ENRICO JABARA

Automorfismi che fissano i centralizzanti di un gruppo

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 102 (1999), p. 233-239

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1999__102__233_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 102 (1999)

Automorfismi che fissano i centralizzanti di un gruppo.

ENRICO JABARA (*)

ABSTRACT - In this note we study the groups G admitting a set Γ of automorphisms such that $[g, g^{\varphi}] = 1$ for every $g \in G$ and every $\varphi \in \Gamma$. We apply some of ours results to study the automorphism group of finite E-groups (i.e. groups in which each element commutes with its endomorphic images).

1. Introduzione.

Un automorfismo centrale di un gruppo G è un automorfismo che induce l'identità sul quoziente $G/Z(G)$; l'insieme degli automorfismi centrali di G forma un sottogruppo normale di $\mathrm{Aut}(G)$ che si denota con $\mathrm{Aut}_c(G)$. Se $\varphi \in \mathrm{Aut}_c(G)$ allora per ogni $g \in G$ si ha $[g, g^{\varphi}] = 1$ ma, in generale, non vale il viceversa. Scopo di questo lavoro è lo studio degli automorfismi di G che godono di quest'ultima proprietà e che costituiscono l'insieme:

$$\Gamma(G) = \{\varphi \in \mathrm{Aut}(G) \mid [g, g^{\varphi}] = 1 \quad \forall g \in G\}.$$

Applicheremo alcuni dei nostri risultati allo studio degli E-gruppi (cioè dei gruppi in cui ogni elemento commuta con le sue immagini endomorfe) e dei loro automorfismi. Altri sottoinsiemi di $\mathrm{Aut}(G)$ che sono stati oggetto di studio sono quelli formati da automorfismi che fissano determinate classi di sottogruppi di G (si veda, tra gli altri, [1]). Ad esempio Cooper in [4] ha dimostrato che un automorfismo che lascia invarianti tutti i sottogruppi del gruppo G è necessariamente un automorfismo centrale. L'argomento trattato in questo lavoro conduce in modo naturale a

(*) Indirizzo dell'A.: Dipartimento di Matematica e Informatica, Via Torino 155, 30173 Mestre, Venezia.

prendere in considerazione l'insieme:

$$\Gamma_0(G) = \{\varphi \in \mathrm{Aut}(G) \mid C_G(g)^\varphi = C_G(g) \ \ \forall g \in G\}$$

degli automorfismi che fissano tutti i centralizzanti di elementi di G. Poiché per ogni sottogruppo H di un gruppo G si ha $C_G(H) = \bigcap_{h \in H} C_G(h)$, gli automorfismi appartenenti a $\Gamma_0(G)$ sono esattamente quelli che fissano il reticolo dei centralizzanti di G.

In [8] Kappe ha studiato gli automorfismi φ di un gruppo G per i quali esiste un ricoprimento normale di G costituito da sottogruppi φ-invarianti e abeliani; come vedremo l'insieme degli automorfismi definiti in tal modo coincide con $\Gamma(G)$.

Osserviamo infine che l'insieme $\Gamma(G)$ è stato implicitamente utilizzato in [5] per fornire una caratterizzazione degli automorfismi centrali di G.

2. Notazioni e risultati preliminari.

In quanto segue con G denoteremo un gruppo, con φ un suo automorfismo e con $C = C_G(\varphi)$ il sottogruppo degli elementi di G fissati da φ; $\Gamma(G)$ e $\Gamma_0(G)$ sono stati già definiti. Un insieme $\mathcal{S}$ di sottogruppi di G si dice un ricoprimento se per ogni $g \in G$ esiste (almeno) un elemento $S \in \mathcal{S}$ tale che $g \in S$; un ricoprimento si dice normale se per ogni $S \in \mathcal{S}$ e per ogni $g \in G$ si ha $S^g \in \mathcal{S}$. Diremo che φ è un K-automorfismo (nel senso di Kappe: si veda [8]) se esiste un ricoprimento normale $\mathcal{S}$ di G formato da sottogruppi abeliani e φ-invarianti. Per il resto la notazione adottata sarà standard (come, ad esempio, in [12]).

Osserviamo che se $\varphi \in \Gamma(G)$ e H è un sottogruppo φ-invariante di G allora anche $\varphi|_H \in \Gamma(H)$; se poi $H \lhd G$ allora $\overline{\varphi}$, l'automorfismo indotto da φ su $\overline{G} = G/H$, appartiene ancora a $\Gamma(\overline{G})$. Questi fatti saranno utilizzati nel corso di alcune dimostrazioni senza un esplicito richiamo.

Parte del seguente risultato, la cui dimostrazione si serve di metodi elementari, si può ricavare dal lemma 1 e dal corollario 1 di [10] (si veda anche il lemma 2 di [8]).

LEMMA 1. *Sia* $\varphi \in \Gamma(G)$, *allora:*

a) $[x, y^\varphi] = [x^\varphi, y] \ \forall x, y \in G$;

b) $C \lhd G$;

c) $[G, \langle\varphi\rangle]$ *centralizza* C.

DIM. Ricordando la formula (valida in ogni gruppo):

$$(*) \qquad [ab, cd] = [a, d]^b[a, c]^{db}[b, d][b, c]^d$$

otteniamo:

$$1 = [yx, (yx)^{\varphi}] = [x^{y^{-1}}, y^{\varphi}]^y[y, (x^{y^{-1}})^{\varphi}]^{y^{\varphi}} = [x, y^{\varphi}][x^{\varphi}, y]^{-1}.$$

Se poi $x \in C$, allora si ha:

$$[x, y]^{\varphi} = [x, y^{\varphi}] = [x^{\varphi}, y] = [x, y] \in C \qquad \forall y \in G .$$

Per dimostrare il punto c) è sufficiente far vedere che, per ogni $g \in G$ e per ogni $x \in C$, si ha $[x, g^{\varphi}g^{-1}] = 1$. Infatti $x^g \in C$ da cui $x^g = (x^g)^{\varphi} = x^{g^{\varphi}}$ e $x^{g^{\varphi}g^{-1}} = x$ ■

PROPOSIZIONE 1. *$\Gamma(G)$ e $\Gamma_0(G)$ sono sottogruppi normali di* $\mathrm{Aut}(G)$ *contenenti* $\mathrm{Aut}_c(G)$. *Inoltre $\Gamma_0(G) \leqslant \Gamma(G)$ e $\Gamma(G)/\Gamma_0(G)$ ha esponente* 2.

DIM. Siano φ, $\sigma \in \Gamma(G)$; allora, ricordando (*) si ha $1 = [xx^{\varphi}, (xx^{\varphi})^{\sigma}] = [x, x^{\varphi\sigma}]^{x^{\varphi}}$ e quindi $\varphi\sigma \in K(G)$, poi $1 = [x^{\varphi^{-1}}, (x^{\varphi^{-1}})^{\varphi}]$ e perciò $\varphi^{-1} \in \Gamma(G)$. Se $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$ si ha $[x^{\alpha^{-1}\varphi\alpha}, x] = [(x^{\alpha^{-1}})^{\varphi}, x^{\alpha^{-1}}]^{\alpha} = 1$ e quindi $\Gamma(G)$ è un sottogruppo normale di $\mathrm{Aut}(G)$.

Le verifiche che $\Gamma_0(G) \lhd \mathrm{Aut}(G)$ e $\mathrm{Aut}_c(G) \leqslant \Gamma_0(G) \leqslant \Gamma(G)$ sono altrettanto elementari.

Per dimostrare l'ultima parte dell'asserto è sufficiente far vedere che se $\varphi \in \Gamma(G)$ allora $\varphi^2 \in \Gamma_0(G)$. Infatti se x, y commutano allora, ricordando il Lemma 1, si ha $[x, y^{\varphi^2}] = [x^{\varphi}, y^{\varphi}] = [x, y]^{\varphi} = 1$ ■

Siamo ora in grado di caratterizzare i K-automorfismi di un gruppo:

PROPOSIZIONE 2. *Sia G un gruppo. Allora i K-automorfismi di G sono precisamente gli elementi di $\Gamma(G)$.*

DIM. Sia φ un K-automorfismo di G e sia $\mathcal{S}$ il relativo ricoprimento normale formato da sottogruppi abeliani e φ-invarianti. Se $g \in G$ esiste $S \in \mathcal{S}$ con $g \in S$ e $g^{\varphi} \in S^{\varphi} = S$; poiché S è abeliano se ne conclude che $[g, g^{\varphi}] = 1$. Dunque $\varphi \in \Gamma(G)$.

Per dimostrare il viceversa consideriamo il ricoprimento $\mathcal{K}$ di G così definito:

$$\mathcal{K} = \{\langle g\rangle^{\Gamma(G)} \mid g \in G\} .$$

Dalla proposizione precedente segue che ogni elemento di $\mathcal{K}$ è un sottogruppo abeliano di G in quanto $\Gamma(G)$ è un gruppo e che $\mathcal{K}$ è normale (anzi caratteristico) in quanto $\Gamma(G)$ è normale in $\mathrm{Aut}(G)$. Sia $\varphi \in \Gamma(G)$, allora per ogni $S \in \mathcal{K}$ si ha $S^{\varphi} = S$ e quindi $\mathcal{K}$ è un ricoprimento con le proprietà richieste per concludere che φ è un K-automorfismo. ∎

Osserviamo che la dimostrazione della proposizione precedente fornisce, per ogni gruppo G, un ricoprimento $\mathcal{K}$ in un certo senso «universale» in quanto non dipendente dal particolare K-automorfismo che viene considerato. La proposizione precedente ci permette inoltre di riformulare il risultato di Kappe (teorema 2 di [8]):

Sia G un gruppo, allora:

a) $[[G, \Gamma(G)], G, G]$ ha esponente 2.

b) $[G, \Gamma(G)] \leq Z_2(G)$ se $[G, \Gamma(G)]$ non contiene elementi di ordine 2.

c) $G' \leq C_G([G, \Gamma(G)])$.

d) $[G, \Gamma(G)^2] \leq Z_2(G)$.

e) $\Gamma(G)$ centralizza $[G, G, G]$.

3. La struttura di $\Gamma(G)$.

LEMMA 2. *Se $\varphi \in \Gamma(G)'$ allora $[x^{\varphi}, y] = [x, y]$. In particolare si ha $[G', \Gamma(G)'] = 1$.*

DIM. È sufficiente dimostrare l'asserto nel caso in cui φ è un commutatore, cioé $\varphi = [\alpha, \beta]$ con $\alpha, \beta \in \Gamma(G)$. Ricordando che $\beta\alpha \in \Gamma(G)$, una ripetuta applicazione del Lemma 1 porge:

$$[x^{\varphi}, y] = [x^{\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha\beta}, y] = [x^{\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha}, y^{\beta}] =$$

$$= [x^{\alpha^{-1}\beta^{-1}}, y^{\beta\alpha}] = [x^{\alpha^{-1}\beta^{-1}(\beta\alpha)}, y] = [x, y] \qquad ∎$$

Una parziale generalizzazione del Teorema 3.6 di [3] è fornita dalla

PROPOSIZIONE 3. *$\Gamma(G)/\mathrm{Aut}_c(G)$ è abeliano.*

DIM. Dimostriamo che $\Gamma(G)' \leq \mathrm{Aut}_c(G)$: basta far vedere che per ogni $x \in G$ e ogni $\varphi \in \Gamma(G)'$ si ha $x^{\varphi}x^{-1} \in Z(G)$. Infatti, preso $y \in G$, dal lemma precedente si ottiene:

$$[x^\varphi x^{-1}, y] = [x^\varphi, y]^{x^{-1}}[x^{-1}, y] = [x, y]^{x^{-1}}[x^{-1}, y] = 1. \quad \blacksquare$$

Poiché se $Z(G) = 1$ allora $\mathrm{Aut}_c(G) = 1$ e se $Z(G) \leqslant G'$ allora (come si verifica facilmente) $\mathrm{Aut}_c(G)$ è abeliano, otteniamo il

COROLLARIO. Se $Z(G) = 1$ allora $\Gamma(G)$ è abeliano. Se $Z(G) \leqslant G'$ allora $\Gamma(G)$ è metabeliano ■

PROPOSIZIONE 4. *Sia G un gruppo a condizione di massimo sui sottogruppi abeliani. Se $Z(G) = 1$ allora $\Gamma(G) = 1$.*

DIM. Denotiamo con R l'insieme degli elementi di G che inducono per coniugio su G un automorfismo di $\Gamma(G)$; una semplice verifica mostra che R coincide con l'insieme degli elementi 2-Engel (a destra) di G. In particolare, per un risultato di Peng (Teorema 7.21 di [11]), R è contenuto nell'ipercentro di G; poiché per ipotesi $Z(G) = 1$ deve essere $R = 1$. Da questo fatto discende che $\mathrm{Inn}(G) \cap \Gamma(G) = 1$ e, poiché sia $\mathrm{Inn}(G)$ che $\Gamma(G)$ sono nornali in $\mathrm{Aut}(G)$, $[\mathrm{Inn}(G), \Gamma(G)] = 1$ e quindi $[G, \Gamma(G)] \leqslant Z(G) = 1$. Siccome $\Gamma(G) \leqslant \mathrm{Aut}(G)$, da $[G, \Gamma(G)] = 1$ segue $\Gamma(G) = 1$. ■

Il seguente esempio fa vedere che la proposizione 4 non è generalizzabile nemmeno per i gruppi risolubili localmente nilpotenti.

ESEMPIO. Sia A un gruppo di esponente 2 e ordine infinito e $\langle x \rangle$ un gruppo di ordine 2. Sia $G = \langle x \rangle \wr A$ il prodotto intrecciato standard di $\langle x \rangle$ con A.

Si verifica facilmente che $Z(G) = 1$, $R = G'$ e quindi $\Gamma(G) \cap \mathrm{Inn}(G)$ è isomorfo a G'. Si verifica inoltre che $\Gamma_0(G) \cap \mathrm{Inn}(G) = 1$: questo mostra anche che, in generale, $\Gamma_0(G) \neq \Gamma(G)$. ■

4. E-Gruppi.

Applichiamo alcuni dei risultati ottenuti allo studio degli E-gruppi, cioé dei gruppi non abeliani in cui ogni elemento commuta con tutte le sue immagini tramite qualsivoglia endomorfismo.

In quanto segue p denoterà sempre un numero primo dispari.

Proposizione 5. *Sia G un E-gruppo finito di ordine dispari. Se G non ammette fattori diretti abeliani diversi dall'unità allora* $\mathrm{Aut}(G)$ *ha ordine dispari.*

Dim. Non è restrittivo supporre che G sia un p-gruppo (finito) non abeliano.

Ragioniamo per assurdo supponendo $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ con $\varphi^2 = 1$ e $\varphi \neq 1$. Per il teorema 10.4.1 di [6] si ha $G = CI$ con $I = \{x \in G \mid x^\varphi = x^{-1}\}$, $C = C_G(\varphi)$ e $C \cap I = 1$. Per ogni $g, h \in G$ si ha $[g, h]^\varphi = [g^{\varphi^2}, h] = [g, h]$ e quindi $G' \leqslant C$; ne segue che gli elementi di I mantengono il loro ordine in G/G'. Ma allora, per il Teorema 1 di [9], $I \leqslant Z(G)$, I risulta essere un sottogruppo normale e abeliano di G e $G = C \times I$, determinando la contraddizione cercata. ■

In particolare, i p-gruppi che sono E-gruppi privi di fattori diretti abeliani appartengono alla classe (studiata in [7]) dei p-gruppi privi di automorfismi involutori.

Lemma 3. *Sia G un gruppo finito e nilpotente di classe al piú 2 e sia $\varphi \in \Gamma(G)$ di ordine dispari e coprimo con $|G|$. Allora $G = [G, \langle\varphi\rangle] \times C$.*

Dim. In un gruppo finito G un automorfismo α di ordine coprimo con $|G|$ è privo di punti fissi se e solo se $gg^\alpha \dots g^{\alpha^{|\alpha|-1}} = 1$ per ogni $g \in G$. Infatti se $gg^\alpha \dots g^{\alpha^{|\alpha|-1}} = 1$ e $g \in C_G(\alpha)$ allora $g^{|\alpha|} = 1$ da cui $g = 1$ (perché $(|g|, |\alpha|) = 1$) e dunque $C_G(\alpha) = 1$. L'implicazione nell'altro verso discende da 10.5.1 di [12].

Per dimostrare il lemma è sufficiente far vedere che $[G, \langle\varphi\rangle] \cap C = 1$. Poiché su $[G, \langle\varphi\rangle]/[G, \langle\varphi\rangle]'$ l'automorfismo indotto da φ è privo di punti fissi non banali è sufficiente dimostrare che $[G, \langle\varphi\rangle]' \cap C = 1$. Infatti se $g \in [G, \langle\varphi\rangle]$ allora $gg^\varphi \dots g^{\varphi^{|\varphi|-1}} \in [G, \langle\varphi\rangle]' \leqslant Z(G)$; preso $h \in G$ e ricordando che $\varphi \in \Gamma(G)$ ha ordine dispari si ottiene:

$$[g, h][g, h]^\varphi \dots [g, h]^{\varphi^{|\varphi|-1}} = [g, h][g^{\varphi^2}, h] \dots [g^{\varphi^{2(|\varphi|-1)}}, h] =$$

$$= [gg^\varphi \dots g^{\varphi^{|\varphi|-1}}, h] = 1 .$$

Quindi $[G, \langle\varphi\rangle] \cap C = 1$ e siccome $[G, \langle\varphi\rangle]$ e C sono sottogruppi normali di G si ha $G = [G, \langle\varphi\rangle] \times C$. ■

Seguendo le notazioni adottate in [3], con pE-gruppo intenderemo un p-gruppo finito di classe 2 che è un E-gruppo.

PROPOSIZIONE 6. *Sia G un pE-gruppo. Se G non ammette fattori diretti non banali allora il gruppo* $\mathrm{Aut}(G)/O_p(\mathrm{Aut}(G))$ *è ciclico.*

DIM. Poniamo $A = \mathrm{Aut}(G)$ e $A_c = \mathrm{Aut}_c(G)$.

Per la proposizione 5 il gruppo A ha ordine dispari e per la proposizione 3 il quoziente A/A_c è abeliano. Per il corollario 2 di [2] A_c è un p-gruppo, quindi $A_c \leqslant O_p(A)$ e poiché A/A_c è abeliano $A/O_p(A)$ è un p'-gruppo di ordine dispari.

Sia Q un q-sottogruppo di Sylow di A con $q \neq p$; poiché G non ha fattori diretti, il lemma 3 porge che ogni elemento di $Q \setminus \{1\}$ agisce senza punti fissi non banali su G e dunque Q è ciclico (10.5.6 di [12]). Poiché $A/O_p(A)$ è un gruppo abeliano i cui sottogruppi di Sylow sono ciclici si conclude che anche $A/O_p(A)$ è ciclico. ∎

BIBLIOGRAFIA

[1] J. E. ADNEY - W. E. DESKINS, *On automorphisms and subgroups of finite groups II*, Arch. Math. (Basel), **13** (1962), pp. 174-178.
[2] J. E. ADNEY - T. YEN, *Automorphisms of a p-group*, Illinois J. Math, **9** (1965), pp. 137-143.
[3] A. CARANTI, *Finite p-groups of exponent p^2 in which each element commutes with its endomorphic images*, J. Algebra, **97** (1985), pp. 1-13.
[4] C. D. COOPER, *Power automorphisms of a group*, Math. Z., **107** (1968), pp. 335-356.
[5] G. CUTOLO, *A note on central automorphisms*, Rend. Mat. Acc. Lincei, **3** (1992), pp. 103-106.
[6] D. GORENSTEIN, *Finite Groups*, Harper & Row, New York (1968).
[7] H. HEINEKEN - H. LIEBEK, *On p-groups with odd order automorphism groups*, Arch. Math., **24** (1973), pp. 465-471.
[8] W. P. KAPPE, *Automorphisms and abelian subgroups*, Symposia Math., **17** (1976), pp. 301-312.
[9] J. J. MALONE, *More on groups in which each element commutes with its endomorphic images*, Proc. A.M.S., **65** (1977), pp. 209-214.
[10] M. L. NEWELL, *Normal and power endomorphisms of a group*, Math. Z., **151** (1976), pp. 139-142.
[11] D. J. S. ROBINSON, *Finiteness conditions and generalized soluble groups.* (2 voll.) Springer-Verlag New York-Heidelberg-Berlin (1972).
[12] D. J. S. ROBINSON, *A course in the theory of groups*, Springer-Verlag New York-Heidelberg-Berlin (1982).

Manoscritto pervenuto in redazione il 4 febbraio 1998.