

# STATISTIQUE ET ANALYSE DES DONNÉES

J. J DAUDIN

## **Coefficient de Tschuprow partiel et indépendance conditionnelle**

*Statistique et analyse des données*, tome 4, n° 3 (1979), p. 55-58

[http://www.numdam.org/item?id=SAD\\_1979\\_\\_4\\_3\\_55\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SAD_1979__4_3_55_0)

© Association pour la statistique et ses utilisations, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Statistique et analyse des données » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

COEFFICIENT DE TSCHUPROW PARTIEL ET INDEPENDANCE  
CONDITIONNELLE

J. J DAUDIN

Institut National Agronomique Paris Grignon  
Service de Mathématiques  
16, rue Claude Bernard - 75005 PARIS

Résumé

Nous étudions les relations logiques entre indépendance conditionnelle et la nullité du coefficient de liaison partielle proposé par Saporta.

1 - RAPPEL DE LA DEFINITION DU COEFFICIENT DE TSCHUPROW PARTIEL

Soit X, Y, Z 3 variables aléatoires discrètes, à valeurs respectivement sur les ensembles [1, 2, ..., I], [1, 2, ..., J] et [1, 2, ..., K]

Soit  $P_{ijk} = p(X=i \cap Y=j \cap Z=k)$

$$P_{ij.} = \sum_k P_{ijk}$$

et des définitions semblables pour  $P_{i.k}$ ,  $P_{.jk}$ ,  $P_{.j.}$  et  $P_{..k}$

$$\text{Soit } \phi_{XY}^2 = \sum_{ij} \frac{P_{ij.}^2}{P_{i..} P_{.j.}} - 1$$

$$\phi_{XZ}^2 = \sum_{ij} \frac{P_{i.k}^2}{P_{i..} P_{..k}} - 1$$

$$\phi_{YZ}^2 = \sum_{jk} \frac{P_{.jk}^2}{P_{.j.} P_{..k}} - 1$$

soit enfin

$$T_{XY} = \frac{\phi_{XY}^2}{\sqrt{\binom{I-1}{2} \binom{J-1}{2}}}$$

$$T_{XZ} = \frac{\phi_{XZ}^2}{\sqrt{\binom{I-1}{2} \binom{K-1}{2}}}$$

$$T_{YZ} = \frac{\phi_{YZ}^2}{\sqrt{\binom{J-1}{2} \binom{K-1}{2}}}$$

$T_{XY}$  est le carré du coefficient de Tschuprow qui est une mesure de la liaison entre X et Y. (voir Kendall et Stuart, tome 2 p.557)

Saporta (1976) a montré que l'on peut définir  $\phi_{XY}^2$  comme produit scalaire de 2 opérateurs. Comme les normes de ces 2 opérateurs sont respectivement  $\sqrt{1-T_{XZ}}$  et  $\sqrt{1-T_{YZ}}$ ,  $T_{XY}$  peut être défini comme le produit scalaire entre 2 opérateurs divisés par le produit de leurs normes.

Cette propriété de  $T_{XY}$  qui en fait un indice de liaison entre variables discrètes analogue au coefficient de corrélation entre variables continues a conduit Saporta à définir le coefficient  $T_{XY,Z}$  par analogie avec le coefficient de corrélation partiel.

$$T_{XY,Z} = \frac{T_{XY} - T_{XZ} T_{YZ}}{\sqrt{1-T_{XZ}^2} \sqrt{1-T_{YZ}^2}}$$

Saporta a proposé  $T_{XY,Z}$  comme indice de liaison partielle entre X et Y à Z fixé et l'a appelé coefficient de Tschuprow partiel. Il est naturel alors de vérifier si la nullité de  $T_{XY,Z}$  caractérise l'indépendance conditionnelle, c'est à dire si on obtient l'équivalence :

$$T_{XY,Z} = 0 \Leftrightarrow X, Y \text{ indépendantes à } Z \text{ fixé.}$$

En fait on va montrer que les 2 implications sont fausses.

## 2 - $T_{XY,Z} = 0$ et NON INDEPENDANCE CONDITIONNELLE

On considère la table suivante de probabilités ( $p_{ijk}$ ) avec  $I=J=K=2$

k	j	i=1	i=2
1	1	1/4	1/12
1	2	0	1/6
2	1	2/12	1/6
2	2	1/4	1/2

Table 1

Les 3 marges de la table 1 sont :

Y \ X	i=1	i=2
j=1	1/4	1/4
j=2	1/4	1/4

$$T_{XY} = 0$$

Z \ X	i=1	i=2
k=1	1/4	1/4
k=2	1/4	1/4

$$T_{XZ} = 0$$

Z \ Y	j=1	j=2
k=1	1/3	1/6
k=2	1/6	1/3

$$T_{YZ} \neq 0$$

Alors  $T_{XY.Z}=0$  tandis que

$$p_{111} = 1/4 \neq \frac{p_{1.1}p_{.11}}{p_{..1}} = \frac{1/4 \cdot 1/3}{1/2} = 1/6$$

Ce qui implique que X et Y ne sont pas indépendantes conditionnellement à Z.

Soit la table de probabilité suivante et ses marges :

k	j	i=1	i=2
1	1	1/2	0
1	2	0	1/2
2	1	0	1/2
2	2	1/2	0

	i=1	i=2
j=1	1/2	1/2
j=2	1/2	1/2

$$T_{XY}=0$$

	i=1	i=2
k=1	1/2	1/2
k=2	1/2	1/2

	j=1	j=2
k=1	1/2	1/2
k=2	1/2	1/2

$$T_{YZ}=0$$

On obtient  $T_{XY.Z}=0$  et pourtant la liaison entre X et Y à Z fixé est maximale puisque la connaissance de la valeur de X implique celle de Y.

Ces contre-exemples indiquent que  $T_{XY.Z}=0$  n'implique pas l'indépendance conditionnelle et que on peut avoir à la fois  $T_{XY.Z}=0$  et une dépendance entre X et Y à Z fixé.

### 3- INDEPENDANCE CONDITIONNELLE ET $T_{XY.Z} \neq 0$

On suppose que X et Y sont indépendantes conditionnellement à Z. En fait on n'obtient alors  $T_{XY.Z}=0$  que dans le cas particulier où  $K=2$ .

Dans le cas où  $K \neq 2$ ,  $T_{XY.Z}$  peut être très différent de 0 comme on le voit sur l'exemple suivant.

On considère la table de probabilité ( $X10$ ) suivante : Table 2

	i=1	i=2	i=1	i=2	i=1	i=2
j=1	2	1	0	0	2	1
j=2	0	0	1	3	0	0
	k=1		k=2		k=3	

Table 2

Les marges de la table 2 sont les suivantes :

X \ Z	k=1	k=2	k=3
i=1	2	1	2
i=2	1	3	1

Y \ Z	k=1	k=2	k=3
j=1	3	0	3
j=2	0	4	0

X \ Y	j=1	j=2
i=1	4	1
i=2	1	3

On obtient  $T_{XY} = .322$   
 $T_{XZ} = .118$   
 $T_{YZ} = .707$   
 $T_{XY.Z} = .339$

La nullité de  $T_{XY.Z}$  pour  $K=2$  provient de l'égalité connue

$$\phi_{XY}^2 = \phi_{XZ}^2 + \phi_{YZ}^2$$

Remarquons pour conclure que la non vérification de l'implication

$T_{XY.Z} = 0 \Rightarrow$  indépendance conditionnelle  
n'est pas tragique:

elle n'est pas non plus réalisée par le coefficient de corrélation pour des variables non gaussiennes.

Par contre la non vérification de l'implication

$$\text{indépendance conditionnelle} \Rightarrow T_{XY.Z} = 0$$

nous semble plus grave et conduit à mettre en question l'utilisation de ce coefficient.

Je remercie G.Saporta et G.Drouet d'Aubigny pour leurs utiles remarques.

#### BIBLIOGRAPHIE

M.G. KENDALL, A.STUART. The advanced theory of statistics volume 2 Griffin  
3eme edition

G.SAPORTA (1976) "quelques applications des opérateurs d'Escoufier au traitement des variables qualitatives" Bulletin de l'Association des Statisticiens Universitaires - 1er trimestre 1976, 38-46.