

# STATISTIQUE ET ANALYSE DES DONNÉES

M. BENHELLI

E. LAMBERT

## **Comparaison de quelques tests d'indépendance des erreurs dans le modèle linéaire**

*Statistique et analyse des données*, tome 6, n° 1 (1981), p. 52-69

[http://www.numdam.org/item?id=SAD\\_1981\\_\\_6\\_1\\_52\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SAD_1981__6_1_52_0)

© Association pour la statistique et ses utilisations, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Statistique et analyse des données » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

Statistique et Analyse des données  
1981 - 1 - pp. 52-69

COMPARAISON DE QUELQUES TESTS D'INDEPENDANCE DES  
ERREURS DANS LE MODELE LINEAIRE

M. BENHELLI et E. LAMBERT

Laboratoire de Statistique et Probabilités  
E.R.A. - C.N.R.S. 591  
Université Paul Sabatier - 31062 TOULOUSE Cedex

Résumé : Dans le modèle linéaire gaussien  $Y = X\beta + U$  plusieurs auteurs ont proposé diverses modifications des résidus pour que les résidus ainsi modifiés aient une distribution ne dépendant pas de  $X$ . Ces résidus sont d'un usage plus simple que les résidus ordinaires pour étudier la conformité du modèle. Le but essentiel de cet article est de comparer les performances de quatre types de résidus modifiés quand ils sont utilisés pour tester l'indépendance des erreurs contre une autocorrélation d'ordre un. Les puissances sont obtenues selon les cas par des calculs numériques d'intégrales ou par simulation.

Abstract : In the gaussian linear model  $Y = X\beta + U$ , several authors have suggested various modifications of the residuals such that the modified residuals have a distribution which does not depend on  $X$ . These residuals are simpler to use than ordinary residuals to ascertain the assumptions of the model. The main purpose of this article is to compare the efficiency of four different kinds of modified residuals when used to perform a test of independance against first order autocorrelation of errors. According to the cases, the powers are given by numerical evaluation of an integral or obtained by simulation.

Mots-clés : Modèle linéaire, Analyse des résidus, Autocorrélation des erreurs.

1. INTRODUCTION

Considérons le modèle linéaire :  $Y = X\beta + U$  (1-1)

dans lequel :

- \*  $Y$  est un vecteur colonne de  $n$  variables aléatoires  $(Y_i)_{i=1}^n$
- \*  $X$  est une matrice  $n \times k$  ( $k \leq n$ ) connue, de rang plein, dont les colonnes sont les variables explicatives  $(X_i)_{i=1}^k$
- \*  $\beta$  est un vecteur colonne de  $k$  paramètres inconnus
- \*  $U$  est un vecteur colonne de  $n$  variables aléatoires inobservables gaussiennes  $(U_i)_{i=1}^n$  de lois  $\mathcal{L}(U_i) = N_{\mathbb{R}}(0, \sigma^2)$  pour tout  $i=1, 2, \dots, n$ .  $U$  est dit vecteur des erreurs.

L'analyse des résidus, coordonnées  $(\hat{U}_i)_{i=1}^n$  du vecteur  $\hat{U} = Y - \hat{Y} = MY = MU$  avec  $M = I_n - X(X'X)^{-1}X'$ , nous permet d'étudier la spécification du modèle ([15], [17], [21], ...), les valeurs aberrantes ([1]), la normalité des erreurs, leur homoscedasticité ([11], [12], [14], [16]), ou bien leur indépendance. Ces études sont souvent basées sur une statistique dont la distribution dépend de la matrice des données  $X$ , ce qui entraîne l'impossibilité d'une tabulation préalable.

Dans cet article, nous nous intéressons au test de l'hypothèse de non corrélation des erreurs (dite hypothèse nulle), ce qui signifie leur indépendance lorsqu'elles sont gaussiennes, contre l'hypothèse alternative selon laquelle les erreurs sont corrélées :

$$\begin{aligned} H_0 &: E(UU') = \sigma^2 I_n \\ H_1 &: E(UU') = \sigma^2 \Gamma \quad \Gamma \neq I_n \end{aligned} \tag{1-2}$$

Dans ce cas, le test usuel de  $H_0$ , "approximativement optimal" pour des erreurs autocorrélées d'ordre un (voir exemple [7]), est fondé sur la statistique

$$\frac{\sum_{i=2}^n (\hat{U}_i - \hat{U}_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^n (\hat{U}_i - \bar{\hat{U}})^2} \quad \text{où} \quad \bar{\hat{U}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{U}_i .$$

Pour résoudre le problème de la tabulation, la solution classique est celle de DURBIN et WATSON ([8], [9], [10]). Elle nécessite l'introduction d'une région de

non conclusion ; on peut, dans ce cas, reprendre les calculs exacts ou approchés ([10]), ou modifier le principe de la méthode. Ce sont ces dernières techniques qui sont étudiées ici.

## 2 - LES RESIDUS MODIFIES

L'idée est de remplacer le vecteur des résidus BLUE  $\hat{U} = MU$  par un autre vecteur T, dit de résidus modifiés, ayant une matrice de variances-covariances indépendante de X, ce qui permet de résoudre le problème de tabulation.

### 2.1. Les résidus BLUF (Best Linear Unbiased Fixed) :

ABRAHAMSE et KOERTS [3] recherchent une approximation W pour U qui soit :

- a) linéaire (donc normale) :  $W = B'Y$  où B est une matrice non stochastique
- b) sans biais :  $\forall \beta \in \mathbb{R}^k$ ,  $E(W) = E(B'Y) = B'X\beta = 0$  ce qui implique  $B'X = 0$  et donc  $B'Y = B'U$
- c) de matrice de variances-covariances sous  $H_0$  égale à  $\sigma^2\Omega$ , où  $\Omega$  est fixée a priori (indépendamment de X)
- d) la meilleure (sous  $H_0$ ) dans la classe des statistiques vérifiant a,b et c en ce sens que :
 

sous les contraintes b et c,	(2-1)
B minimise $\text{tr var}(W-U)$ calculée sous $H_0$	

La solution de (2-1) est la suivante ([3], [7]) avec  $\Omega = KK'$  et  $K'K = I_{n-k}$  :

$$W = B'Y = K(K'MK)^{-1/2} K'MY \quad (2-2)$$

Reste à choisir  $\Omega$  (ou K) pour obtenir des résidus modifiés les meilleurs possibles. Cette question est discutée en détail dans [7]. L'idée essentielle est que  $\Omega$  doit approcher M : puisque  $\Omega$  est fixée et M dépend des variables explicatives, il semble naturel de choisir la matrice  $\Omega$  pour qu'elle soit proche "en moyenne" des matrices M que l'on peut observer. DUBBELMAN [7] part de là pour un choix empirique de  $\Omega$  (pour des séries économiques) et vérifie, rejoignant une remarque de HANNAN, qu'on se place dans un cas en général favorable en prenant pour colonnes de K les (n-k) vecteurs propres normés associés aux (n-k) plus grandes valeurs propres de la matrice A de dimension  $n \times n$  définie par ses éléments :

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j=1 \text{ ou } i=j=n \\ 2 & \text{si } i=j \text{ et } i \neq 1, i \neq n \\ -1 & \text{si } |i-j| = 1 \\ 0 & \text{si } |i-j| > 1 \end{cases}$$

On peut aussi, dans chaque cas, choisir pour colonnes de K les vecteurs propres normés de A les plus appropriés. On sélectionne ainsi un vecteur de résidus BLUF parmi les  $C_n^k$  possibles selon une procédure décrite et discutée en [7].

2.2 - Les résidus BLUS (Best Linear Unbiased Scalar) :

Lorsque  $K = J = \begin{bmatrix} 0_{k \times (n-k)} \\ I_{n-k} \end{bmatrix}$  dans (2-2), on a

$$W = J(J'MJ)^{-1/2} J'MY = \begin{bmatrix} 0_k \\ U^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_k \\ C'U \end{bmatrix} \text{ avec } CC' = I_{n-k}$$

où  $U^* \in \mathbb{R}^{n-k}$  est le vecteur des résidus BLUS proposé par THEIL ([23], [24]) qui semble avoir été le premier à introduire des résidus modifiés.

2.3 - Les résidus BAUS (Best Adjusted Unbiased Scalar) :

HILDRETH [19] introduit une perturbation sur les résidus BLUE au moyen d'une variable aléatoire artificielle afin d'obtenir un vecteur de résidus de la forme  $R = sD\varepsilon + GY$  ayant une matrice de variances-covariances scalaire et où :

D et G sont des matrices non stochastiques de dimensions respectives  $n \times k$  et  $n \times n$

$$s^2 = \frac{U'U}{n-k} \text{ est l'estimateur usuel de } \sigma^2$$

$\varepsilon$  est un vecteur aléatoire simulé, à valeurs dans  $\mathbb{R}^k$ , indépendant de U et de loi  $N_{\mathbb{R}^k}(0, I_k)$  ; alors

$$E(s\varepsilon) = E(s) E(\varepsilon) = 0$$

$$\text{var}(s\varepsilon) = E(s^2 \varepsilon \varepsilon') = E(s^2) E(\varepsilon \varepsilon') = \sigma^2 I_k$$

Il reste à faire un choix convenable des matrices D et G de telle façon que :

a) le vecteur  $GY$  ne dépend pas de  $\beta$  : or  $\forall \beta \in \mathbb{R}^k$ ,  $GY = GX\beta + GU$ , il faut donc que  $GX = 0$  d'où  $GY = GU$

b)  $\text{var}(R) = \sigma^2 I_n$  : on devra donc avoir  $DD' + GG' = I_n$

c)  $R$  soit optimum au sens suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{sous les contraintes a et b,} \\ (D,G) \text{ minimise } \text{tr var}[R-U] \text{ calculée sous } H_0. \end{array} \right. \quad (2-3)$$

La solution de (2-3) est la suivante ([19]) :

$$G = I - X(X'X)^{-1} X' = M$$

$$D = X(X'X)^{-1/2}$$

$$\text{d'où : } R = MY + sX(X'X)^{-1/2} \epsilon$$

$$\text{ou bien : } R = MU + \sqrt{\frac{U'MU}{n-k}} X(X'X)^{-1/2} \epsilon$$

Pour simplifier l'exposé et éventuellement les calculs, notons que si  $V$  est un vecteur aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  de loi  $N_{\mathbb{R}^n}(0, I_n)$ , alors  $X(X'X)^{-1} X'V$  et  $X(X'X)^{-1/2} \epsilon$  ont même loi (normale centrée de variance  $H$  avec  $H = X(X'X)^{-1} X'$ ). On posera donc :

$$R = MU + \sqrt{\frac{U'MU}{n-k}} HV \quad (2-4)$$

*Remarques sur le vecteur des résidus NBAUS*

1°/ Nous remarquons que ce vecteur est facile à calculer, par rapport aux vecteurs BLUS et BLUF, surtout sous la forme (2-4). La génération de  $V$  sur ordinateur est très simple et  $MU$  et  $s^2$  sont nécessairement calculés dans toute étude de régression.

2°/ Sa loi est difficile à déterminer, aussi bien sous l'hypothèse nulle que sous l'hypothèse alternative, ce qui complique le calcul de la puissance des tests associés et même des points significatifs. En supposant à titre d'approximation, comme l'a fait WARD [26], que la loi de  $R$  est normale, nous pouvons avoir des résultats un peu loin de la réalité : voir ci-dessous § 5.

#### 2.4.- Les résidus NBAUS (Normal Best Ajusted Unbiased Scalar)

CAUSSINUS [5] a proposé pour le vecteur  $U$  une approximation qui aura une loi normale à  $n$  dimensions de matrice de variances-covariances scalaire en modifiant le vecteur des résidus  $\hat{U}$  par l'utilisation d'un autre vecteur aléatoire simulé  $V$  de loi

$N_{\mathbb{R}^n}(0, I_n)$ . Le nouveau vecteur est :

$$C = HV + \frac{\|MV\|}{\|MU\|} MU \quad (2-5)$$

*Remarques sur les résidus NBAUS :*

1°/ Leur calcul est assez simple.

2°/ Leur distribution sous l'hypothèse nulle est gaussienne, ce qui n'est pas le cas pour les résidus BAUS et peut donc constituer une amélioration.

3°/ Cependant, la loi de C est compliquée sous l'hypothèse alternative.

### 3 - DISTRIBUTION DU RAPPORT DE DEUX FORMES QUADRATIQUES DE V.A. NORMALES :

Pour tester  $H_0$  contre  $H_1$  (cf. (1-2)), nous utiliserons une statistique convenable du type suivant :

$$d(T) = \frac{T'PT}{T'QT} \quad (3-1)$$

où

$\mathcal{L}(T) = N_{\mathbb{R}^n}(0, \sigma^2 Z)$  ; P, Q et Z sont des matrices carrées réelles symétriques d'ordre n ; de plus Q et Z sont définies positives.

La distribution de la statistique d(T) s'étudie au moyen de la fonction de répartition :

$$F(x) = P[d(T) \leq x] = P[T'(P-xQ)T \leq 0] = P\left[\sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i^2 \leq 0\right] \quad (3-2)$$

$(\lambda_i)_{i=1}^n$  sont les valeurs propres de  $Z^{1/2}(P-xQ)Z^{1/2}$

$(\xi_i^2)_{i=1}^n$  sont des variables aléatoires indépendantes, dont chacune est distribuée suivant un  $\chi^2$  à un degré de liberté. Il suffit d'appliquer la méthode d'IMHOF [20] pour le calcul de (3-2). Il est clair que le résultat dépend exclusivement des  $(\lambda_i)_{i=1}^n$ .

### 4 - PUISSANCES DES TESTS ENVISAGES :

Dans ce qui suit,  $(\xi_i^2)_{i=1}^n$  désigne toujours une suite de n v.a.r. indépendantes chacune suivant une loi de  $\chi^2$  à un degré de liberté. Il suffit dans chaque cas de mettre en évidence la valeur des  $(\lambda_i)_{i=1}^n$  introduits ci-dessus.

a) Test fondé sur les résidus BLUE

Il s'agit du test fondé sur :

$$d(\hat{U}) = \frac{\hat{U}'P\hat{U}}{\hat{U}'Q\hat{U}} = \frac{U'MPMU}{U'MQMU}$$

Alors la puissance que nous notons par  $\Pi(\Gamma)$  est une fonction de  $\Gamma$  (voir (1-2)) :

$$\Pi(\Gamma) = P_{\Gamma}[d(\hat{U}) \leq d^{\alpha}] = P_{\Gamma} \left[ \sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i^2 \leq 0 \right].$$

$d^{\alpha}$  est le point significatif correspondant au niveau  $\alpha$  (c'est-à-dire défini par  $\Pi(I_n) = \alpha$ ) ; rappelons qu'il dépend de la matrice  $X$ , ce qui fait la difficulté d'utilisation de ce test.  $(\lambda_i)_{i=1}^n$  sont ici les valeurs propres de la matrice symétrique :

$$\Gamma^{1/2} M(P - d^{\alpha} Q) M\Gamma^{1/2}$$

puisque  $Z = M\Gamma M$ .

b) Test fondé sur les résidus BLUF

On utilise ici  $W = B'U$

$$d'où \quad \Pi(\Gamma) = P_{\Gamma}[d(W) \leq d^{\alpha}] = P_{\Gamma} \left[ \sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i^2 \leq 0 \right]$$

$(\lambda_i)_{i=1}^n$  sont ici les valeurs propres de la matrice symétrique :

$$\Gamma^{1/2} B(P - d^{\alpha} Q) B' \Gamma^{1/2}$$

puisque  $V = B'\Gamma B$  ;  $d^{\alpha}$  est déterminé par  $\Pi(I_n) = \alpha$  et dépend de  $B$ , c'est-à-dire du choix de  $\Omega$ .

c) Test fondé sur les résidus BLUS

On considère maintenant  $U^* = C'U$

$$d'où \quad \Pi(\Gamma) = P_{\Gamma}[d(U^*) \leq 0] = P_{\Gamma} \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i^2 \leq 0 \right)$$

$(\lambda_i)_{i=1}^{n-k}$  sont ici les valeurs propres de la matrice symétrique :

$$\Gamma^{1/2} C(P - d^{\alpha} Q) C' \Gamma^{1/2}$$



d) Test fondé sur les résidus BAUS

On utilise 
$$R = MU + \sqrt{\frac{\widehat{U}'\widehat{MU}}{n-k}} HV$$

On a 
$$\text{Var}(R) = E(RR') = \sigma^2 (H + M\Gamma M)$$

Donc, en supposant comme WARD [26], à titre d'approximation, que le vecteur R est gaussien :

$$\Pi(\Gamma) = P_{\Gamma} [d(R) \leq d^{\alpha}] = P_{\Gamma} \left[ \sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i^2 \leq 0 \right]$$

$(\lambda_i)_{i=1}^n$  sont ici les valeurs propres de

$$(H + M\Gamma M)^{1/2} (P - d^{\alpha} Q) (H + M\Gamma M)^{1/2}$$

e) Test fondé sur les résidus NBAUS

On considère 
$$C = HV + \frac{\|MV\|}{\|MU\|} MU$$

La statistique d(T) étant homogène, on peut remplacer C par  $C_1 = \|MU\|HV + \|MV\| MU$ .  
On a  $E(C_1) = 0$ . Calculons  $\text{Var}(C_1)$ .

$$\begin{aligned} \text{Var}(C_1) &= E(C_1 C_1') = E \left[ (\|MU\| HV + \|MV\| MU) (\|MU\|HV + \|MV\| MU)' \right] \\ &= E(\|MU\|^2 HVV'H) + E(\|MU\| \|MV\| HV U'M) + \\ &\quad E(\|MV\| \|MU\| MUV'H) + E(\|MV\|^2 MUU'M) \\ &= E(\|MU\|^2) E(HVV'H) + E(\|MV\|^2) E(MUU'M) \end{aligned}$$

car U et V sont indépendantes ainsi que MV et HV (puisque  $\mathcal{L}(V) = N_{\mathbb{R}^n}(0, I_n)$ ) et  $E(HV) = 0$ .

De plus

$$\begin{aligned} E(\|MU\|^2) &= E(U'MU) = \text{tr} E(UU'M) = \sigma^2 \text{tr}(\Gamma M) \\ E(HVV'H) &= H \\ E(\|MV\|^2) &= n - k \\ E(MUU'M) &= \sigma^2 M\Gamma M \end{aligned}$$

donc

$$\text{var}(C_1) = \sigma^2 [ H \text{tr}(\Gamma M) + (n - k) M\Gamma M ]$$

Approchons la loi de  $C_1$  par une loi normale de même moyenne et même variance.  
Alors, à cette approximation près :

$$\Pi(\Gamma) \approx P_{\Gamma} [d(C) \leq d^{\alpha}] = P \left[ \sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i^2 \leq 0 \right].$$

$(\lambda_i)_{i=1}^n$  sont ici les valeurs propres de la matrice symétrique :

$$[H \operatorname{tr}(\Gamma M) + (n-k)M\Gamma M]^{1/2} (P - d^\alpha Q) [H \operatorname{tr}(\Gamma M) + (n-k)M\Gamma M]^{1/2}$$

Dans ces deux derniers cas (d et e),  $d^\alpha$  prend la même valeur,  $\Pi(I_n)$  s'exprimant en fonction des valeurs propres de  $(P - d^\alpha Q)$ .

## 5 - APPLICATION : QUELQUES VALEURS NUMÉRIQUES DE PUISSANCES

Nous allons étudier le cas particulier dans lequel les erreurs  $U_1, U_2 \dots U_n$  dans (1-1) sont engendrées par un processus de Markov stationnaire autorégressif du premier ordre :

$$U_t = \rho U_{t-1} + E_t, \quad t \in \mathbb{Z} \quad (5-1)$$

où  $|\rho| < 1$  et les  $E_t, t \in \mathbb{Z}$ , sont mutuellement indépendantes de même loi  $N_{\mathbb{R}}(0, \sigma^2)$  ; de plus  $E_t$  est indépendant de  $U_{t-i}$  pour tout entier  $i > 0$ . Ainsi, la matrice  $\Gamma$  de variances-covariances est dans ce cas :

$$\operatorname{var}(U) = E(UU') = \sigma^2 \Gamma(\rho)$$

où  $\Gamma(\rho)$  est la matrice  $n \times n$  d'éléments

$$\Gamma_{ij}(\rho) = \frac{1}{1-\rho^2} \rho^{|i-j|}$$

On considère ici la statistique de test suivante :

$$d(T) = \frac{T'PT}{T'QT} = \frac{\sum_{i=2}^n (T_i - T_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^n (T_i - \bar{T})^2}$$

où

$$\bar{T} = \frac{\sum_{i=1}^n T_i}{n}$$

c'est-à-dire :

$$Q = I_n - \frac{\mathbf{1}\mathbf{1}'}{n} \quad \mathbf{1}' = (1, 1, \dots, 1)$$

$$P = A \quad (\text{voir la définition de } A \text{ au paragraphe 2.1}).$$

Nous donnons quelques résultats numériques pour les puissances des tests étudiés en supposant que le vecteur des résidus BAUS est gaussien sous les hypothèses nulle et alternative et que le vecteur des résidus NBAUS est gaussien sous l'hypothèse alternative. Des simulations ont été faites pour estimer les puissances des tests utilisant ces deux derniers vecteurs (ainsi que le niveau du test fondé sur les résidus BAUS) ; elles sont basées sur 2000 tirages précisant ainsi les résultats de [4].

Premier exemple

Données de KLEIN ([26], p. D-8)  $n = 21$ ,  $k = 3$

Nous donnons la puissance du test fondé sur  $\hat{U}$  uniquement pour cet exemple à cause des calculs assez lourds qu'elle demande.

Points significatifs

Niveau	BLUE	BLUS	BLUF	BAUS et NBAUS
0.025	1.376	1.138	1.415	1.194
0.050	1.501	1.266	1.538	1.315

Puissances

pour le niveau  $\alpha = 0.025$

$\rho$	BLUE	BLUS	BLUF	B A U S		N B A U S	
				Approchée	Simulée	Approchée	Simulée
0.0	0.0250	0.0250	0.0250	0.0250	0.0200	0.0250	
0.1	0.0541	0.0465	0.0538	0.0478	0.0445	0.0470	0.0505
0.2	0.1062	0.0834	0.1047	0.0876	0.0785	0.0862	0.0855
0.3	0.1870	0.1416	0.1830	0.1508	0.1460	0.1498	0.1535
0.4	0.2947	0.2240	0.2866	0.2402	0.2305	0.2412	0.2420
0.5	0.4183	0.3273	0.4048	0.3506	0.3345	0.3557	0.3490
0.6	0.5415	0.4410	0.5222	0.4695	0.4570	0.4803	0.4630
0.7	0.6502	0.5512	0.6254	0.5817	0.5670	0.5986	0.5730
0.8	0.7367	0.6455	0.7068	0.6754	0.6585	0.6979	0.6685
0.9	0.7980	0.7149	0.7637	0.7435	0.7250	0.7701	0.7315

pour le niveau  $\alpha = 0.050$

$\rho$	BLUE	BLUS	BLUF	B A U S		N B A U S	
				Approchée	Simulée	Approchée	Simulée
0.0	0.0500	0.0500	0.0499	0.0501	0.0465	0.0501	
0.1	0.0986	0.0875	0.0979	0.0898	0.0860	0.0885	0.0920
0.2	0.1757	0.1458	0.1735	0.1524	0.1415	0.1504	0.1475
0.3	0.2812	0.2282	0.2763	0.2412	0.2365	0.2398	0.2395
0.4	0.4058	0.3321	0.3972	0.3522	0.3400	0.3534	0.3460
0.5	0.5336	0.4480	0.5209	0.4740	0.4590	0.4795	0.4685
0.6	0.6492	0.5626	0.6326	0.5914	0.5790	0.6021	0.5845
0.7	0.7432	0.6638	0.7234	0.6923	0.6900	0.7078	0.6885
0.8	0.8133	0.7441	0.7909	0.7703	0.7525	0.7897	0.7530
0.9	0.8610	0.8003	0.8363	0.8241	0.8130	0.8460	0.8125

Deuxième exemple

Données de SATO (voir [22], p. 203)

n = 15 k = 3

Points significatifs

Niveau	BLUS	BLUF	BAUS et NBAUS
0.01	0.828	1.252	0.922
0.05	1.128	1.543	1.205

Puissances*pour le niveau 0.01*

$\rho$	BLUS	BLUF	B A U S		N B A U S	
			approchée	simulée	approchée	simulée
0.0	0.0100	0.0100	0.0100	0.0070	0.0100	
0.1	0.0174	0.0179	0.0167	0.0100	0.0164	0.0130
0.2	0.0297	0.0303	0.0280	0.0225	0.0274	0.0250
0.3	0.0495	0.0484	0.0465	0.0380	0.0460	0.0415
0.4	0.0797	0.0723	0.0752	0.0625	0.0752	0.0700
0.5	0.1225	0.1001	0.1166	0.1010	0.1176	0.1085
0.6	0.1778	0.1284	0.1705	0.1585	0.1730	0.1625
0.7	0.2413	0.1528	0.2399	0.2065	0.2370	0.2115
0.8	0.3043	0.1693	0.2956	0.2715	0.3007	0.2765
0.9	0.3540	0.1758	0.3465	0.3315	0.3518	0.3320

*pour le niveau 0.05*

$\rho$	BLUS	BLUF	B A U S		N B A U S	
			approchée	simulée	approchée	simulée
0.0	0.0501	0.0500	0.0499	0.0380	0.0499	
0.1	0.0781	0.0786	0.0772	0.0580	0.0763	0.0630
0.2	0.1181	0.1168	0.1164	0.1005	0.1151	0.1085
0.3	0.1720	0.1631	0.1698	0.1525	0.1687	0.1635
0.4	0.2397	0.2138	0.2371	0.2175	0.2371	0.2225
0.5	0.3181	0.2634	0.3152	0.2955	0.3167	0.3000
0.6	0.4010	0.3062	0.3975	0.3770	0.4007	0.3815
0.7	0.4804	0.3375	0.4762	0.4550	0.4805	0.4620
0.8	0.5477	0.3550	0.5433	0.5190	0.5479	0.5220
0.9	0.5948	0.3590	0.5912	0.5710	0.5953	0.5705

Troisième exemple

Données de HENSHAW (voir [18], p.652)

 $n = 16, k = 5$ Points significatifs

Niveau	BLUS	BLUF	BAUS et NBAUS
0.01	0.792	1.663	0.949
0.05	1.097	1.935	1.227

Puissances*pour le niveau  $\alpha = 0.01$* 

$\rho$	BLUS	BLUF	B A U S		N B A U S	
			approchée	simulée	approchée	simulée
0.0	0.0100	0.0100	0.0101	0.0070	0.0101	
0.1	0.0142	0.0136	0.0146	0.0135	0.0143	0.0155
0.2	0.0200	0.0178	0.0213	0.0245	0.0208	0.0300
0.3	0.0278	0.0224	0.0311	0.0255	0.0304	0.0280
0.4	0.0383	0.0271	0.0448	0.0395	0.0443	0.0430
0.5	0.0515	0.0313	0.0633	0.0625	0.0632	0.0635
0.6	0.0669	0.0345	0.0869	0.0715	0.0874	0.0785
0.7	0.0826	0.0367	0.1152	0.1040	0.1164	0.1065
0.8	0.0957	0.0380	0.1471	0.1340	0.1485	0.1320
0.9	0.1030	0.0394	0.1811	0.1665	0.1819	0.1710

*pour le niveau  $\alpha = 0.05$* 

$\rho$	BLUS	BLUF	B A U S		N B A U S	
			approchée	simulée	approchée	simulée
0.0	0.0501	0.0512	0.0500	0.0435	0.0500	
0.1	0.0671	0.0655	0.0687	0.0670	0.0678	0.0710
0.2	0.0889	0.0805	0.0935	0.0915	0.0920	0.1005
0.3	0.1160	0.0950	0.1250	0.1190	0.1235	0.1245
0.4	0.1483	0.1079	0.1635	0.1590	0.1625	0.1640
0.5	0.1849	0.1181	0.2081	0.1930	0.2079	0.2025
0.6	0.2232	0.1251	0.2570	0.2285	0.2576	0.2255
0.7	0.2598	0.1283	0.3077	0.2905	0.3086	0.2930
0.8	0.2899	0.1285	0.3578	0.3225	0.3578	0.3215
0.9	0.3089	0.1287	0.4056	0.3845	0.4026	0.3765

### *Discussion*

a) Le premier exemple :

Cet exemple utilisé par DUBBELMAN [7] paraît idéal pour illustrer l'avantage des résidus BLUF dans certains cas. En effet la puissance du test utilisant ces résidus est grande par rapport à celle donnée par les résidus BLUS, BAUS et NBAUS.

Les résidus BAUS et NBAUS donnent une puissance supérieure à celle donnée par les résidus BLUS.

b) Le deuxième exemple :

Cet exemple paraît moins favorable aux résidus BLUF (au moins dès que  $\rho$  est assez grand) ; ils donnent une faible puissance par rapport aux autres résidus, qui manifestent des performances voisines. Cependant, il convient de noter que les résidus BLUF sélectionnés (voir fin du paragraphe 2.1.) conduisent ici à des résultats bien meilleurs (par exemple, la puissance est .625 pour  $\alpha = 0.05$  et  $\rho = 0.8$  : voir [7] p. 97).

c) Le troisième exemple :

C'est un exemple moins favorable aux résidus BLUS et BLUF à la fois. Pour les premiers, c'est sans doute à cause d'une grande perte d'information (la négligence de 5 erreurs parmi 16) ; pour les seconds, il semble que la matrice X de cet exemple soit loin de vérifier la remarque de HANNAN (cf. 2.1.). On peut faire la même remarque que pour le deuxième exemple concernant l'emploi des résidus BLUF sélectionnés (voir [7] p. 102).

L'approximation de la puissance, en supposant la normalité, pour les résidus BAUS et NBAUS est assez bonne dans le premier exemple. Dans les deuxième et troisième exemples, elle se fait par excès ; il en est de même pour le niveau dans le cas des résidus BAUS. De plus, les écarts sont moindres pour NBAUS (cela nous suggère d'étudier la loi exacte de  $d(C)$  pour  $\rho \neq 0$ ).

En concluant et tenant compte aussi d'un certain nombre d'autres exemples traités non reportés ici, nous pouvons avancer que - de façon générale - :

- les avantages respectifs des vecteurs des résidus BLUS et BLUF dépendent beaucoup de la matrice X du modèle, ce qui semble très naturel compte tenu de leur construction. L'utilisation systématique de l'un comme de l'autre pourra conduire à des performances très hétérogènes.

- par contre, la puissance du test reste plus stable en utilisant les résidus BAUS ou NBAUS, qui n'ont pas nécessairement la meilleure performance mais ne pourraient être trop désastreux. En outre ils demandent des calculs plus simples, mais en contrepartie ils conduisent à un test stochastique.

En conclusion, les résidus NBAUS nous paraissent à conseiller à quiconque n'a pas de prévention a priori contre les tests stochastiques et n'est pas certain que ses données (matrice X) sont bien adaptées aux résidus BLUF ou ne veut pas réaliser les calculs supplémentaires que demandent les résidus BLUF sélectionnés.

N.B. Les résultats numériques concernant les résidus BLUS et BLUF coïncident avec ceux qui sont publiés par DUBBELMAN [7], mais ceux concernant les résidus BLUS et BAUS diffèrent sensiblement des résultats présentés par WARD [26] ; en effet, cet auteur n'utilise pas exactement la même statistique de test.

A ce sujet, il faut noter que ce choix peut avoir une importance non négligeable sur la puissance : en accord avec cette remarque, nous pensons qu'il conviendrait par exemple de reprendre les calculs de [6] avec un choix homogène des statistiques de test.

Nous terminerons sur un exemple de comparaison des deux statistiques les plus couramment rencontrées, et qui semblent "presque équivalentes",

$$d(T) = \frac{\sum_{i=2}^n (T_i - T_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^n (T_i - \bar{T})^2}$$

et 
$$d^*(T) = \frac{\sum_{i=2}^n T_i T_{i-1}}{\sum_{i=1}^n T_i^2}$$

cela en prenant successivement  $T = R$  et  $T = C$ .

Nous présentons les résultats pour les données de SATO (voir [22]) pour lesquelles  $n = 15$  et  $k = 3$ , pour le niveau  $\alpha = 0,05$ . Les simulations portent toujours sur 2000 tirages.

Les puissances obtenues sont :

$\rho = 0.2$	<u>d</u>		<u>d*</u>	
	approchée	simulée	approchée	simulée
BAUS	0.1164	0.1005	0.1096	0.0870
NBAUS	0.1151	0.1085	0.1084	0.1035
$\rho = 0.4$				
BAUS	0.2371	0.2175	0.2149	0.1830
NBAUS	0.2371	0.2225	0.2174	0.1985
$\rho = 0.6$				
BAUS	0.3975	0.3770	0.3549	0.3310
NBAUS	0.4007	0.3815	0.3668	0.3410
$\rho = 0.8$				
BAUS	0.5433	0.5190	0.4874	0.4445
NBAUS	0.5479	0.5220	0.5109	0.4480

Nous voyons que la puissance donnée par la statistique  $d^*$  est moindre que celle donnée par la statistique  $d$  (d'où l'usage de  $d$  dans notre étude).

*Remarque :*

L'ensemble des méthodes ci-dessus peut se généraliser pour tester l'indépendance des erreurs contre d'autres types d'alternatives, en particulier contre une autocorrélation d'ordre supérieur à un [4].

-o-o-o-o-

Nous remercions profondément Monsieur le Professeur CAUSSINUS pour ses remarques, ses conseils fructueux et l'ensemble de son aide au cours de ce travail.



BIBLIOGRAPHIE

- [1] ABBADY, F.M. (1980)  
"Règles bayésiennes optimales pour la détection de valeurs aberrantes dans le modèle linéaire, le modèle linéaire à composantes de la variance".  
Thèse, Université Paul Sabatier - Toulouse.
- [2] ABRAHAMSE, A.P.J. (1970)  
"A test on disturbance heterovariance in least-squares regression".  
Report 7013 of the econometric institute, ERASMUS UNIVERSITY, ROTTERDAM.
- [3] ABRAHAMSE, A.P.J. et J. KOERTS (1971)  
"New estimator of disturbances in regression analysis".  
J.A.S.A., 66, pp. 71-74.
- [4] BENHELLI, M. (1980)  
"Contribution à l'étude de l'autocorrélation des erreurs dans le modèle linéaire".  
Thèse, Université Paul Sabatier - Toulouse.
- [5] CAUSSINUS, H. (1980)  
"Sur l'analyse des résidus dans le modèle linéaire".  
Revue de Statistique et Analyse des Données, 3, pp. 29-39.
- [6] DENT, W.T. et CASSING, S. (1978)  
"On DURBIN's and SIM's residuals in autocorrelation test"  
Econometrica, 46, 6, pp. 1489-1492.
- [7] DUBBELMAN, C. (1978)  
"Disturbances in the linear model, estimation and hypothesis testing"  
MARTINUS NIJHOFF Social Sciences Division, Leiden - Boston.
- [8] DURBIN, J. et G.S. WATSON (1950)  
"Testing for serial correlation in least-squares regression - I"  
Biometrika, 37, pp. 409-428.

- [9 ] DURBIN, J. et G.S. WATSON (1951)  
"Testing for serial correlation in least-squares regression - II"  
Biometrika, 38, pp. 159-178.
- [10] DURBIN, J. et G.S. WATSON (1971)  
"Testing for serial correlation in least-squares regression - III"  
Biometrika, 58, pp. 1-19.
- [11] GLEJSER, H. (1969)  
"A new test for heteroscedasticity"  
J.A.S.A., 64, pp. 316-323.
- [12] GOLDFELD, S.M. et R.E. QUANDT (1965)  
"Some tests for homoscedasticity"  
J.A.S.A., 60, pp. 539-547.
- [13] HANNAN, E.J. (1960)  
"Time series analysis"  
London.
- [14] HARVEY, A.C. et G.D.A. PHILLIPS (1974)  
"A comparison of the power of some tests for heteroscedasticity in the general linear model".  
Journal of econometrics, 2, pp. 307-316.
- [15] HARVEY, A.C. (1977)  
"Testing for functional misspecification in regression analysis"  
Journal of econometrics, 6, pp. 103-119.
- [16] HEDEYAT, A. et D.S. ROBSON (1970)  
"Independent stepwise residuals for testing homoscedasticity"  
J.A.S.A., 65, pp. 1573-1581.
- [17] HEDAYAT, A., RAKTOE, B.L. et P.P. TALWAR (1977)  
"Examination and analysis for residuals : a test for detecting a monotonic relation between mean and variance in regression through the origin".  
Comm. Statist. Theor. Meth., A6(6), pp. 497-506.

- [18] HENSHAW, R.C. (1966)  
"Testing single equation least squares regression models for autocorrelated disturbances".  
Econometrika, 34, pp. 646-660.
- [19] HILDRETH, C. (1971)  
"A note on approximate regression disturbances"  
Discussion paper N° 2, Center for Economic Research, Department of Economics,  
University of Minnesota, Minneapolis, Minnesota, 11 pp.
- [20] IMHOF, P.J. (1961)  
"Computing the distribution for quadratic forms in normal variables"  
Biometrika, 48, pp. 419-426.
- [21] RAMSEY, J.B. (1969)  
"Test for specification errors in classical linear least-squares regression analysis"  
J.R.S.S., B, 31, N° 2, pp. 350-371.
- [22] SATO, R. (1970)  
"The examination of biased technical progress and the production function"  
International Economic Review, 11, pp. 179-208.
- [23] THEIL, H. (1965)  
"The analysis of disturbances in regression analysis"  
J.A.S.A., 60, pp. 1067-1079.
- [24] THEIL, H. (1968)  
"A simplification of the BLUS procedure for analysing regression disturbances"  
J.A.S.A., 63, pp. 242-251.
- [25] THEIL, H. (1971)  
"Principles of econometrics"  
New-York : John Wiley and Sons, Inc., and Amsterdam : North Holland  
Publishing Company.
- [26] WARD, L.L. (1973)  
"Is uncorrelating the residuals worth it ?"  
Thèse, Mc Gill University, Montréal.