

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIOVANNI CIMATTI

Il paradosso elettrotermico

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 93 (1995), p. 109-126

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1995__93__109_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Il paradosso elettrotermico.

GIOVANNI CIMATTI (*)

RIASSUNTO - Si studia il problema del riscaldamento elettrico stazionario di un conduttore omogeneo tenendo conto sia dell'effetto Joule, che dell'effetto Thomson. Si dimostra che con condizioni al bordo particolari, ma fisicamente ragionevoli, il massimo della temperatura ha una certa espressione (implicita) indipendente dalla forma del conduttore.

ABSTRACT - The electric heating of an homogeneous conductor under steady condition is studied taking into account the Joule and Thomson effects. We prove that the maximum of the temperature under suitable boundary conditions, does not depend on the shape of the conductor.

1. Introduzione.

Nel riscaldamento elettrico di un conduttore omogeneo l'effetto Joule coesiste sempre con l'effetto Thomson. Scopo di questo lavoro è lo studio qualitativo in condizioni stazionarie di alcuni problemi al contorno nonlineari che reggono questi fenomeni. Oltre a vari teoremi di esistenza si vuole in particolare dimostrare, in presenza di effetto Thomson, un risultato noto come « $\psi - \theta$ theorem» (si veda [12] pag. 17 e pag. 59), per certi aspetti paradossale, secondo cui con condizioni al bordo opportune, ma fisicamente ragionevoli e largamente verificate in pratica, il massimo della temperatura è indipendente dalla forma del conduttore e degli elettrodi e dipende solo dalla differenza di potenziale appli-

(*) Indirizzo dell'A.: Dipartimento di Matematica, Via Buonarroti 2, 56100 Pisa, Italia.

cata. Tramite l'uso di una opportuna trasformazione viene dato (sez. 2) un teorema di esistenza in presenza di effetto Thomson. Il paradosso elettrotermico è dimostrato nella sezione 3 insieme alla validità di una certa espressione del suddetto massimo di temperatura, a un teorema di unicità e alla riduzione del problema nonlineare al problema misto per l'equazione di Laplace. Nelle sezioni 4 e 5 si considera il caso in cui l'effetto Thomson è assente. Si dimostra (sez. 4) un teorema di esistenza in ipotesi generali sulla conducibilità termica ed elettrica ed inoltre si prova che il paradosso elettrotermico continua a sussistere (sez. 5) anche in questo caso. Una osservazione di S. Howison [8] sull'invarianza del problema per trasformazioni conformi è estesa (sez. 6) al caso in cui l'effetto Thomson è presente. Viene infine studiato in modo completo il caso elementare del problema unidimensionale.

Le equazioni e i problemi trattati in questo lavoro, quantunque vecchi di oltre un secolo (si veda [10] e [7]), sono stati recentemente tema di ricerca da parte di vari autori [1], [2], [3] e [9].

2. Il problema al contorno del riscaldamento elettrico stazionario in presenza di effetto Thomson.

Una descrizione degli effetti termoelettrici Joule e Thomson per un conduttore omogeneo si ottiene (vedi [11] per maggiori dettagli) con le equazioni costitutive

$$(2.1) \quad \mathbf{J} = \sigma(u)(\mathbf{E} - \alpha(u)\nabla u),$$

$$(2.2) \quad \mathbf{q} = -\kappa(u)\nabla u + u\alpha(u)\mathbf{J},$$

dove \mathbf{J} è la densità di corrente e \mathbf{q} la densità del flusso di calore mentre \mathbf{E} , campo elettrico, deriva dal potenziale φ tramite la relazione

$$(2.3) \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi.$$

Come è noto per un conduttore metallico vale, con ottima approssimazione, la legge di Wiedemann-Franz [12] che lega la conducibilità elettrica $\sigma(u)$ alla conducibilità termica $\kappa(u)$, entrambe funzioni assegnate della temperatura assoluta u , tramite la

$$(2.4) \quad \frac{\kappa(u)}{\sigma(u)} = Lu$$

dove L , costante di Lorenz, è un numero positivo che non dipende dal metallo ed è dato da

$$L = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{k}{e} \right)^2$$

con k costante di Boltzmann ed e carica dell'elettrone. Supponiamo inoltre valida la legge di Tait [13] e cioè

$$(2.5) \quad \alpha(u) = \alpha_1 u + \alpha_0, \quad \alpha_1 \neq 0.$$

I principi di conservazione della carica e dell'energia richiedono che

$$(2.6) \quad \nabla \cdot \mathbf{J} = 0,$$

$$(2.7) \quad \nabla \cdot \mathbf{q} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}.$$

Il solido metallico in esame è rappresentato dall'aperto limitato Ω di \mathbf{R}^3 la cui frontiera regolare $\partial\Omega$ consta di due parti disgiunte: S_1 a cui è applicata una assegnata distribuzione di potenziale e di temperatura:

$$(2.8) \quad \varphi = \varphi_0, \quad u = u_0$$

e S_2 che è isolata termicamente ed elettricamente:

$$(2.9) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0.$$

Per formulare il problema nel modo più semplice introduciamo un «potenziale efficace» v dato da

$$(2.10) \quad v = \varphi + \int_{\bar{u}}^u \alpha(t) dt$$

dove \bar{u} è una arbitraria temperatura di riferimento. Posto

$$(2.11) \quad v_0(x) = \varphi_0(x) + \int_{\bar{u}}^{u_0(x)} \alpha(t) dt, \quad x \in \partial\Omega$$

arriviamo al problema

Pbl.

$$(2.12) \quad \nabla \cdot (\sigma(u) \nabla v) = 0,$$

$$(2.13) \quad -\nabla \cdot (\kappa(u) \nabla u) - u \alpha_1 \sigma(u) \nabla u \cdot \nabla v = \sigma(u) |\nabla v|^2,$$

$$(2.14) \quad v = v_0, \quad u = u_0 \quad \text{su } S_1,$$

$$(2.15) \quad \frac{\partial v}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{su } S_2.$$

Nella (2.13) il termine a membro destro riflette il fenomeno del riscaldamento per effetto Joule, mentre il secondo termine a membro sinistro è connesso con l'effetto Thomson. Supponiamo che v_0 ed u_0 siano funzioni regolari definite su S_1 . Notando che per la (2.12) si ha

$$\begin{aligned} \sigma(u) |\nabla v|^2 &= \nabla \cdot (\sigma(u) v \nabla v), \\ u \alpha_1 \sigma(u) \nabla u \cdot \nabla v &= \nabla \cdot \left[\frac{1}{2} \alpha_1 u^2 \sigma(u) \nabla v \right] \end{aligned}$$

la (2.13) si può scrivere

$$(2.16) \quad \nabla \cdot \left(\kappa(u) \nabla u + \sigma(u) \left(v + \frac{1}{2} \alpha_1 u^2 \right) \nabla v \right) = 0.$$

Per somma e differenza di (2.12) e (2.16) il problema Pb1 può essere riformulato nella seguente forma più simmetrica

Pb2.

$$(2.17) \quad \nabla \cdot \left[k(u) \nabla u + \sigma(u) \left(v + \frac{1}{2} \alpha_1 u^2 + 1 \right) \nabla v \right] = 0,$$

$$(2.18) \quad \nabla \cdot \left[k(u) \nabla u + \sigma(u) \left(v + \frac{1}{2} \alpha_1 u^2 - 1 \right) \nabla v \right] = 0,$$

le condizioni al bordo essendo ancora (2.14), (2.15). Il principio del massimo applicato a Pb1 dà subito le seguenti limitazioni su v e u :

$$(2.19) \quad v_m \leq v(x) \leq v_M \quad \text{in } \Omega,$$

$$(2.20) \quad u_m \leq u(x) \quad \text{in } \Omega.$$

In[5] si mostra la rilevanza per lo studio di Pb2 della seguente trasformazione

$$(2.21) \quad \theta = e^{\tau v} \left(v + \frac{1}{2} \alpha_1 u^2 + 1 - \frac{1}{\tau} \right),$$

$$(2.22) \quad \psi = e^{\tau v} \left(v + \frac{1}{2} \alpha_1 u^2 - 1 - \frac{1}{\tau} \right)$$

dove $\tau = \alpha_1/L$. La (2.21), (2.22) si pensa definita in $D = \{(u, v); u_m \leq u, v_m \leq v \leq v_M\}$ e ha senso solo se $\tau \neq 0$, cioè in presenza di effetto Thomson. La sua inversa è data da

$$(2.23) \quad u = \sqrt{\frac{2}{\alpha_1}} \sqrt{\frac{\theta + \psi}{\theta - \psi}} - \frac{1}{\tau} \log \frac{\theta - \psi}{2} + \frac{1}{\tau},$$

$$(2.24) \quad v = \frac{1}{\tau} \log \frac{\theta - \psi}{2}.$$

Espresso nelle nuove incognite θ, ψ il problema Pb2 diviene

Pb3.

$$(2.25) \quad \nabla \cdot (B(\theta, \psi) \nabla \theta) = 0 \quad \text{in } \Omega,$$

$$(2.26) \quad \nabla \cdot (B(\theta, \psi) \nabla \psi) = 0 \quad \text{in } \Omega,$$

$$(2.27) \quad \theta = \theta_0, \quad \psi = \psi_0 \quad \text{su } S_1,$$

$$(2.28) \quad \frac{\partial \theta}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \quad \text{su } S_2,$$

dove $B(\theta, \psi) = \sigma(u) e^{-\tau v}$ e $\theta_0(x), \psi_0(x)$ sono date dalle (2.21), (2.22) ponendovi $v = v_0(x)$ e $u = u_0(x)$. Supponendo

$$(2.29) \quad \sigma(u) \geq \sigma_1 > 0 \quad \text{per ogni } u \geq u_m$$

è possibile dimostrare [5] come applicazione del teorema del punto fisso di Schauder, che Pb3 (e quindi Pb1), ha almeno una soluzione. Si noti che una ipotesi analoga alla (2.29) non è richiesta per la $\kappa(u)$.

3. Il paradosso elettrotermico.

Nella situazione fisica tipica S_1 consta di due parti disgiunte S_1^+ e S_1^- che rappresentano gli elettrodi (superfici equipotenziali), tramite i quali è applicata al conduttore la differenza di potenziale $2\bar{\varphi}$. Studieremo quindi il seguente problema

Pb4.

$$(2.12) \quad \nabla \cdot (\sigma(u) \nabla v) = 0,$$

$$(2.13) \quad -\nabla \cdot (\kappa(u) \nabla u) - u \alpha_1 \sigma(u) \nabla u \cdot \nabla v = \sigma(u) |\nabla v|^2,$$

$$(3.1) \quad \varphi = \bar{\varphi} \text{ su } S_1^+, \quad \varphi = -\bar{\varphi} \text{ su } S_1^-,$$

$$(3.2) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{su } S_2 ,$$

$$(3.3) \quad u = \bar{u} \quad \text{su } S_1 ,$$

$$(3.4) \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{su } S_2 .$$

Poiché il potenziale è definito a meno di una costante arbitraria la (3.1) non è restrittiva. Le (3.2), (3.3) e (3.4) sono invece le particolari condizioni fisiche in cui vale il paradosso elettrotermico descritto nella introduzione. La costante $\bar{u} > 0$ è assunta come temperatura di riferimento nella (2.11). In questa sezione mostriamo che il problema Pb4 è riducibile al problema misto per l'operatore di Laplace e ha soluzione unica. Sia

$$\bar{\theta}_1 = e^{-\tau \bar{\varphi}} \left(\frac{1}{2} \alpha_1 \bar{u}^2 - \bar{\varphi} - \frac{1}{\tau} + 1 \right), \quad \bar{\psi}_1 = e^{-\tau \bar{\varphi}} \left(\frac{1}{2} \alpha_1 \bar{u}^2 - \bar{\varphi} - \frac{1}{\tau} - 1 \right),$$

$$\bar{\theta}_2 = e^{\tau \bar{\varphi}} \left(\frac{1}{2} \alpha_1 \bar{u}^2 + \bar{\varphi} - \frac{1}{\tau} + 1 \right), \quad \bar{\psi}_2 = e^{\tau \bar{\varphi}} \left(\frac{1}{2} \alpha_1 \bar{u}^2 + \bar{\varphi} - \frac{1}{\tau} - 1 \right),$$

e definiamo la funzione $L: [\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2] \rightarrow \mathbf{R}^1$ tramite

$$(3.5) \quad z = L(\theta) = \int_{\bar{\theta}_1}^{\theta} B(t, at + b) dt$$

dove

$$a = \frac{\bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2}{\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2}, \quad b = -\bar{\theta}_1 a + \bar{\psi}_1 .$$

Consideriamo poi il problema

Pb5.

$$(3.6) \quad \Delta z = 0 ,$$

$$(3.7) \quad z = 0 \quad \text{su } S_1^- , \quad z = L(\bar{\theta}_2) \quad \text{su } S_1^+ ,$$

$$(3.8) \quad \frac{\partial z}{\partial n} = 0 \quad \text{su } S_2 .$$

Per il principio di massimo si ha

$$(3.9) \quad 0 \leq z(x) \leq L(\bar{\theta}_2) \quad \text{in } \Omega ,$$

possiamo quindi definire le funzioni

$$(3.10) \quad \theta(x) = L^{-1}(z(x)),$$

$$(3.11) \quad \psi(x) = a\theta(x) + b.$$

LEMMA 3.1. *La coppia di funzioni $(\theta(x), \psi(x))$ è la unica soluzione del seguente problema Pb6*

$$(2.25) \quad \nabla \cdot (B(\theta, \psi) \nabla \theta) = 0 \quad \text{in } \Omega,$$

$$(2.26) \quad \nabla \cdot (B(\theta, \psi) \nabla \psi) = 0 \quad \text{in } \Omega,$$

$$(3.12) \quad \theta = \bar{\theta}_1 \text{ su } S_1^-, \quad \theta = \bar{\theta}_2 \text{ su } S_1^+,$$

$$(3.13) \quad \psi = \bar{\psi}_1 \text{ su } S_1^-, \quad \psi = \bar{\psi}_2 \text{ su } S_1^+,$$

$$(3.14) \quad \frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \quad \text{su } S_2.$$

DIMOSTRAZIONE. È immediato verificare che le $\theta(x), \psi(x)$ sono soluzioni di Pb6. Per quanto riguarda l'unicità basta osservare che se (θ, ψ) e $(\hat{\theta}, \hat{\psi})$ sono due soluzioni, le corrispondenti z, \hat{z} definite tramite la (3.5), sono entrambe soluzioni di Pb5. Ma la soluzione di Pb5 è unica quindi $(\theta, \psi) = (\hat{\theta}, \hat{\psi})$. ■

Dal Lemma precedente segue che il problema Pb4 ha soluzione unica. Inoltre per la (2.23) la temperatura u è legata alla θ dalla relazione funzionale $u = g(\theta)$ dove

$$(3.15) \quad g(\theta) = \sqrt{\frac{2}{\alpha_1}} \sqrt{\frac{(1+a)\theta + b}{(1-a)\theta - b}} - \frac{1}{\tau} \log \frac{(1-a)\theta - b}{2} + \frac{1}{\tau}.$$

Dalla (3.15) segue il paradosso elettrotermico descritto nella introduzione. Vale infatti il seguente

LEMMA 3.2. *Nel problema Pb4 il massimo della temperatura dipende solo dalle costanti che intervengono nella (3.15).*

DIMOSTRAZIONE. La funzione $g(\theta)$ data dalla (3.15) è definita per $\theta \in [\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2]$ e ivi continua. Sia $g_M = \max \{g(\theta); \theta \in [\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2]\}$. Poiché $\theta(x)$ assume tutti i valori dell'intervallo $[\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2]$ esiste almeno un punto $x_M \in \Omega$ tale che $u(x_M) = g_M = \max \{u(x); x \in \Omega\}$. ■

Quindi in particolare il massimo della temperatura non dipende né dalla forma di Ω, S_1^-, S_1^+ e S_2 né dalle particolari leggi $\kappa(u)$ e $\sigma(u)$.

4. Il caso in cui l'effetto Thomson è assente.

Se $\alpha(u) = 0$ la trasformazione (2.21), (2.22) su cui si basano i risultati delle sezioni precedenti perde significato. Il problema Pb1 diviene

Pb7.

$$(4.1) \quad \nabla \cdot (\sigma(u) \nabla \varphi) = 0,$$

$$(4.2) \quad -\nabla \cdot (\kappa(u) \nabla u) = \sigma(u) |\nabla \varphi|^2,$$

$$(4.3) \quad \varphi = \varphi_0 \quad u = u_0 \quad \text{su } S_1,$$

$$(4.4) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{su } S_2.$$

Supponiamo che la costante additiva a meno della quale φ è definito sia tale che

$$\min \{ \varphi_0(x), x \in S_1 \} = -\bar{\varphi}, \quad \max \{ \varphi_0(x), x \in S_1 \} = \bar{\varphi}$$

e inoltre poniamo

$$\min \{ u_0(x), x \in S_1 \} = u_m, \quad \max \{ u_0(x), x \in S_1 \} = u_M.$$

Faremo su $\sigma(u)$ e $\kappa(u)$ ipotesi più generali di quelle delle sezioni 2 e 3 supponendo solo

$$(4.5) \quad \sigma(u) \in C^0(\mathbf{R}_+^1), \quad \kappa(u) \in C^0(\mathbf{R}_+^1),$$

$$(4.6) \quad \sigma(u) \geq \sigma_0 > 0, \quad \kappa(u) > 0 \quad \text{per ogni } u \geq 0$$

senza richiedere che valga la legge di Wiedemann-Franz. Utilizzeremo al posto della (2.21), (2.22) la trasformazione

$$(4.7) \quad \theta = \frac{\varphi^2}{2} + F(u)$$

dove

$$(4.8) \quad F(u) = \int_{u_m}^u \frac{\kappa(t)}{\sigma(t)} dt.$$

Nel lavoro [3] si prova che il problema Pb7 non ha sempre soluzione. Dimostreremo ora un teorema di esistenza che generalizza quello di [3].

Supporremo che valga la limitazione

$$(4.9) \quad \frac{\bar{\varphi}^2}{2} < \int_{u_m}^{\infty} \frac{\kappa(u)}{\sigma(t)} dt$$

dove l'integrale a membro destro può essere infinito, come nel caso in cui $\sigma(u)$ e $\kappa(u)$ soddisfino la legge di Wiedemann-Franz. Tramite la (4.8) il problema Pb7 diviene

Pb8.

$$(4.10) \quad \nabla \cdot \left(\sigma \left(F^{-1} \left(\theta - \frac{\varphi^2}{2} \right) \right) \nabla \theta \right) = 0,$$

$$(4.11) \quad \nabla \cdot \left(\sigma \left(F^{-1} \left(\theta - \frac{\varphi^2}{2} \right) \right) \nabla \varphi \right) = 0,$$

$$(4.12) \quad \theta = \theta_0, \quad \varphi = \varphi_0 \quad \text{su } S_1,$$

$$(4.13) \quad \frac{\partial \theta}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{su } S_2,$$

dove $\theta_0(x)$ è la trasformata di $u_0(x)$ tramite la (4.7). La formulazione precedente ha, rispetto al problema Pb7, l'evidente vantaggio di non presentare nonlinearità quadratiche nel gradiente. D'altra parte le funzioni $\sigma(u)$ e $\kappa(u)$ sono definite per ragioni fisiche solo per $u \geq 0$ e quindi la F^{-1} è definita nell'intervallo $[F(0), F(\infty)]$. Ora dalle (4.10) e (4.11) per il principio di massimo si ha

$$\frac{\bar{\varphi}^2}{2} + F(u_M) \geq \theta(x) - \frac{\varphi^2}{2} \geq -\frac{\bar{\varphi}^2}{2}$$

È quindi necessario che F^{-1} sia definita in $[-\bar{\varphi}^2/2, F(\infty)]$. Questa difficoltà tecnica può essere aggirata considerando un opportuno problema ausiliario. Siano $\hat{\kappa}(t)$ e $\hat{\sigma}(t)$ due funzioni di classe $C^1(\mathbf{R}_+^1)$ tali che

$$(4.14) \quad \hat{\kappa}(t) = \kappa(t), \quad \hat{\sigma}(t) = \sigma(t) \quad \text{per } t \geq u_m,$$

$$(4.15) \quad \hat{\sigma}(t) \geq \sigma_0 > 0,$$

$$(4.16) \quad \int_{u_m}^0 \frac{\hat{\kappa}(t)}{\hat{\sigma}(t)} dt < -\frac{\bar{\varphi}^2}{2}.$$

Definiamo poi

$$(4.17) \quad G(u) = \int_{u_m}^u \frac{\widehat{\kappa}(t)}{\widehat{\sigma}(t)} dt, \quad u \in [0, \infty]$$

e la funzione $f(\xi) \in C^0(\mathbf{R}^1)$ come segue $f(\xi) = G^{-1}(\overline{\varphi}^2/2 + G(u_M))$ se $\xi \geq \overline{\varphi}^2/2 + G(u_M)$, $f(\xi) = G^{-1}(\xi)$ se $-\overline{\varphi}^2/2 \leq \xi \leq \overline{\varphi}^2/2 + G(u_M)$, $f(\xi) = G^{-1}(-\overline{\varphi}^2/2)$ se $\xi \leq -\overline{\varphi}^2/2$. Consideriamo il seguente problema ausiliario

Pb9.

$$(4.18) \quad \nabla \cdot \left(\widehat{\sigma} \left(f \left(\theta - \frac{\varphi^2}{2} \right) \right) \nabla \theta \right) = 0,$$

$$(4.19) \quad \nabla \cdot \left(\widehat{\sigma} \left(f \left(\theta - \frac{\varphi^2}{2} \right) \right) \nabla \varphi \right) = 0,$$

$$(4.20) \quad \theta = \theta_0, \quad \varphi = \varphi_0 \quad \text{su } S_1,$$

$$(4.21) \quad \frac{\partial \theta}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{su } S_2,$$

dove

$$(4.22) \quad \theta_0(x) = \frac{\varphi_0^2(x)}{2} + G(u_0(x)).$$

Ragionando come in [4] è possibile provare l'esistenza di almeno una soluzione di Pb9 tramite l'uso del teorema del punto fisso di Schauder. Sia (θ, φ) una soluzione di Pb9, dal principio del massimo otteniamo le seguenti stime «a priori»:

$$(4.23) \quad -\overline{\varphi} \leq \varphi(x) \leq \overline{\varphi} \quad \text{in } \Omega,$$

$$(4.24) \quad 0 \leq \theta(x) \leq \frac{\overline{\varphi}^2}{2} + F(u_M),$$

da queste segue

$$(4.25) \quad \frac{\overline{\varphi}^2}{2} + F(u_M) \geq \theta(x) - \frac{\varphi^2}{2}(x) \geq -\frac{\overline{\varphi}^2}{2}.$$

Definiamo

$$(4.26) \quad u(x) = f\left(\theta(x) - \frac{\varphi^2(x)}{2}\right),$$

dalla (4.25) segue

$$(4.27) \quad G^{-1}\left(-\frac{\bar{\varphi}^2}{2}\right) < u(x) \leq G^{-1}\left(\frac{\bar{\varphi}^2}{2} + G(u_M)\right)$$

e quindi anche

$$(4.28) \quad \theta(x) = \frac{\varphi^2(x)}{2} + G(u(x))$$

$$(4.29) \quad \nabla\theta = \varphi\nabla\varphi + \frac{\widehat{\kappa}(u)}{\widehat{\sigma}(u)} \nabla u$$

per cui la (4.18) diviene, tenendo conto della (4.19),

$$(4.30) \quad -\nabla \cdot (\widehat{\kappa}(u) \nabla u) = \widehat{\sigma}(u) |\nabla\varphi|^2,$$

$$(4.31) \quad u = u_0 \quad \text{su } S_1.$$

Per il principio del massimo si ha $u(x) \geq u_m$ e quindi $\widehat{\kappa}(u) = \kappa(u)$, $\widehat{\sigma}(u) = \sigma(u)$. Abbiamo in definitivo il seguente

TEOREMA 4.1. *Se valgono le (4.5), (4.6) e (4.9) esiste almeno una soluzione del problema Pb7 e inoltre vale la stima*

$$(4.32) \quad u_m \leq u(x) \leq F^{-1}\left(\frac{\bar{\varphi}^2}{2} + F(u_M)\right) \quad \text{in } \Omega.$$

L'unicità della soluzione di Pb7 è provata in [3] con le condizioni al bordo della sezione 3, in generale è un problema aperto.

5. Il paradosso elettrotermico in assenza di effetto Thomson.

Consideriamo il problema Pb7 con le condizioni al bordo particolari della sezione 3, e cioè

Pb10.

$$(5.1) \quad \nabla \cdot (\sigma(u) \nabla\varphi) = 0,$$

$$(5.2) \quad -\nabla \cdot (\kappa(u) \nabla u) = \sigma(u) |\nabla\varphi|^2,$$

$$(5.3) \quad \varphi = \bar{\varphi} \quad \text{su } S_1^+, \quad \varphi = -\bar{\varphi} \quad \text{su } S_1^-,$$

$$(5.4) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{su } S_2.$$

$$(5.5) \quad u = \bar{u} > 0 \quad \text{su } S_1$$

$$(5.6) \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{su } S_2.$$

Il paradosso elettrotermico continua a sussistere ed inoltre Pb10 ha soluzione unica ed è riducibile, come Pb4, al problema misto per l'equazione di Laplace. Tramite la relazione funzionale

$$(4.7) \quad \theta = \frac{\varphi^2}{2} + F(u)$$

il problema Pb10 diviene

Pb11.

$$(5.7) \quad \nabla \cdot (\sigma(u) \nabla \theta) = 0,$$

$$(5.8) \quad \theta = \frac{\bar{\varphi}^2}{2} \quad \text{su } S_1 \quad \frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 \quad \text{su } S_2,$$

$$(5.9) \quad \nabla \cdot (\sigma(u) \nabla \varphi) = 0,$$

$$(5.10) \quad \varphi = \bar{\varphi} \quad \text{su } S_1^+, \quad \varphi = -\bar{\varphi} \quad \text{su } S_1^-,$$

$$(5.11) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{su } S_2,$$

dove u , θ e φ sono collegate dalla (4.7). La soluzione di (5.7), (5.8) non dipende da u ed è data da $\theta(x) = \bar{\varphi}^2/2$. Tenendo conto della (4.7) si ha $\bar{\varphi}^2/2 = \varphi^2(x)/2 + F(u(x))$ per cui $F(u(x)) \leq \bar{\varphi}^2/2$. Poiché $-\bar{\varphi} \leq \varphi(x) \leq \bar{\varphi}$ in Ω esiste $x_M \in \Omega$ tale che $\varphi(x_M) = 0$. Ne segue $F(u(x_M)) = \bar{\varphi}^2/2$ e anche

$$(5.12) \quad \max \{u(x), x \in \Omega\} = u(x_M) = F^{-1} \left(\frac{\bar{\varphi}^2}{2} \right).$$

Quindi il massimo della temperatura è indipendente dalla forma e dimensioni del conduttore e degli elettrodi.

6. Il problema in dimensione due e uno.

Ci si può chiedere il motivo per cui i problemi al contorno Pb4 e Pb10 all'apparenza nonlineari si riducano al problema misto per il Laplaciano. S. Howinson ha osservato [8] che in dimensione due il problema Pb10 è invariante per applicazioni conformi, vale a dire la forma delle equazioni e delle condizioni al bordo resta la stessa attraverso il cambio di variabili $X + iY = f(x + iy)$ se f è analitica e $|dz/dz| > 0$ in Ω . La proprietà resta vera anche per il problema Pb4, come subito si verifica con un calcolo diretto. Supponiamo che la frontiera di Ω (qui un sottoinsieme aperto, regolare e semplicemente connesso di \mathbf{R}^2), sia divisa come in figura. Al solito S_1^+ e S_1^- rappresentano gli elettrodi e $S_2 = S_{2a} \cup S_{2d}$ la parte isolata termicamente. In [8] è dimostrato che è possibile costruire una applicazione conforme da Ω nel rettangolo $R = \{(X, Y), 0 \leq X \leq A, 0 \leq Y \leq B\}$ in modo che S_1^+ e S_1^- si trasformano nei lati opposti $X = A$ e $Y = B$. I problemi Pb4 e Pb10 diventano, se riformulati in R , essenzialmente problemi unidimensionali. Questa osservazione ci motiva a considerare il problema Pb10 in una sola variabile spaziale e cioè

Pb12.

$$(6.1) \quad \frac{d}{dx} \left[\sigma(u) \frac{d\varphi}{dx} \right] = 0,$$

$$(6.2) \quad - \frac{d}{dx} \left[\kappa(u) \frac{du}{dx} \right] = \sigma(u) \left[\frac{d\varphi}{dx} \right]^2,$$

$$(6.3) \quad \varphi(-d) = -\bar{\varphi}, \quad \varphi(d) = \bar{\varphi},$$

$$(6.4) \quad u(-d) = \bar{u}, \quad u(d) = \bar{u}.$$

Supponiamo in questa sezione che $\sigma(u)$ e $\kappa(u)$ soddisfino alle ipotesi minime che rendono il problema fisicamente significativo e cioè $\sigma(u) \in C^0(\mathbf{R}_+^1)$, $\kappa(u) \in C^0(\mathbf{R}_+^1)$

$$(6.5) \quad \sigma(u) > 0, \quad \kappa(u) > 0 \quad \text{per ogni } u \geq 0.$$

Definiamo la nuova scala delle temperature data da

$$(6.6) \quad \zeta = F(u) = \int_{\bar{u}}^u \frac{\kappa(t)}{\sigma(t)} dt.$$

Si dimostra [3] il seguente

LEMMA 6.1. *Se*

$$(6.7) \quad \int_{\bar{u}}^{\infty} \frac{\kappa(t)}{\sigma(t)} dt = \infty$$

il problema Pb12 ha una e una sola soluzione. Se

$$(6.8) \quad \int_{\bar{u}}^{\infty} \frac{\kappa(t)}{\sigma(t)} dt = \gamma < \infty$$

e

$$(6.9) \quad \frac{\bar{\varphi}^2}{2} < \gamma$$

il problema Pb12 ha ancora una e una sola soluzione, mentre non ha soluzione se

$$(6.10) \quad \frac{\bar{\varphi}^2}{2} \geq \gamma.$$

In questa sezione consideriamo il problema con effetto Thomson e cioè

Pb13.

$$(6.11) \quad \frac{d}{dx} \left[\sigma(u) \frac{dv}{dx} \right] = 0,$$

$$(6.12) \quad -\frac{d}{dx} \left[\kappa(u) \frac{du}{dx} \right] - u \frac{d\alpha}{du} \sigma(u) \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} = \sigma(u) \left[\frac{dv}{dx} \right]^2,$$

$$(6.13) \quad v(-d) = -\bar{\varphi}, \quad v(d) = \bar{\varphi},$$

$$(6.14) \quad u(-d) = \bar{u}, \quad u(d) = \bar{u},$$

ancora sotto le ipotesi (6.5) per quanto riguarda $\sigma(u)$ e $\kappa(u)$, mentre supponiamo solo che $\alpha(u) \in C^1(\mathbf{R}_+^1)$ poiché è noto che questo coefficiente può cambiare di segno in corrispondenza di certi valori critici della temperatura [12]. Dimostreremo che il problema Pb13 ha soluzione unica lasciando l'aspetto esistenziale per un futuro lavoro. Per il principio di massimo unidimensionale le soluzioni di Pb13 soddisfano le limitazioni

$$(6.15) \quad -\bar{\varphi} \leq v(x) \leq \bar{\varphi},$$

$$(6.16) \quad u(x) \geq \bar{u}.$$

Introduciamo la funzione

$$(6.17) \quad v(u) = u\alpha(u) - \int_0^u \alpha(t) dt,$$

che permette di riscrivere la (6.11) nella forma

$$(6.18) \quad \frac{d}{dx} \left[\kappa(u) \frac{du}{dx} + \sigma(u)(v + v(u)) \frac{dv}{dx} \right] = 0.$$

Dalla (6.11) segue

$$(6.19) \quad \frac{dv}{dx} = \frac{C_1}{\sigma(u)}$$

mentre dalla (6.19) otteniamo

$$(6.20) \quad \kappa(u) \frac{du}{dx} + \sigma(u)(v + v(u)) \frac{dv}{dx} = C_2$$

dove C_1 e C_2 sono costanti di integrazione. Ne segue

$$(6.21) \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{\kappa(u)} [C_2 - C_2(v + v(u))].$$

Dalla (6.13) e (6.19) otteniamo

$$(6.22) \quad \frac{dv}{dx} > 0, \quad x \in [-d, d].$$

La u si può quindi pensare come funzione ad un sol valore di v . Posto $k_1 = C_2/C_1$ otteniamo dalle (6.19) e (6.21)

$$(6.23) \quad \frac{\kappa(u)}{\sigma(u)} \frac{dv}{du} = k_1 - v - v(u).$$

Usando la scala delle temperature data dalla (6.6) e definendo la funzione

$$(6.24) \quad G(\xi) = v(F^{-1}(\zeta))$$

la (6.23) diviene

$$(6.25) \quad \frac{d\zeta}{dv} = k_1 - v - G(\zeta).$$

Tenendo conto delle (6.6) e (6.4) arriviamo al seguente problema che determina $\zeta(v)$:

Pb14.

$$(6.26) \quad \frac{d}{dv} \left[\frac{d\zeta}{dv} + v + G(\zeta) \right] = 0,$$

$$(6.27) \quad \zeta(-\bar{\varphi}) = 0, \quad \zeta(\bar{\varphi}) = 0.$$

ESEMPIO 1. Se $\nu(u) = 0$ e cioè se l'effetto Thomson è assente, il problema Pb14 è banalmente risolubile e la soluzione è data da $\zeta = (1/2)\bar{\varphi}^2 - (1/2)v^2$. Tenendo conto della (6.6) si trova la relazione funzionale

$$\frac{1}{2} \bar{\varphi}^2 = \frac{1}{2} v^2 + \int_{\bar{u}}^u \frac{\kappa(t)}{\sigma(t)} dt$$

da cui segue subito il Lemma 6.1.

ESEMPIO 2. Se valgono le leggi di Wiedemann-Franz (2.4) e di Tait (2.5) come nella sezione 2 si ottiene

$$G(\zeta) = \alpha_1 \left(\frac{\zeta}{L} + \frac{\bar{u}^2}{2} \right).$$

Il problema Pb14 è quindi lineare in conformità ai risultati della sezione 3.

LEMMA 6.2. *Se vale la (6.5) la soluzione di Pb13 è unica.*

DIMOSTRAZIONE. Basta provare che è unica la soluzione di Pb14. Ridefinendo opportunamente la funzione $G(\zeta)$ possiamo supporre $G(0) = 0$ e scrivere

$$(6.28) \quad \frac{d\zeta}{dv} + G(\zeta) = c - v, \quad \zeta(0) = 0.$$

Siano $\zeta_1(v)$ e $\zeta_2(v)$ due soluzioni distinte di Pb14 e c_1, c_2 le corrispondenti costanti che intervengono in (6.28). Per v sufficiente prossimo a $-\bar{\varphi}$ si ha

$$(6.29) \quad \zeta_1(v) > \zeta_2(v).$$

Sia \hat{v} l'estremo superiore delle v per cui vale la (6.28). Se per assurdo si

ha $\widehat{v} < \bar{\varphi}$ vale anche $\zeta_1(v) = \zeta_2(v)$ e $(d\zeta_1/dv)(\widehat{v}) \leq (d\zeta_2/dv)(\widehat{v})$. Ma dalla (6.29) segue anche

$$\frac{d\zeta_1}{dv}(\widehat{v}) > \frac{d\zeta_2}{dv}(\widehat{v}).$$

Quindi $\zeta_1(v) = \zeta_2(v)$. ■

NOTA FINALE. La formulazione matematica del problema del riscaldamento elettrico di un conduttore quando le conducibilità dipendono dalla temperatura è classica e risale alla metà del secolo scorso; si veda in particolare [14], pag. 290 per l'interazione fra gli effetti Joule e Thomson. La trasformazione funzionale (4.7)-(4.8) che semplifica grandemente il problema senza effetto Thomson, è già presente nel lavoro di H. Diesselhorst [7], dove però si considerano solo le condizioni al bordo particolari (5.3)-(5.6) e non si nota che in certi casi il problema non ha soluzione. Vi è stato un rinnovato interesse per queste equazioni negli anni 30 e 40 in relazione ai problemi posti dal riscaldamento dei contatti mobili presenti in molte apparecchiature elettriche del tempo (relay, multivibratori ecc.). Questo richiamò l'attenzione sulle conseguenze che la relazione funzionale (4.7)-(4.8) ha sul massimo della temperatura. Il risultato noto come « $\psi - \theta$ theorem» è descritto nel libro di F. Llewellyn Jones [12] a cui questo lavoro è ispirato. L'ipotesi di partenza del « $\psi - \theta$ theorem» è però di considerare solo i processi in cui

$$\frac{\sigma(u)}{\kappa(u)} \nabla u + \varphi \nabla \varphi = 0.$$

È quindi un punto di vista diverso da quello qui adottato, anche se la sostanza del risultato è simile. La validità del « $\psi - \theta$ theorem» è affermata in [12] anche in presenza di effetto Thomson. La dimostrazione data, che si basa sul lavoro di P. M. Davidson [6], ha però carattere di giustificazione fisico-ingegneristica ed è totalmente diversa da quella presentata nella sezione 2, in particolare non contiene la rappresentazione implicita (3.15) del massimo della temperatura e le trasformazioni funzionali che ad essa conducono. Queste equazioni e i problemi connessi hanno ricevuto di recente una nuova attenzione motivata dalla notevole diffusione di una particolare resistenza elettrica (nota come termistore), formata da un impasto di materiale semiconduttore la cui resistenza varia fortemente con la temperatura. Questo fa sì che le equazioni che descrivono il dispositivo siano ancora quelle di questo lavoro.

REFERENCES

- [1] W. ALLEGRETTO - H. XIE, $C^\alpha(\bar{\Omega})$ solutions of a class of nonlinear degenerate elliptic systems arising in the thermistor problem, *SIAM J. Math. Anal.*, **22** (1991), pp. 1491-1499.
- [2] W. ALLEGRETTO - H. XIE, Existence of solutions for the time-dependent thermistor equations, *IMA J. Appl. Math.*, **47** (1992), pp. 270-281.
- [3] G. CIMATTI, Remark on existence and uniqueness for the thermistor problem under mixed boundary conditions, *Quart. Appl. Math.*, **47** (1989), pp. 117-121.
- [4] G. CIMATTI, A bound for the temperature in the thermistor problem, *IMA J. Appl. Math.*, **40** (1988), pp. 15-22.
- [5] G. CIMATTI, Existence and uniqueness for the equations of the Joule-Thomson effect, *Appl. Anal.*, **41** (1991), pp. 131-144.
- [6] P. M. DAVIDSON, The theory of the Thomson effect in electrical contacts, *Proc. Inst. Elect. Engrs.*, **96** (1) (1949), pp. 293-295.
- [7] H. DIESSELHORST, Über das Probleme eines elektrisch erwärmten Leiters, *Ann. Phys.*, **1** (1900), pp. 312-325.
- [8] S. HOWISON, A note on the thermistor problem in two space dimensions, *Quart. Appl. Math.*, **XLVII**, 3 (1989).
- [9] S. HOWISON - J. F. RODRIGUES - M. SHILLOR, Stationary solutions to the thermistor problem, *J. Math. Anal. Appl.* (to appear).
- [10] F. KOHLRAUSCH, Über den stationären Temperatur-zustand eines elektrisch geheizten Leiters, *Ann. Phys.*, **1** (1899), pp. 132-158.
- [11] L. LANDAU - E. LIFCHITZ, *Électrodynamique des milieux continus*, Éditions Mir, Moscou (1969).
- [12] F. LLEWELLYN JONES, *The Physics of Electrical Contacts*, Clarendon Press, Oxford (1957).
- [13] P. G. TAIT, On the thermo-electricity, *Proc. Roy. Soc. Edin.* (1870/71), pp. 308-311 and 597-602.
- [14] W. THOMSON, *Mathematical and Physical Papers*, Cambridge University Press (1882).

Manoscritto pervenuto in redazione l'1 luglio 1993
e, in forma revisionata, il 16 settembre 1993.