

SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

L. SCHWARTZ

Applications p -radonifiantes, $0 < p \leq +\infty$ (suite)

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1969-1970), exp. n° 12, p. 1-6

http://www.numdam.org/item?id=SAF_1969-1970__A12_0

© Séminaire analyse fonctionnelle (dit "Maurey-Schwartz")
(École Polytechnique), 1969-1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V
Téléphone : MÉDICIS 11-77
(633)

S E M I N A I R E L . S C H W A R T Z 1 9 6 9 - 1 9 7 0

APPLICATIONS p -RADONIFIANTES, $0 < p \leq +\infty$ (Suite)

Exposé N° 12

2 Février 1970

§ 1. ELIMINATION DES HYPOTHESES D'APPROXIMATION

Proposition (XII,1;1) : Soient E,G, des Banach, u une application linéaire continue p-sommante de E dans G.

Alors elle est p-radonifiante de E dans $\sigma(G'',G')$ dans chacun des deux cas suivants :

- 1) le couple (E,E') a la propriété d'approximation métrique (exposé V, §4) ;
- 2) $p \geq 1$.

En outre, si les conditions de la proposition (XI,2;1) sont aussi réalisées, u est p-radonifiante de E dans G.

Démonstration :

1) Résulte de la proposition (V,4;1).

2) Soit d'abord $p < +\infty$. Si X est un espace topologique, ν une probabilité sur X, $L^\infty(X, \nu)$ est isométrique à $C(\tilde{X})$, où \tilde{X} est le spectre de l'algèbre de Banach L^∞ ; or $(C(\tilde{X}), C'(\tilde{X}))$ (proposition (V,4;2)) a la propriété d'approximation métrique, donc aussi $(L^\infty, (L^\infty)')$. Donc l'injection canonique $L^\infty \rightarrow L^p$, d'après 1), est p-radonifiante de L^∞ dans $\sigma((L^p)'', (L^p)')$ (et dans L^p , réflexif, si $1 < p < +\infty$). Et alors un raisonnement analogue à celui du §5 de l'exposé 11, (en remplaçant, pour $p = 1$, S par son adhérence dans $\sigma((L^1)'', (L^1)')$, c'est-à-dire par $\sigma(S'', S')$, puis G par $\sigma(G'', G')$), conduit au résultat.

Pour le cas $p = +\infty$, $E \rightarrow \sigma(G'', G')$ se factorise en passant par l'application identique de $\sigma(G'', G')$. Il suffit donc de prouver :

Lemme : Si H est un Banach, l'application identique de $\sigma(H', H)$ est ∞ -radonifiante et $\|\lambda\|_{+\infty} = \|\lambda\|_{+\infty}^*$.

Soit, en effet, λ une probabilité cylindrique sur $\sigma(H', H)$, de type $+\infty$, avec, par exemple $\|\lambda\|_{+\infty}^* = 1$. Cela veut dire que, pour tout $\xi \in H$, $\xi(\lambda)$ est portée par l'intervalle $[-\|\xi\|, +\|\xi\|]$ de \mathbf{R} , ou que λ est scalairement portée par la boule unité B' de H' . Mais alors, si w est une application linéaire continue de $\sigma(H', H)$ dans un espace vectoriel de dimension finie, $w(B')$ (compact) est l'intersection filtrante des intersections finies

de demi-espaces fermés qui le contiennent, donc $w(\lambda)$ est portée par $w(B')$; autrement dit, λ est cylindriquement portée par B' . Le théorème de Prokhorov (I,3;1) dit que λ est de Radon sur $\sigma(H',H)$, portée par $\bigcap_w w^{-1}(w(B')) = B'$ compact, donc d'ordre $+\infty$ sur $\sigma(H',H)$, avec $\|\lambda\|_{+\infty} = +1$.

Exemples : Un opérateur de Hilbert-Schmidt d'un Hilbert dans un autre est p -radonifiant pour tout $p > 0$.

L'application identique $\sigma(l^1, c^0) \rightarrow l^2$ est p -radonifiante pour tout $p > 0$. En effet, elle est p -sommante (exposé VIII) de l^1 dans l^2 , faiblement continue de $\sigma(l^1, c^0)$ dans l^2 (voir remarque page XI,3), ensuite c^0 a la propriété d'approximation métrique et l^2 est réflexif. A fortiori, bien sûr, elle est p -radonifiante de l^1 dans l^2 pour tout $p > 0$.

§ 2. CAS DES OPERATEURS NUCLEAIRES

Proposition (XII,2;1) : Un opérateur p -nucléaire à gauche d'un Banach E dans un Banach G est p -radonifiant.

D'après la définition du §3 de l'exposé IX, u est p -nucléaire à gauche si et seulement si elle se factorise par

$$E \rightarrow l^\infty \xrightarrow{\alpha} l^p \rightarrow G,$$

où α est une application diagonale $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow (\alpha_n c_n)_{n \in \mathbb{N}}$, avec

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |\alpha_n|^p < +\infty \text{ pour } p < +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0 \text{ pour } p = +\infty \text{ (en écrivant}$$

$u = \sum_n e'_n \otimes g_n, E \rightarrow l^\infty$ est définie par

$$e \rightarrow \left(\langle e, \frac{e'_n}{\|e'_n\|} \rangle \right)_{n \in \mathbb{N}}, \quad l^p \rightarrow G$$

par $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n g_n$, et $\alpha_n = \|e'_n\|$). Il suffit donc de montrer que

$l^\infty \xrightarrow{\alpha} l^p$ est p -radonifiante. Or, étant p -nucléaire, elle est p -sommante (prop. 12 de l'exposé IX). Puis $(l^\infty, l^\infty)'$ a la propriété d'approximation métrique ; l^p est réflexif pour $1 < p < +\infty$, dual séparable de Banach pour $p = 1$, donc l'application est bien p -radonifiante pour $1 \leq p < +\infty$. Pour $p = +\infty$, avec $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \in c^0$, on peut écrire $\alpha_n = \beta_n \gamma_n$, avec $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}} \in c^0$,

XII.3

$(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}} \in c^0$; donc α se factorise par :

$$l^\infty \xrightarrow{\beta} \sigma(l^\infty, l^1) \xrightarrow{\gamma} \sigma(c^0, l^1),$$

donc elle est ∞ -radonifiante de l^∞ dans $\sigma(c^0, l^1)$, donc dans c^0 par Philipps.

En fait, on aurait pu, aussi pour $p = 1$, écrire $\alpha_n = \beta_n \gamma_n$, avec $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^1$, $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}} \in c^0$, et utiliser le même raisonnement avec une factorisation

$$l^\infty \xrightarrow{\beta} \sigma((l^1)''', (l^1)') \xrightarrow{\gamma} \sigma(l^1, (l^1)'),$$

donc α est 1-radonifiante de l^∞ dans $\sigma(l^1, l^\infty)$, donc dans l^1 par Philipps ; le fait que l^1 est dual séparable de Banach n'a pas à intervenir. On pourrait même n'utiliser Philipps nulle part : si λ est cylindrique de type p sur l^∞ , $\beta(\lambda)$ est de Radon d'ordre p sur $\sigma((l^p)''', (l^p)')$, donc cylindriquement concentrée sur les boules de $(l^p)'''$; mais γ envoie les boules de $(l^p)'''$ sur des compacts de l^p , donc $\alpha(\lambda)$ est cylindriquement concentrée sur les compacts de l^p , donc de Radon d'ordre p sur l^p par Prokhorov ; et ceci vaut d'un coup pour tout $p \geq 1$).

On peut perfectionner, car α est même faiblement continue de $\sigma(l^\infty, l^1)$ dans l^p (dans c^0 pour $p = +\infty$), on peut alors appliquer la remarque qui suit le théorème (XI,1;1), et comme l^1 a la propriété d'approximation métrique, α est p -radonifiante de $\sigma(l^\infty, l^1)$ dans l^p , dans c^0 pour $p = +\infty$.

Proposition (XII,2;2) (complément à (XI,2;1) et (XII,1;1)).

Soit u une application linéaire continue 1-sommante d'un Banach E dans un Banach G . Si E est réflexif, ou si son dual fort est séparable, alors u est 1-radonifiante de E dans G .

Démonstration : Reprenons la factorisation :

$$\begin{array}{ccccc} E & \longrightarrow & L^\infty & \longrightarrow & L^1 \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & S & \longrightarrow & G \end{array}$$

L'application canonique $L^\infty \rightarrow L^1$ est intégrale ; alors, avec les hypothèses indiquées sur E , la composée $E \rightarrow (L^1)''$ est nucléaire (Grothendieck, thèse, chap. I, §4, corollaire du théorème 9, et théorème 10, page 132) ; donc elle est 1-radonifiante d'après la proposition précédente. Mais l'image de E est dans le sous-espace vectoriel fermé $S \subset L^1$ de $(L^1)''$, donc (bien que l'application $E \rightarrow S$ ne soit pas forcément nucléaire) elle est 1-radonifiante de E dans S (§5 de l'exposé XI), donc $u : E \rightarrow G$ l'est aussi.

Remarque : Si u est p -sommante, et si G est réflexif, u est p -radonifiante de E dans G pour $p \geq 1$, approximativement p -radonifiante de E dans G pour $0 < p < 1$, d'après (XI,2;1) et (XII,1;1). Si c'est E qui est réflexif, la présente proposition nous prouve que u est p -radonifiante de E dans G pour $p = 1$, et c'est vrai pour $1 < p < +\infty$ par (XI,2;1) et (XII,1;1), et pour $p = +\infty$ par le lemme du §1 (l'application identique de E est ∞ -radonifiante) ; mais pour $p < 1$, il n'y a aucun autre résultat que celui du théorème (XI,1;1), u est approximativement p -radonifiante de E dans $\sigma(G'',G')$. Même remarque pour la condition relative à E , avec $p < +\infty$.

§ 3. RECAPITULATION DES RESULTATS OBTENUS

Soit $u : E \rightarrow G$ p -sommante, E, G , Banach.

- 1) Si $p = +\infty$ (ce qui signifie simplement que u est continue), elle est p -radonifiante de E dans $\sigma(G'',G')$, dans G si E ou G est réflexif ;
- 2) Si $1 < p < +\infty$, elle est p -radonifiante de E dans G ;
- 3) Si $p = 1$, elle est 1-radonifiante de E dans $\sigma(G'',G')$, dans G si E ou G est réflexif, ou si G est dual séparable de Banach, ou si E est un Banach de dual fort séparable, ou si u est nucléaire ;
- 4) Si $p < 1$, elle est approximativement p -radonifiante de E dans $\sigma(G'',G')$; on peut remplacer $\sigma(G'',G')$ par G si G est réflexif ou dual séparable de Banach, et supprimer approximativement si le couple (E,E') a la propriété d'approximation métrique.

§ 4. PASSAGE DE p à $q \geq p$

On sait que, si $u : E \rightarrow G$ est p -sommante, elle est q -sommante pour $q \geq p$ (prop. (VII,2;1)). On a donc un énoncé analogue pour les applications approximativement radonifiantes de E dans $\sigma(G'',G')$. Qu'en est-il si on veut remplacer G'' par G , ou supprimer approximativement ?

Proposition (XII,4;1) :

- 1) Si u est approximativement p -radonifiante de E dans G , elle est approximativement q -radonifiante de E dans G pour $q \geq p$;
- 2) si u est p -radonifiante de E dans G , elle est aussi q -radonifiante de E dans G pour $q \geq p$.

Démonstration :

Nous ne pourrions démontrer 2) que plus tard ; montrons 1). Soit donc λ cylindrique de type q approximable sur E . Alors $u(\lambda)$ a une image de Radon d'ordre q sur $\sigma(G'',G')$. Mais λ est a fortiori de type p approximable, donc $u(\lambda)$ est déjà de Radon (et d'ordre p) sur G . Mais dire qu'une probabilité de Radon $\nu = u(\lambda)$ sur G a une image $\bar{\nu}$ d'ordre q dans $\sigma(G'',G')$, cela veut exactement dire qu'elle est déjà d'ordre q sur G (car, pour q fini par exemple,

$$\int_{G''} \|x''\|^q d\bar{\nu}(x'') = \int_G \|x\|^q d\nu(x)$$

Remarque : Si u est p -radonifiante de E dans $\sigma(G'',G')$, j'ignore si elle est q -radonifiante de E dans $\sigma(G'',G')$ pour $q \geq p$.

§ 5. QUELQUES PROBLEMES OUVERTS

- 1) Peut-on supprimer toutes les hypothèses d'approximation ? Même dans des cas particuliers comme la remarque suit (XII,4;1), je l'ignore.
- 2) Pour tout $p_0 \geq 1$, on connaît des applications qui sont p -radonifiante pour $p > 1$ et ne le sont pas pour $p < 1$ (elles peuvent l'être ou ne pas

XII.6

l'être pour $p = p_0$). Rien de tel n'est connu pour $p_0 < 1$: si une application est p -radonifiante pour un $p < 1$, dans tous les cas connus, elle l'est pour tout $p > 0$ (et même pour $p = 0$, suivant ce qui sera vu plus tard). Avec des quasi-Banach au lieu de Banach on a, au contraire, des exemples de coupure pour tout $p_0 > 0$.

- 3) Soit u approximativement p -radonifiante de E dans $\sigma(G'', G')$; si $p \geq 1$, elle est toujours, pour $q > p$, approximativement q -radonifiante de E dans G lui-même. (Car, pour q fini ≥ 1 , c'est automatiquement vrai, donc pour q infini d'après 1) de (XII,4;1)). Ceci subsiste-t-il pour $p < 1$? Toute application approximativement 0-radonifiante de E dans $\sigma(G'', G')$ est-elle approximativement q -radonifiante de E dans G pour tout $q > 0$? Dans tous les exemples connus une application approximativement 0-radonifiante de E dans $\sigma(G'', G')$ l'est en fait de E dans G lui-même.
- 4) Dans tous les cas connus, une application 1-radonifiante de E dans G réflexif est 0-radonifiante. Est-ce un théorème ?
-