

SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

J. BOURGAIN

Un espace non Radon-Nikodým sans arbre diadique

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1978-1979), exp. n° 29, p. 1-6

<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1978-1979__A25_0>

© Séminaire analyse fonctionnelle (dit "Maurey-Schwartz")
(École Polytechnique), 1978-1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E

D ' A N A L Y S E F O N C T I O N N E L L E

1978-1979

UN ESPACE NON RADON-NIKODÝM SANS ARBRE DIADIQUE

J. BOURGAIN

(Vrije Universiteit-Bruxelles et Paris VI)

Dans [3], Huff et Morris montrent que si un espace X ne possède pas la propriété de Radon-Nikodým (RNP), il existe un sous-ensemble borné $A \neq \emptyset$ de X et $\varepsilon > 0$, tel que

$$x \in C(A \setminus B(x, \varepsilon)) \quad \text{pour tout } x \in A \quad ,$$

où $B(x, \varepsilon) = \{y \in X ; \|x - y\| < \varepsilon\}$.

Appelons un pareil ensemble A un arbre.

Un arbre diadique dans X est un système $\{x_{n,k} ; n \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq 2^n\}$ borné de points de X vérifiant les conditions suivantes :

1. $x_{n,k} = \frac{1}{2} x_{n+1,2k-1} + \frac{1}{2} x_{n+1,2k} \quad ;$
2. $\inf_{n,k} \|x_{n+1,2k-1} - x_{n+1,2k}\| > 0 \quad .$

Stegall (cf. [5]) a montré que tout espace dual non RNP contient un arbre diadique et il pose le problème en général. Dans [1] on obtient certaines solutions partielles. Le but de cet exposé est de démontrer la chose suivante :

Théorème : Il existe des sous-espaces de L^1 non RNP et sans arbre diadique.

En fait, notre technique permet de construire des espaces non-RNP tout en évitant tout "type" d'arbres préalablement fixé.

Nous posons

$$d(f,g) = \inf\{\varepsilon > 0 ; \mathbb{P}[|f - g| \geq \varepsilon] \leq \varepsilon\} \quad ,$$

ce qui donne la distance dans L^0 .

Lemme 1 : Pour tout sous-espace de dimension finie E de L^1 et $\varepsilon > 0$ on se donne un nombre $\delta(E, \varepsilon) > 0$. Soit (ε_n) une suite fixée de nombres positifs. Il existe alors une suite croissante (E_n) de sous-espaces de dimension finie de L^1 telle que $E = \overline{\bigcup E_n}$ a les propriétés suivantes

1. E_n n'est pas RNP ;
2. Pour tout n et pour tout $f \in E$, $\|f\|_1 \leq 1$, il existe $g \in E_n$ tel que $\|g\|_1 \leq 1$ et $d(f,g) \leq \delta(E_n, \varepsilon_n)$.

On utilise les deux lemmes suivants :

Lemme 2 : Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe des fonctions f_1, \dots, f_n dans L^1 telles que

1. $\|f_k\|_1 \leq 1$;
2. $\|f_k - 1\|_1 \geq 1$;
3. $\|1 - \frac{1}{n} (f_1 + \dots + f_n)\|_1 \leq \varepsilon$;
4. si $f \in [f_1, \dots, f_n]$ et $\|f\|_1 \leq 1$, il existe une fonction constante $a \in [0, 1]$, telle que $d(f, a) \leq \varepsilon$.

Ce résultat est une amélioration due à H. Rosenthal [2] d'un lemme de Roberts [4]. Pour les f_k , on peut considérer des copies indépendantes de la valeur absolue de la variable p -stable, en prenant p suffisamment proche de 1.

Lemme 3 : Soit E un sous-espace de dimension finie de L^1 . Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si $f \in E$, $g \in L^1$, $\|g\|_1 \leq 1$ et $d(f, g) \leq \delta$, alors $\|f\|_1 \leq 1 + \varepsilon$.

Démonstration : Soit $n = \dim E$ et e_1, \dots, e_n une base de E telle que

$$\left\| \sum_k a_k e_k \right\|_1 \geq \max(|a_k|; k)$$

pour tous scalaires a_1, \dots, a_n .

Soit alors $\delta < \varepsilon^2$ tel que $\max_k \int_A |e_k| \leq \frac{\varepsilon^2}{n}$ si $\mathbb{P}(A) \leq \delta$. Supposons main-

tenant $f = \sum_k a_k e_k$ dans E , $\|g\|_1 \leq 1$ et $d(f, g) < \delta$. Donc $\mathbb{P}(A) < \delta$ si $A = [|f - g| \geq \delta]$. On obtient

$$\begin{aligned} \|f\|_1 &= \int_A |f| + \int_{A^c} |f| \leq \sum_k |a_k| \int_A |e_k| + \|g\|_1 + \delta \leq \\ &\varepsilon^2 \max(|a_k|; k) + 1 + \delta \leq \varepsilon^2 \|f\|_1 + 1 + \delta . \end{aligned}$$

D'où
$$\|f\|_1 \leq \frac{1 + \delta}{1 - \varepsilon^2} < \frac{1 + \varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2} < 1 + \varepsilon .$$

A partir de ces lemmes, la construction du Lemme 1 est standard et on n'en explicite pas les détails.

Lemme 4 : Soit E un espace normé d-dimensionnel et (ξ_r, Σ_r) une martingale uniformément bornée par 1 à valeurs dans E sur un espace probabilisé (Ω, Σ, μ) . Alors

$$\left(\sum_r \|\xi_{r+1} - \xi_r\|_1^2 \right)^{1/2} \leq \sqrt{d} .$$

Démonstration :

a) Si E est un Hilbert, on a $\sum_r \|\xi_{r+1} - \xi_r\|_2^2 \leq 1$. En effet, pour chaque coordonnée $i = 1, \dots, d$, (ξ_r^i) est une martingale réelle, d'où $\|\xi_{r+1}^i - \xi_r^i\|_2^2 = \|\xi_{r+1}^i\|_2^2 - \|\xi_r^i\|_2^2$. Donc $\|\xi_{r+1} - \xi_r\|_2^2 = \|\xi_{r+1}\|_2^2 - \|\xi_r\|_2^2$, ce qui donne le résultat.

b) Soit $T: E \rightarrow \ell^2(d)$ un isomorphisme. Alors $(T\xi_r, \Sigma_r)$ est uniformément bornée par $\|T\|$ et donc par (a)

$$\sum_r \|T\xi_{r+1} - T\xi_r\|_1^2 \leq \|T\|^2$$

d'où

$$\sum_r \|\xi_{r+1} - \xi_r\|_1^2 \leq \|T\|^2 \|T^{-1}\|^2 .$$

Puisque $\text{dist}(E, \ell^2(d)) \leq \sqrt{d}$ (Banach-Mazur), la démonstration est terminée.

Lemme 5 : Soit E un sous-espace de L^1 de dimension d et $\rho > 0$. Soit (ξ_r, Σ_r) une martingale à valeurs dans L^1 telle que $\|\xi_r\|_\infty \leq 1$ et $\|\xi_r - \xi_{r+1}\|_1 \geq \rho$ pour tout r. Alors

$$\int \text{dist}(\xi_r(t), E) dt \geq \frac{\rho}{3}$$

si $r \geq \beta(d, \rho) = [36 d \rho^{-2}] + 2$.

Démonstration : Supposons l'énoncé faux. Donc

$$\int \text{dist}(\xi_r(t), E) dt \leq \frac{\rho}{3} \text{ pour un } r \geq \beta(d, \rho) .$$

Soit η_r une fonction Σ_r -mesurable à valeurs dans E telle que $\|\xi_r(t) - \eta_r(t)\| = \text{dist}(\xi_r(t), E)$ pour tout t. On a donc pour tout $s = 1, \dots, r$

$$\|\eta_s\|_\infty \leq \|\eta_r\|_\infty \leq 2$$

et

$$\|\xi_s - \eta_s\|_1 \leq \|\xi_r - \eta_r\|_1 \leq \frac{\rho}{3}$$

si on pose

$$\eta_s = E[\eta_r \mid \Sigma_s] \quad .$$

Pour $s = 1, \dots, r-1$ on trouve

$$\|\eta_{s+1} - \eta_s\|_1 \geq \|\xi_{s+1} - \xi_s\|_1 - \|\xi_s - \eta_s\|_1 - \|\xi_{s+1} - \eta_{s+1}\|_1 \geq \frac{\rho}{3} \quad .$$

Par le lemme 4, on a

$$2\sqrt{d} \geq \left(\sum_{s=1}^{r-1} \|\eta_{s+1} - \eta_s\|_1^2 \right)^{1/2} \geq \frac{1}{3} \sqrt{r-1} \rho \quad , \quad \text{contradiction.}$$

Le résultat suivant s'obtient de la même manière que le lemme 3.

Lemme 6 : Soit E un sous-espace de dimension finie de L^1 et $\varepsilon > 0$.

Il existe alors $\gamma(E, \varepsilon) > 0$, tel que

$$\int_A |f| \leq \varepsilon \|f\|_1$$

si $f \in E$ et $\mathbb{P}(A) \leq \gamma(E, \varepsilon) \leq \varepsilon$.

Si E est un sous-espace d -dimensionnel de L^1 , on pose

$$\delta(E, \varepsilon) = 2^{-\beta(d, \varepsilon)} \gamma(E, \varepsilon) \quad .$$

oit $\varepsilon_n \rightarrow 0$ et prenant les sous-espaces E_n de L^1 vérifiant les conditions du Lemme 1.

Lemme 7 : L'espace $E = \overline{\bigcup E_n}$ ne contient pas d'arbre diadique.

Démonstration : Si E contient un arbre, il existe une martingale diadique (ξ_r, Σ_r) à valeurs dans E et $\rho > 0$ tel que $\sup_r \|\xi_r\|_\infty \leq 1$ et

$\inf_r \|\xi_r - \xi_{r+1}\|_1 \geq \rho$. On va montrer que ceci mène à une contradiction.

Posons $\sigma = \sup_r \|\xi_r\|_1$. Fixons $0 < x < \rho/3$. Choisissons r tel que $\|\xi_r\|_1 \geq \sigma - x$.

Il est clair qu'on peut trouver un entier n tel que

- i. $\text{dist}(\xi_r(t), E_n) < x$ pour tout t ;
 $\|\cdot\|_1$
- ii. $\varepsilon_n < x$.

Soit φ une fonction à valeurs dans E_n tel que $\|\xi_r(t) - \varphi(t)\|_1 < x$ pour tout t . Posons $\gamma = \gamma(E_n, \varepsilon_n)$ et $\delta = \delta(E_n, \varepsilon_n)$. En appliquant le lemme 5, on trouve

$$\int \text{dist}(\xi_s(t), E_n) dt > \frac{\rho}{3}$$

pour $s = \beta(d, \rho)$, où $d = \dim E_n$.

Par l'hypothèse (2) du Lemme 1, on peut trouver une fonction η_s Σ_s -mesurable à valeurs dans E_n , telle que pour tout t

- iii. $\|\eta_s(t)\|_1 \leq 1$;
- iv. $d(\xi_s(t), \eta_s(t)) \leq \delta$.

Posons $\eta_r = E[\eta_s | \Sigma_r]$. Il est alors aisé de voir qu'on a pour tout t

$$d(\xi_r(t), \eta_r(t)) \leq 2^{s-r} \delta \leq 2^{\beta(d, \rho)} \delta \leq 2^{\beta(d, \varepsilon_n)} \delta = \gamma .$$

Fixons t et considérons l'ensemble $A = A_t = [|\xi_r(t) - \eta_r(t)| \geq \gamma]$. Alors $\mathbb{P}(A) \leq \gamma$. En usant du Lemme 6, on trouve

$$\begin{aligned} \|\eta_r(t)\|_1 &\geq \|\xi_r(t) \chi_{A^c}\|_1 - \gamma \\ &\geq \|\xi_r(t)\|_1 - \|\xi_r(t) \chi_A\|_1 - \gamma \\ &\geq \|\xi_r(t)\|_1 - \|\varphi(t) \chi_A\|_1 - x - \gamma \\ &\geq \|\xi_r(t)\|_1 - \varepsilon_n \|\varphi(t)\|_1 - x - \gamma \\ &\geq \|\xi_r(t)\|_1 - \varepsilon_n (1 + x) - x - \gamma \end{aligned}$$

et donc

$$\|\eta_r\|_1 \geq \|\xi_r\|_1 - 4x \geq \sigma - 5x .$$

Pour t fixé, on pose ensuite $B = B_t = [|\xi_s(t) - \eta_s(t)| \geq \delta]$. Alors $\mathbb{P}(B) \leq \delta \leq \gamma$. On obtient

$$\begin{aligned}
\|\xi_s(t) \chi_B\|_1 &\geq \|\xi_s(t) - \eta_s(t)\|_1 \\
&\quad - \|[\xi_s(t) - \eta_s(t)] \chi_{B^c}\|_1 - \|\eta_s(t) \chi_B\|_1 \\
&\geq \|\xi_s(t) - \eta_s(t)\|_1 - \delta - \varepsilon_n
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\|\xi_s(t) \chi_{B^c}\|_1 &\geq \|\eta_s(t) \chi_{B^c}\|_1 - \delta \\
&\geq \|\eta_s(t)\|_1 - \|\eta_s(t) \chi_B\|_1 - \delta \\
&\geq \|\eta_s(t)\|_1 - \varepsilon_n - \delta .
\end{aligned}$$

Donc
$$\|\xi_s(t)\|_1 \geq \|\eta_s(t)\|_1 + \text{dist}(\xi_s(t), E_n) - 4x$$

et par intégration

$$\begin{aligned}
\sigma &\geq \|\xi_s\|_1 \geq \|\eta_s\|_1 + \int \text{dist}(\xi_s(t), E_n) dt - 4x \\
&\geq \|\eta_r\|_1 + \frac{\rho}{3} - 4x \geq \sigma + \frac{\rho}{3} - 9x .
\end{aligned}$$

Pour $x \rightarrow 0$, on trouve la contradiction voulue.

Ceci démontre le théorème.

REFERENCES

- [1] J. Bourgain : A non-dentable set without the RN property, *Studia Math.* (à paraître).
- [2] J. Bourgain et H.P. Rosenthal : Shur subspaces of L^1 , à paraître.
- [3] R. Huff et P.D. Morris : Geometric characterizations of the Radon-Nikodým property in Banach spaces, *Studia Math.*
- [4] J.W. Roberts : Compact convex sets with no extreme points in the spaces $L^p[0,1]$ ($0 \leq p < 1$), to appear.
- [5] C. Stegall : The Radon-Nikodým property in conjugate Banach spaces, *Trans. AMS* 206 (1975) 213-223.