\tau)) \exp [a\tau] d\tau \end{aligned}$$

da cui, preso $\varepsilon = 1/a > 0$, segue

$$\begin{aligned}
 (15) \quad & -\varrho \int_{-\infty}^t \ddot{\alpha}_n(\tau) \alpha_n(\tau) \exp[a\tau] d\tau \geq \\
 & \geq -\frac{\varrho}{2} \varepsilon \dot{\alpha}_n^2(t) \exp[at] - \frac{\varrho}{2} \frac{1}{\varepsilon} \alpha_n^2(t) \exp[at] + \varrho \int_{-\infty}^t \dot{\alpha}_n^2 \exp[a\tau] d\tau + \\
 & + \varrho \frac{a}{2} \alpha_n^2(t) \exp[at] - \varrho \frac{a^2}{2} \int_{-\infty}^t \alpha_n^2(\tau) \exp[a\tau] d\tau \geq \\
 & \geq \frac{\varrho}{2} \left[-\frac{1}{a} \beta_n(t) + 2 \int_{-\infty}^t \beta_n(\tau) d\tau \right] - \frac{\varrho a^2}{2\lambda_1} \int_{-\infty}^t \gamma_n(\tau) d\tau
 \end{aligned}$$

avendo denotato con $\lambda_1 > 0$ il più piccolo autovalore.

Sommando alla (13) la (14) moltiplicata per $a/2$ e tenendo presente la (15), si ottiene

$$\begin{aligned}
 (16) \quad & \frac{\varrho}{4} \beta_n(t) + \frac{G(0)}{2} \gamma_n(t) - \left(\frac{\varrho a^3}{4\lambda_1} + G(0)a + \dot{G}(0) \right) \cdot \\
 & \cdot \int_{-\infty}^t \gamma_n(\tau) d\tau \leq -\lambda_n \alpha_n(t) \exp[at] \int_{-\infty}^t \dot{G}(t-\sigma) \alpha_n(\sigma) d\sigma + \\
 & + \lambda_n \int_{-\infty}^t \alpha(\tau) \exp[a\tau] \left(\int_{-\infty}^{\tau} \left[\ddot{G}(\tau-\sigma) + \frac{3}{2} a \dot{G}(\tau-\sigma) \right] \alpha_n(\sigma) d\sigma \right) d\tau.
 \end{aligned}$$

Poichè da (12), tenendo presente (10), segue

$$\sqrt{\lambda_n} |\alpha_n(t)| \leq \sqrt{K_n} \exp \left[-\frac{\nu}{2} t \right]$$

per come si è definita a , da (16) si deduce

$$\frac{G(0)}{2} \gamma_n(t) \leq \left(\|\dot{G}\|_{L^1} + \frac{1}{a-\nu} \left\| \ddot{G} + \frac{3}{2} a \dot{G} \right\|_{L^1} \right) K_n \exp[(a-\nu)t]$$

da cui, per la (12), si conclude $\gamma_n(t) \equiv 0$, per $n \in \mathcal{N}$, non appena

$$\frac{\mathcal{G}(0)}{2} > \|\dot{\mathcal{G}}\|_{L^1} + \frac{1}{a-\nu} \left\| \ddot{\mathcal{G}} + \frac{3}{2} a\dot{\mathcal{G}} \right\|_{L^1}.$$

Ringrazio Gianfranco Capriz per le sempre utili ed interessanti discussioni su questi argomenti.

BIBLIOGRAFIA

- [1] M. E. GURTIN - I. HERRERA, *On dissipation inequalities and linear viscoelasticity*, Quart. Appl. Mat., **23** (1965), pp. 235-245.
- [2] M. CHIPOT - G. VERGARA CAFFARELLI, *Viscoelasticity without initial data*, in corso di stampa sui Proceeding of the Meeting on « Volterra Integro-differential equations in Banach Spaces and Applications », Trento (1987).
- [3] G. CAPRIZ, *Sulla impostazione di problemi dinamici in viscoelasticità*, tavola rotonda su « Continui con Memoria », Accademia Nazionale dei Lincei (1986).
- [4] G. FICHERA, *Avere una memoria tenace crea gravi problemi*, Arch. Rational Mech. Anal., **70** (1979), pp. 101-112.
- [5] G. FICHERA, *Sul principio di memoria evanescente*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **68** (1982), pp. 235-259.
- [6] G. CAPRIZ - E. G. VIRGA, *Esempi di non unicità in viscoelasticità lineare*, in corso di stampa in Atti Accad. Sc. Torino (1986).
- [7] G. FICHERA, *On linear viscoelasticity*, Mech. Res. Comm., **12** (1985), pp. 241-242.
- [8] E. G. VIRGA - G. CAPRIZ, *Un teorema di unicità in viscoelasticità lineare*, in corso di stampa in Rend. Sem. Mat. Univ. Padova (1986).
- [9] G. VERGARA CAFFARELLI - E. G. VIRGA, *Sull'unicità della soluzione del problema dinamico della viscoelasticità lineare*, Rend. Acc. Naz. Lincei, **81** (1987), pp. 379-387.

Manoscritto pervenuto in redazione il 16 gennaio 1988.