J. BOURGAIN

Un espace non Radon-Nikodým sans arbre diadique

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1978-1979), exp. nº 29, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1978-1979____A25_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E

D ' A N A L Y S E   F O N C T I O N N E L L E

1978-1979

UN ESPACE NON RADON-NIKODÝM SANS ARBRE DIADIQUE

J. BOURGAIN

(Vrije Universiteit-Bruxelles et Paris VI)

Exposé No XXIX 1er Juin 1979

Dans [3], Huff et Morris montrent que si un espace X ne possède pas la propriété de Radon-Nikodým (RNP), il existe un sous-ensemble borné $A \neq \emptyset$ de X et $\varepsilon > 0$, tel que

$$x \in C(A \setminus B(x,\varepsilon)) \quad \text{pour tout } x \in A \quad ,$$

où $B(x,\varepsilon) = \{y \in X \; ; \; \|x - y\| < \varepsilon\}$.
Appelons un pareil ensemble A un arbre.

Un arbre diadique dans X est un système $\{x_{n,k} \; ; \; n \in \mathbb{N} \, , \; 1 \leq k \leq 2^n\}$ borné de points de X vérifiant les conditions suivantes :

1. $x_{n,k} = \frac{1}{2} x_{n+1,2k-1} + \frac{1}{2} x_{n+1,2k}$;

2. $\inf\limits_{n,k} \|x_{n+1,2k-1} - x_{n+1,2k}\| > 0$.

Stegall (cf. [5]) a montré que tout espace <u>dual</u> non RNP contient un arbre diadique et il pose le problème en général. Dans [1] on obtient certaines solutions partielles. Le but de cet exposé est de démontrer la chose suivante :

<u>Théorème</u> : Il existe des sous-espaces de L^1 non RNP et sans arbre diadique.

En fait, notre technique permet de construire des espaces non-RNP tout en évitant tout "type" d'arbres préalablement fixé. Nous posons

$$d(f,g) = \inf\{\varepsilon > 0 \; ; \; \mathbb{P}[\,|f - g| \geq \varepsilon] \leq \varepsilon\} \quad ,$$

ce qui donne la distance dans L^0.

<u>Lemme 1</u> : Pour tout sous-espace de dimension finie E de L^1 et $\varepsilon > 0$ on se donne un nombre $\delta(E,\varepsilon) > 0$. Soit (ε_n) une suite fixée de nombres positifs. Il existe alors une suite croissante (E_n) de sous-espaces de dimension finie de L^1 telle que $E = \overline{\cup E_n}$ a les propriétés suivante

1. E n'est pas RNP ;

2. Pour tout n et pour tout $f \in E$, $\|f\|_1 \leq 1$, il existe $g \in E_n$ tel que $\|g\|_1 \leq 1$ et $d(f,g) \leq \delta(E_n,\varepsilon_n)$.

On utilise les deux lemmes suivants :

Lemme 2 : Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe des fonctions $f_1,\dots,f_n$ dans L^1 telles que

1. $\|f_k\|_1 \le 1$;

2. $\|f_k - 1\|_1 \ge 1$;

3. $\|1 - \frac{1}{n}(f_1 + \dots + f_n)\|_1 \le \varepsilon$;

4. si $f \in [f_1,\dots,f_n]$ et $\|f\|_1 \le 1$, il existe une fonction constante $a \in [0,1]$, telle que $d(f,a) \le \varepsilon$.

Ce résultat est une amélioration due à H. Rosenthal [2] d'un lemme de Roberts [4]. Pour les f_k, on peut considérer des copies indépendantes de la valeur absolue de la variable p-stable, en prenant p suffisamment proche de 1.

Lemme 3 : Soit E un sous-espace de dimension finie de L^1. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si $f \in E$, $g \in L^1$, $\|g\|_1 \le 1$ et $d(f,g) \le \delta$, alors $\|f\|_1 \le 1 + \varepsilon$.

Démonstration : Soit $n = \dim E$ et $e_1,\dots,e_n$ une base de E telle que

$$\|\sum_k a_k e_k\|_1 \ge \max(|a_k| ; k)$$

pour tous scalaires $a_1,\dots,a_n$.
Soit alors $\delta < \varepsilon^2$ tel que $\max_k \int_A |e_k| \le \frac{\varepsilon^2}{n}$ si $\mathbb{P}(A) \le \delta$. Supposons maintenant $f = \sum_k a_k e_k$ dans E, $\|g\|_1 \le 1$ et $d(f,g) < \delta$. Donc $\mathbb{P}(A) < \delta$ si $A = [\,|f - g| \ge \delta]$. On obtient

$$\|f\|_1 = \int_A |f| + \int_{A^c} |f| \le \sum_k |a_k| \int_A |e_k| + \|g\|_1 + \delta \le$$
$$\varepsilon^2 \max(|a_k| ; k) + 1 + \delta \le \varepsilon^2 \|f\|_1 + 1 + \delta \quad .$$

D'où $$\|f\|_1 \le \frac{1+\delta}{1-\varepsilon^2} < \frac{1+\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} < 1 + \varepsilon \quad .$$

A partir de ces lemmes, la construction du Lemme 1 est standard et on n'en explicite pas les détails.

Lemme 4 : Soit E un espace normé d-dimensionnel et (ξ_r, Σ_r) une martingale uniformément bornée par 1 à valeurs dans E sur un espace probabilisé (Ω, Σ, μ). Alors

$$\left(\sum_r \|\xi_{r+1} - \xi_r\|_1^2\right)^{1/2} \leq \sqrt{d} \quad .$$

Démonstration :

a) Si E est un Hilbert, on a $\sum_r \|\xi_{r+1} - \xi_r\|_2^2 \leq 1$. En effet, pour chaque coordonnée $i = 1,\ldots,d$, (ξ_r^i) est une martingale réelle, d'où $\|\xi_{r+1}^i - \xi_r^i\|_2^2 = \|\xi_{r+1}^i\|_2^2 - \|\xi_r^i\|_2^2$. Donc $\|\xi_{r+1} - \xi_r\|_2^2 = \|\xi_{r+1}\|_2^2 - \|\xi_r\|_2^2$, ce qui donne le résultat.

b) Soit $T : E \to \ell^2(d)$ un isomorphisme. Alors $(T\xi_r, \Sigma_r)$ est uniformément bornée par $\|T\|$ et donc par (a)

$$\sum_r \|T\xi_{r+1} - T\xi_r\|_1^2 \leq \|T\|^2$$

d'où

$$\sum_r \|\xi_{r+1} - \xi_r\|_1^2 \leq \|T\|^2 \, \|T^{-1}\|^2 \quad .$$

Puisque $\mathrm{dist}(E, \ell^2(d)) \leq \sqrt{d}$ (Banach-Mazur), la démonstration est terminée.

Lemme 5 : Soit E un sous-espace de L^1 de dimension d et $\rho > 0$. Soit (ξ_r, Σ_r) une martingale à valeurs dans L^1 telle que $\|\xi_r\|_\infty \leq 1$ et $\|\xi_r - \xi_{r+1}\|_1 \geq \rho$ pour tout r. Alors

$$\int \underset{\|\ \|_1}{\mathrm{dist}} (\xi_r(t), E)\,dt \geq \frac{\rho}{3}$$

si $r \geq \beta(d,\rho) = [36\ d\ \ \rho^{-2}] + 2$.

Démonstration : Supposons l'énoncé faux. Donc

$$\int \mathrm{dist}(\xi_r(t), E)\,dt \leq \frac{\rho}{3} \quad \text{pour un } r \geq \beta(d,\rho) \quad .$$

Soit η_r une fonction Σ_r-mesurable à valeurs dans E telle que $\|\xi_r(t) - \eta_r(t)\| = \mathrm{dist}(\xi_r(t), E)$ pour tout t. On a donc pour tout $s = 1,\ldots,r$

$$\|\eta_s\|_\infty \leq \|\eta_r\|_\infty \leq 2$$

et

$$\|\xi_s - \eta_s\|_1 \le \|\xi_r - \eta_r\|_1 \le \frac{\rho}{3}$$

si on pose

$$\eta_s = E[\eta_r \mid \Sigma_s] \quad .$$

Pour $s = 1,\ldots,r-1$ on trouve

$$\|\eta_{s+1} - \eta_s\|_1 \ge \|\xi_{s+1} - \xi_s\|_1 - \|\xi_s - \eta_s\|_1 - \|\xi_{s+1} - \eta_{s+1}\|_1 \ge \frac{\rho}{3} \quad .$$

Par le lemme 4, on a

$$2\sqrt{d} \ge \left(\sum_{s=1}^{r-1} \|\eta_{s+1} - \eta_s\|_1^2\right)^{1/2} \ge \frac{1}{3}\sqrt{r-1}\,\rho \quad , \quad \text{contradiction.}$$

Le résultat suivant s'obtient de la même manière que le lemme 3.

Lemme 6 : Soit E un sous-espace de dimension finie de L^1 et $\varepsilon > 0$. Il existe alors $\gamma(E,\varepsilon) > 0$, tel que

$$\int_A |f| \le \varepsilon \|f\|_1$$

si $f \in E$ et $\mathbb{P}(A) \le \gamma(E,\varepsilon) \le \varepsilon$.

Si E est un sous-espace d-dimensionnel de L^1, on pose

$$\delta(E,\varepsilon) = 2^{-\beta(d,\varepsilon)}\,\gamma(E,\varepsilon) \quad .$$

oit $\varepsilon_n \to 0$ et prenant les sous-espaces E_n de L^1 vérifiant les conditions du Lemme 1.

Lemme 7 : L'espace $E = \overline{\bigcup E_n}$ ne contient pas d'arbre diadique.

Démonstration : Si E contient un arbre, il existe une martingale diadique (ξ_r,Σ_r) à valeurs dans E et $\rho > 0$ tel que $\sup_r \|\xi_r\|_\infty \le 1$ et $\inf_r \|\xi_r - \xi_{r+1}\|_1 \ge \rho$. On va montrer que ceci mène à une contradiction.
Posons $\sigma = \sup_r \|\xi_r\|_1$. Fixons $0 < x < \rho/3$. Choisissons r tel que $\|\xi_r\|_1 \ge \sigma - x$.
Il est clair qu'on peut trouver un entier n tel que

i. $\underset{\|\ \|_1}{\mathrm{dist}}\,(\xi_r(t),E_n) < x$ pour tout t ;

ii. $\varepsilon_n < x$.

Soit φ une fonction à valeurs dans E_n tel que $\|\xi_r(t) - \varphi(t)\|_1 < x$ pour tout t. Posons $\gamma = \gamma(E_n,\varepsilon_n)$ et $\delta = \delta(E_n,\varepsilon_n)$. En appliquant le lemme 5, on trouve

$$\int \mathrm{dist}(\xi_s(t),E_n)dt > \frac{\rho}{3}$$

pour $s = \beta(d,\rho)$, où $d = \dim E_n$.

Par l'hypothèse (2) du Lemme 1, on peut trouver une fonction η_s Σ_s-mesurable à valeurs dans E_n, telle que pour tout t

iii. $\|\eta_s(t)\|_1 \le 1$;

iv. $d(\xi_s(t),\eta_s(t)) \le \delta$.

Posons $\eta_r = E[\eta_s|\Sigma_r]$. Il est alors aisé de voir qu'on a pour tout t

$$d(\xi_r(t),\eta_r(t)) \le 2^{s-r}\,\delta \le 2^{\beta(d,\rho)}\,\delta \le 2^{\beta(d,\varepsilon_n)}\,\delta = \gamma \quad .$$

Fixons t et considérons l'ensemble $A = A_t = [\,|\xi_r(t) - \eta_r(t)| \ge \gamma]$. Alors $\mathbb{P}(A) \le \gamma$. En usant du Lemme 6, on trouve

$$\begin{aligned}
\|\eta_r(t)\|_1 &\ge \|\xi_r(t)\ \chi_{A^c}\|_1 - \gamma \\
&\ge \|\xi_r(t)\|_1 - \|\xi_r(t)\ \chi_A\|_1 - \gamma \\
&\ge \|\xi_r(t)\|_1 - \|\varphi(t)\ \chi_A\|_1 - x - \gamma \\
&\ge \|\xi_r(t)\|_1 - \varepsilon_n\|\varphi(t)\|_1 - x - \gamma \\
&\ge \|\xi_r(t)\|_1 - \varepsilon_n(1 + x) - x - \gamma
\end{aligned}$$

et donc

$$\|\eta_r\|_1 \ge \|\xi_r\|_1 - 4x \ge \sigma - 5x \quad .$$

Pour t fixé, on pose ensuite $B = B_t = [\,|\xi_s(t) - \eta_s(t)| \ge \delta]$. Alors $\mathbb{P}(B) \le \delta \le \gamma$. On obtient

$$\|\xi_s(t)\ \chi_B\|_1 \geq \|\xi_s(t) - \eta_s(t)\|_1$$

$$- \|[\xi_s(t) - \eta_s(t)]\chi_{B^c}\|_1 - \|\eta_s(t)\chi_B\|_1$$

$$\geq \|\xi_s(t) - \eta_s(t)\|_1 - \delta - \varepsilon_n$$

et

$$\|\xi_s(t)\ \chi_{B^c}\|_1 \geq \|\eta_s(t)\ \chi_{B^c}\|_1 - \delta$$

$$\geq \|\eta_s(t)\|_1 - \|\eta_s(t)\ \chi_B\|_1 - \delta$$

$$\geq \|\eta_s(t)\|_1 - \varepsilon_n - \delta \quad .$$

Donc $$\|\xi_s(t)\|_1 \geq \|\eta_s(t)\|_1 + \mathrm{dist}(\xi_s(t),E_n) - 4x$$

et par intégration

$$\sigma \geq \|\xi_s\|_1 \geq \|\eta_s\|_1 + \int \mathrm{dist}(\xi_s(t),E_n)dt - 4x$$

$$\geq \|\eta_r\|_1 + \frac{\rho}{3} - 4x \geq \sigma + \frac{\rho}{3} - 9x \quad .$$

Pour $x \to 0$, on trouve la contradiction voulue.
Ceci démontre le théorème.

REFERENCES

[1] J. Bourgain : A non-dentable set without the RN property, Studia Math. (à paraître).

[2] J. Bourgain et H.P. Rosenthal : Shur subspaces of L^1, à paraître.

[3] R. Huff et P.D. Morris : Geometric characterizations of the Radon-Nikodým property in Banach spaces, Studia Math.

[4] J.W. Roberts : Compact convex sets with no extreme points in the spaces $L^p[0,1]$ $(0 \leq p < 1)$, to appear.

[5] C. Stegall : The Radon-Nikodým property in conjugate Banach spaces, Trans. AMS 206 (1975) 213-223.
