RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GEMMA PARMEGGIANI

Sulla serie di Fitting del prodotto di due gruppi nilpotenti finiti

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 91 (1994), p. 273-278

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1994__91__273_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 91 (1994)

Sulla serie di Fitting del prodotto di due gruppi nilpotenti finiti.

GEMMA PARMEGGIANI (*)

Un gruppo finito $G = AB$ che sia prodotto di due sottogruppi nilpotenti A e B è, per un noto teorema di Kegel e Wielandt (si veda [8], p. 674), risolubile.

Recentemente S. Franciosi, F. De Giovanni, H. Heineken e M. L. Newell hanno provato in [3] che se A è abeliano e $F(G)$ indica il sottogruppo di Fitting di G, allora $AF(G)$ è normale in G.

In questa nota si estende tale risultato provando che, se $F_i(G)$ indica l'i-esimo termine della serie di Fitting di G, allora si ha il seguente

TEOREMA 1. *Se $G = AB$ è un gruppo finito prodotto di due sottogruppi nilpotenti A e B, allora $AF_{2n-1} \trianglelefteq G$ per ogni intero positivo n non inferiore alla lunghezza derivata $d(A)$ di A. In particolare la lunghezza di Fitting di G è al più $2d(A) + 1$.*

La limitazione ottenuta è ottimale, poiché per ogni numero naturale n il gruppo finito G_n definito ricorsivamente da

$$G_0 = C_p$$

e

$$G_n = (G_{n-1} \operatorname{wr} C_q) \operatorname{wr} C_p ,$$

ove C_p e C_q sono i gruppi ciclici di ordini p e q, con p e q primi distinti, è prodotto di due sottogruppi nilpotenti di lunghezze derivate n ed $n + 1$ rispettivamente ed ha lunghezza di Fitting esattamente $2n + 1$.

(*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università di Padova, Via Belzoni 7, 35100 Padova.

Il teorema viene dedotto da una proposizione di carattere più generale.

Siano $\mathcal{F}$ la classe dei gruppi risolubili finiti e Π l'insieme dei numeri primi.

Per ogni $G \in \mathcal{F}$ ed ogni $p \in \Pi$ si indichino con G_p un p-sottogruppo di Sylow di G ed $l_p(G)$ la p-lunghezza di G; inoltre per ogni p-gruppo finito K sia

$$g(K) = \max\{l_p(H) \mid H \in \mathcal{F} \text{ e } K \text{ è un } p\text{-sottogruppo di Sylow di } H\}.$$

Si ponga la seguente

DEFINIZIONE. *Siano $\mathcal{N}$ la classe dei gruppi nilpotenti finiti e $\mathcal{C}$ una sottoclasse di $\mathcal{N}$ chiusa rispetto alle immagini omomorfe. Una funzione $f\colon \mathcal{C} \to \mathbb{N}$ verrà detta una BHH-funzione se*

(i) *per ogni $K \in \mathcal{C}$ si ha*

$$f(K) \geq \max\{g(K_p) \mid p \in \Pi\},$$

(ii) *per ogni epimorfismo $\varphi\colon K \twoheadrightarrow H$ con $K \in \mathcal{C}$ si ha*

$$f(K) \geqslant f(H).$$

Se per ogni $G \in \mathcal{F}$ si indica con $l(G)$ la lunghezza di Fitting di G, allora sussiste la seguente

PROPOSIZIONE 1. *Se $G = AB$ è un gruppo prodotto di due sottogruppi A e B con $A \in \mathcal{C}$ e $B \in \mathcal{N}$ ed $f\colon \mathcal{C} \to \mathbb{N}$ è una BHH-funzione, allora per ogni intero positivo n con $n \geq f(A)$, si ha:*

$$AF_{2n-1}(G) \trianglelefteq G.$$

In particolare da ciò segue che $l(G) \leq 2f(A) + 1$ e che se anche $B \in \mathcal{C}$ ed $f(A) = f(B)$ allora $l(G) \leq 2f(A)$.

Dalle limitazioni della p-lunghezza di un gruppo risolubile finito ottenute da P. Hall e G. Higman in [6] e da E. G. Bryukhanova in [1] e [2] si ottengono diversi esempi di *BHH*-funzioni.

Infatti se dati un gruppo risolubile finito H ed un numero primo p si indica con $d_p(H)$ la lunghezza derivata di un p-sottogruppo di Sylow H_p di H e si pone $e_p(H) = lg_p(\exp(H_p))$, ove $\exp(H_p)$ denota l'esponente di H_p, allora:

(a) $f_1\colon \mathcal{N} \to \mathbb{N}$ che associa ad ogni $K \in \mathcal{N}$ la sua lunghezza derivata è una *BHH*-funzione, poiché per risultati di [2] e [6] si ha $l_p(H) \leq d_p(H)$;

(*b*) $f_2\colon \mathfrak{N} \to \mathbb{N}$ che associa ad ogni $K \in \mathfrak{N}$ il minimo numero dei generatori di K è una BHH-funzione, poiché se H_p può essere generato da d elementi allora $l_p(H) \leq d$ (si veda [8] p. 691);

(*c*) $f_3\colon \mathfrak{N} \to \mathbb{N}$ definita per ogni $K \in \mathfrak{N}$ da

$$f_3(K) = \max(\{e_p(K) \mid p \in \Pi_1\} \cup \{2e_p(K) \mid p \in \Pi_2\}),$$

ove Π_1 e Π_2 indicano l'insieme dei numeri primi non di Fermat (incluso il 2) e l'insieme dei numeri primi di Fermat rispettivamente, è una BHH-funzione, poiché da risultati di [1] e [6] si ha che se p è di Fermat

$$e_p(H) \geq \left[\frac{1}{2}(l_p(H)+1)\right],$$

se p non è di Fermat

$$e_p(H) \geq l_p(H);$$

(*d*) se, per ogni $m \in \mathbb{N}$, L_m è la classe dei gruppi nilpotenti definita da Heineken in [7], allora $h_m\colon L_m \to \mathbb{N}$ che associa m ad ogni $K \in L_m$ è una BHH-funzione.

Le considerazioni precedenti permettono di riottenere un risultato di Heineken contenuto in [7] e provano che, oltre al Teorema 1, sussistono i seguenti

COROLLARIO 1. *Se $G = AB$ è un gruppo finito prodotto di due sottogruppi nilpotenti A e B, allora se A è generato da m elementi si ha $AF_{2m-1}(G) \trianglelefteq G$.*

COROLLARIO 2. *Se $G = AB$ è un gruppo finito prodotto di due sottogruppi nilpotenti A e B ed n è un intero positivo con*

$$n \geq \max(\{e_p(A) \mid p \in \Pi_1\} \cup \{2e_p(A) \mid p \in \Pi_2\})$$

ove Π_1 è l'insieme dei numeri primi non di Fermat e Π_2 è l'insieme dei numeri primi di Fermat, allora si ha $AF_{2n-1}(G) \trianglelefteq G$.

Desidero ringraziare il Prof. Franco Napolitani per gli utili consigli offertimi nello svolgimento di questo lavoro.

DIM. DELLA PROPOSIZIONE 1. Sia $G = AB$ un gruppo di ordine minimo con $A \in \mathcal{C}$ e $B \in \mathfrak{N}$ per cui esista $m \geq f(A)$ intero positivo tale che $AF_{2m-1}(G)$ non sia normale in G.

Per il teorema di Kegel e Wielandt G è risolubile.

Se esistessero N_1 ed N_2 sottogruppi normali minimi distinti di G, essendo per (ii) $f(A) \geq \max\{f(AN_1/N_1), f(AN_2/N_2)\}$ dalla minimalità di $|G|$ si avrebbe

$$\frac{AN_i}{N_i} F_{2m-1}\left(\frac{G}{N_i}\right) \trianglelefteq \frac{G}{N_i} .$$

Quindi, posto $L_i/N_i = F_{2m-1}(G/N_i)$ per $i = 1,2$, sarebbe $AL_i \trianglelefteq G$ con $i = 1,2$ ed allora da [3, Lemma 1 e Lemma 2] $AL_1 \cap AL_2 = A(L_1 \cap L_2) = AF_{2m-1}(G) \trianglelefteq G$.

Dunque G ha un unico sottogruppo normale minimo N, ed N è un p-gruppo abeliano elementare per qualche primo p, essendo G risolubile.

Poiché $F(G/\Phi(G)) = F(G)/\Phi(G)$ e G è un controesempio di ordine minimo, si ha $\Phi(G) = \{1\}$, per cui esiste un sottogruppo massimale M di G tale che $G = MN$ ed $M \cap N = \{1\}$, inoltre $N = F(G)$ (si veda [8], III 4.5, p. 279).

Per [4, Theorem 1] uno tra A e B è un p-sottogruppo di Sylow di G e l'altro un p'-sottogruppo.

Si mostrerà ora che essendo $G = AB$ prodotto di due sottogruppi nilpotenti A e B, di cui uno è un p-sottogruppo di Sylow contenente $F(G)$ e l'altro è un p'-sottogruppo di Hall, per ogni $q \in \pi(A)$ si ha

$$l_q\left(\frac{G}{F_2(G)}\right) \leq l_q(G) - 1 .$$

Infatti se $F(G) \leqslant A$, $q = p$ ed A è un p-sottogruppo di Sylow di G, inoltre $O_{p'}(G) = \{1\}$ ed $O_{p',p}(G) = O_p(G) = F(G) \leqslant F_2(G)$, per cui $l_q(G/F_2(G)) = l_p(G/F_2(G)) \leq l_p(G/F(G)) = l_p(G) - 1 = l_q(G) - 1$.

Altrimenti $F(G) \leqslant B$, B è un p-sottogruppo di Sylow di G ed A un p'-sottogruppo di Hall di G.

Sia A_q un q-sottogruppo di Sylow di G contenuto in A.

Poiché $F_2(G)/F(G)$ è un p'-gruppo ed A è un p'-sottogruppo di Hall di G, si ha $F_2(G) \leqslant AF(G)$ per cui, da A nilpotente si ottiene

$$C_G(O_{q'}(F_2(G))/O_p(G)) \geqslant A_q .$$

Essendo

$$F\left(\frac{O_{q'}(G)}{O_p(G)}\right) = \frac{O_{q'}(G)}{O_p(G)} \cap F\left(\frac{G}{O_p(G)}\right) = \frac{O_{q'}(G) \cap F_2(G)}{O_p(G)} = \frac{O_{q'}(F_2(G))}{O_p(G)}$$

si ha

$$C_{O_{q'}(G)/O_p(G)}\left(\frac{O_{q'}(F_2(G))}{O_p(G)}\right)=Z\left(\frac{O_{q'}(F_2(G))}{O_p(G)}\right),$$

per cui

$$\frac{G}{O_p(G)} \trianglerighteq C_{O_{q',q}(G)/O_p(G)}\left(\frac{O_{q'}(F_2(G))}{O_p(G)}\right)=Z\left(\frac{O_{q'}(F_2(G))}{O_p(G)}\right)\frac{L}{O_p(G)},$$

ove $L = A_q \cap O_{q',q}(G)$.

Dunque $L \leqslant F_2(G)$ ed $O_{q',q}(G) = O_{q'}(G)R$ con R un q-sottogruppo di Sylow di $F_2(G)$, per cui $l_q(G/F_2(G)) \leq l_q(G) - 1$.

Dal momento che anche $G/F_2(G)$ è un prodotto di due sottogruppi nilpotenti di cui uno è un p-sottogruppo di Sylow contenente $F(G/F_2(G))$ e l'altro è un p'-sottogruppo di Hall, il procedimento può essere iterato, per cui si ottiene, essendo $m \geq f(A) \geq l_q(G)$ per ogni $q \in \pi(A)$, che $A \leqslant F_{2m}(G)$.

Poiché $AF_{2m-1}(G)/F_{2m-1}(G)$ è un sottogruppo di Hall di $F_{2m}(G)/F_{2m-1}(G)$, si ha allora $AF_{2m-1}(G) \trianglelefteq G$, mentre G era stato scelto come controesempio.

Quest'ultima contraddizione prova che per ogni intero positivo $n \geq f(A)$ si ha $AF_{2n-1}(G)$ normale in G.

Ma ciò comporta $A \leqslant F_{2f(A)}(G)$, per cui da B nilpotente si ottiene $l(G) \leq 2f(A) + 1$. Se in più $f(A) = f(B)$, si ha anche $B \leqslant F_{2f(B)}(G) = F_{2f(A)}(G)$ e quindi $l(G) \leq 2f(A)$.

La dimostrazione della proposizione è così completata. ∎

Per quanto il seguente teorema sia un immediato corollario del Teorema 1, se ne dà una dimostrazione indipendente che non utilizza i risultati di P. Hall, G. Higman e E. G. Bryukhanova.

TEOREMA 2. *Se $G = AB$ è un gruppo finito prodotto di due sottogruppi nilpotenti A e B, allora $AF_{2n-1}(G) \trianglelefteq G$ per ogni intero positivo n non inferiore alla classe di nilpotenza $c(A)$ di A. In particolare la lunghezza di Fitting di G è al più $2c(A) + 1$.*

DIM. Sia $G = AB$ un gruppo di ordine minimo per cui esista $m \geq c(A)$ intero positivo tale che $AF_{2m-1}(G)$ non sia normale in G.

Con argomentazioni analoghe a quelle usate nella Proposizione 1 si ottiene che G è risolubile ed ha un unico sottogruppo normale minimo N che coincide con $F(G)$ ed è un p-gruppo abeliano elementare per qualche primo p, inoltre uno tra A e B è un p-sottogruppo di Sylow di G e l'altro è un p'-sottogruppo.

Non può essere $m = 1$, ossia A abeliano, perché in tal caso se fosse

$N \leq A$ da $C_G(N) = N$ si avrebbe $N = A$, mentre se fosse $N \leq B$, dal momento che $F(G)$ p-gruppo comporta $F_2(G)/N$ p'-gruppo e quindi $F_2(G) \leq NA$, si avrebbe

$$\frac{NA}{N} = \frac{NZ(A)}{N} \leq C_{G/N}\left(\frac{F_2(G)}{N}\right) \leq \frac{F_2(G)}{N},$$

da cui $NA = F_2(G)$.

Dunque $m \gneq 1$, ed essendo $NZ(A) \leq F_2(G)$, la classe di nilpotenza di $AF_2(G)/F_2(G)$ è strettamente minore di quella di A, per cui per la minimalità di $|G|$ si ha

$$\frac{AF_{2m-1}(G)}{F_2(G)} = \frac{AF_2(G)}{F_2(G)} F_{2(m-1)-1}\left(\frac{G}{F_2(G)}\right) \trianglelefteq \frac{G}{F_2(G)}.$$

Ma allora $AF_{2m-1}(G) \trianglelefteq G$, e quest'ultima contraddizione prova il teorema. ■

BIBLIOGRAFIA

[1] E. G. BRYUKHANOVA, *The 2-length and 2-period of a finite solvable group*, Algebra and Logic, **18** (1) (1979), pp. 5-20.

[2] E. G. BRYUKHANOVA, *Connection between the 2-length and the derived length of a Sylow 2-subgroup of a finite solvable group*, Math. Notes, **29** (1981), pp. 85-90.

[3] S. FRANCIOSI - F. DE GIOVANNI - H. HEINEKEN - M. L. NEWELL, *On the Fitting length of a soluble product of nilpotent groups*, Arch. Math., **57** (1991), pp. 313-318.

[4] F. GROSS, *Finite groups which are the product of two nilpotent subgroups*, Bull. Austral. Math. Soc., **9** (1973), pp. 267-274.

[5] F. GROSS, *On finite groups of exponent $p^m q^n$*, J. Algebra, **7** (2) (1967), pp. 238-253.

[6] P. HALL - G. HIGMAN, *On the p-length of p-soluble groups and reduction theorems for Burnside's problem*, Proc. London Math. Soc., **6** (3) (1956), pp. 1-42.

[7] H. HEINEKEN, *The product of two finite nilpotent groups and its Fitting series*, Arch. Math., **59** (1992), pp. 209-214.

[8] B. HUPPERT, *Endliche Gruppen I*, Berlin-Heidelberg-New York (1967).

[9] E. I. KHUKHRO, *Finite groups of period $p^\alpha q^\beta$*, Algebra and Logic, **17** (6) (1978), pp. 473-482.

[10] E. PENNINGTON, *On products of finite nilpotent groups*, Math. Z., **134** (1973), pp. 81-83.

Manoscritto pervenuto in redazione il 9 luglio 1992
e, in forma riveduta, il 12 gennaio 1993.