CHARLES PISOT

Démonstration élémentaire du théorème des nombres premiers

Séminaire N. Bourbaki, 1952, exp. n° 20, p. 123-127
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1948-1951__1__123_0>

Séminaire BOURBAKI
(Décembre 1949)

DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE DU THÉORÈME DES NOMBRES PREMIERS

par Charles PISOT

Un certain nombre de théorèmes importants de la théorie des nombres ont été démontrés à l'aide de la théorie des fonctions analytiques ; on les classe dans ce qu'on appelle la "théorie analytique des nombres". Il a semblé longtemps que dans ces questions, on ne pourrait se passer de l'intégrale de Cauchy. L'un des théorèmes les plus célèbres de cette nature est le théorème des nombres premiers conjecturé par GAUSS, à savoir que, si $\pi(x)$ est le nombre des nombres premiers inférieurs à x, on a $\lim\limits_{x=\infty} x^{-1}\pi(x) \log x = 1$. La démonstration de ce théorème a été faite par HADAMARD et par de LA VALLÉE-POUSSIN en utilisant les propriétés de la fonction $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ de la variable complexe s, introduite par RIEMANN. Cependant depuis quelques années, particulièrement depuis les travaux de VINOGRADOW, des théorèmes de plus en plus nombreux du domaine de la théorie analytique ont été démontrés sans la théorie des fonctions de variables complexes. Il y a mieux encore : dans l'étude de la célèbre hypothèse de Goldbach (tout nombre pair est la somme de deux nombres premiers) HARDY et LITTLEWOOD [1] avaient obtenu un certain nombre de résultats, en se servant toutefois d'une hypothèse - non démontrée d'ailleurs jusqu'à ce jour - sur la répartition des zéros de la fonction $\zeta(s)$. En 1937, sans utiliser la fonction $\zeta(s)$, VINOGRADOW [5] a démontré ces mêmes résultats. On pouvait alors espérer obtenir également une démonstration du théorème des nombres premiers n'utilisant pas la fonction $\zeta(s)$. L'intérêt d'une telle démonstration, c'est qu'elle pourrait éventuellement dépasser les résultats connus actuellement. C'est A. SELBERG et P. ERDÖS qui viennent d'obtenir une telle démonstration [4], ne donnant, il est vrai, que la forme connue du théorème des nombres premiers, mais par contre, elle est purement élémentaire (même la notion d'intégrale y est inutile).

Dans l'exposé de cette démonstration les lettres p, q et r désignent toujours des nombres premiers, c_1, c_2, ... des constantes absolues.

Le théorème des nombres premiers est vrai si l'on a

$$\lim_{x=\infty} x^{-1}\,\theta(x) = 1 \quad , \quad \text{où} \quad \theta(x) = \sum_{p\leq x} \log p \quad .$$

En effet si $\rho = 1 - (\log x)^{-\frac{1}{2}}$ on a

$$\pi(x)-x^{\rho} \leqslant \pi(x)-\pi(x^{\rho}) \leqslant \frac{\theta(x)-\theta(x^{\rho})}{\log x^{\rho}} \leqslant \frac{\theta(x)}{\log x^{\rho}}$$

donc

$$\frac{\theta(x)}{x} \leqslant \frac{\pi(x)\log x}{x} \leqslant x^{1-\rho}\log x + \frac{1}{\rho}\frac{\theta(x)}{x} \quad .$$

On démontre élémentairement, en utilisant le fait que $(2n)!$ est divisible par $(n!)^2$ (le nombre $\binom{2n}{n}$ est entier), que l'on a

$$0 < a = \liminf_{x=\infty} x^{-1}\,\theta(x) \leq A = \limsup_{x=\infty} x^{-1}\,\theta(x) < +\infty \quad .$$

La démonstration du théorème des nombres premiers est basée essentiellement sur la formule suivante due à A. SELBERG :

(1) $$\theta(x)\log x + \sum_{p\leq x}\theta\left(\frac{x}{p}\right)\log p = 2\,x\log x + O(x\log\log x) \; .$$

Pour la démontrer il évalue de deux manières différentes la somme

$$S = \sum_{n\leq x}\sum_{d|n}\mu(d)\log^2\frac{x}{d}$$

$\mu(d)$ est la fonction de Möbius : $\mu(1) = 1$, $\mu(m) = 0$ si m est divisible par un carré, $\mu(m) = (-1)^h$ si m est un produit de h nombres premiers différents. On démontre facilement par récurrence sur h , que $\sum_{d|n}\mu(d)\log^h d = 0$, si n contient plus de h facteurs premiers différents.

Alors

$$\sum_{d|n}\mu(d)\log^2\frac{x}{d} = \begin{cases} \log^2 x & \text{si } n=1 \\ -\log^2 p + 2\log x\log p & \text{si } n = p^h \\ 2\log p\log q & \text{si } n = p^h q^k \quad p\neq q \\ 0 & \text{dans les autres cas} \end{cases} .$$

Dans S , les entiers n qui ne sont pas de la forme p ou pq donnent une contribution $O(x)$, comme il est facile de s'en assurer en se servant du fait que $\theta(x) = O(x)$; donc

$$S = \log^2 x + \sum_{p\leq x} -\log^2 p + 2\log p\log x + 2\sum_{\substack{pq\leq x\\ p<q}}\log p\log q + O(x) \quad .$$

Mais d'une part :

$$\sum_{p\leq x} -\log^2 p + 2\log p\log x = \sum_{p\leq x}\log p\log x + \sum_{p\leq x}\log p\log\frac{x}{p} =$$

$$= \theta(x)\log x + O(x\log\log x) \quad .$$

En effet

$$\sum_{p\leq x} \log p \log \frac{x}{p} \leq \sum_{p\leq \frac{x \log\log x}{\log x}} \log p \log \frac{x}{p} + \sum_{p\leq x} \log p \log(\log x) \leq$$

$$\leq \theta(\frac{x}{\log x}) + \log x + \theta(x) \log\log x \quad .$$

D'autre part :

$$2\sum_{\substack{pq\leq x\\ p<q}} \log p \log q = \sum_{pq\leq x} \log p \log q - \sum_{p\leq\sqrt{x}} \log^2 p = \sum_{p\leq x} \theta(\frac{x}{p}) \log p + O\left\{\theta(\sqrt{x}) \log x\right\} \quad .$$

En réunissant les deux résultats, il vient :

$$S = \theta(x) \log x + \sum_{p\leq x} \theta(\frac{x}{p}) \log p + O(x \log\log x) \quad .$$

La deuxième manière d'évaluer S est la suivante :

On a $\sum_{m\leq y} \frac{1}{m} = \log y + c_1 + O(y^{-\frac{1}{4}})$. Si $\tau(m)$ désigne le nombre de diviseurs de m, on a $\sum_{m\leq y} \frac{\tau(m)}{m} = \sum_{ab\leq y} \frac{1}{ab}$ et on en déduit

$$\sum_{m\leq y} \frac{\tau(m)}{m} = \frac{1}{2} \log^2 y + c_2 \log y + c_3 + O(y^{-\frac{1}{4}}) \quad ,$$

ce qui permet d'écrire :

$$\log^2 y = 2\sum_{m\leq y} \frac{\tau(m)}{m} + c_4 \sum_{m\leq y} \frac{1}{m} + c_5 + O(y^{\frac{1}{4}})$$

D'autre part, on a

$$S = \sum_{d\leq x} g\,\mu(d) \log^2 \frac{x}{d} \quad ,$$

où g est le nombre de multiples de d qui ne dépassent pas x. Comme $|\frac{x}{d} - g| < 1$, on a ainsi

$$S = x\sum_{d\leq x} \frac{\mu(d)}{d} \log^2 \frac{x}{d} \quad .$$

Posons alors $y = \frac{x}{d}$, on aura

$$\sum_{d\leq x} \frac{\mu(d)}{d} \log^2 y = 2\sum_{d\leq x}\sum_{m\leq y} \frac{\mu(d)\,\tau(m)}{md} + c_4 \sum_{d\leq x}\sum_{m\leq y} \frac{\mu(d)}{md} + c_5 \sum_{d\leq x} \frac{\mu(d)}{d} + O(x^{-\frac{1}{4}} \sum_{d\leq x} d^{-\frac{3}{4}}) =$$

$$= 2\sum_{n\leq x} \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d)\tau(\frac{n}{d}) + c_4 \sum_{n\leq x} \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d) + O(1) = 2 \log x + O(1) \quad ,$$

car on voit élémentairement que

$$\sum_{d|n} \mu(d)\, \tau(\tfrac{n}{d}) = 1 \quad , \qquad \sum_{d|n} \mu(d) = 0$$

sauf si $n = 1$, et $\sum_{d \leq x} \frac{\mu(d)}{d} = O(1)$.

Par suite :

$$S = 2\, x \log x + O(x)$$

et la formule (1) de SELBERG est démontrée.

A partir de la formule (1) de SELBERG, il y a plusieurs manières d'arriver au théorème des nombres premiers. La première démonstration de SELBERG se basait sur un résultat de P. ERDÖS, une autre est publiée dans [4] , enfin celle qui va être esquissée a été exposée par P. ERDÖS à Amsterdam [2] .

En prenant des suites partielles pour x telles que $x^{-1}\, \theta(x)$ tende soit vers A , soit vers a , la formule (1) fournit immédiatement la relation $a + A = 2$.

On considère ensuite les nombres premiers $p \leq x$ tels que $\frac{p}{x}\, \theta(\frac{x}{p}) \geq \nu > a$; leur contribution dans la formule (1) montre que pour eux $\sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p} = o(\log x)$. Ils sont donc peu nombreux, la même somme étendue à tous les nombres premiers $\leq x$ vaut en effet $\log x + o(\log x)$.

Supposons alors $a < A$ et soit σ un nombre tel que $1 < \sigma < \frac{A}{a}$. Soient p et q des nombres premiers tels que $p \leq \sqrt{x}$, $q \leq \sqrt{\frac{x}{p}}$, $\frac{pq}{x}\, \theta(\frac{x}{pq}) \leq \mu < A$ la formule (1) permet de montrer de manière analogue que

$$\sum_{p,q} \frac{\log p \log q}{pq} = o(\log^2 x) \quad .$$

p et q vérifiant les mêmes inégalités, supposons de plus que $pq \geq n$ et $\mu \leq A - \frac{A - a\sigma}{\sigma + 2}$. Soit r un nombre premier vérifiant $\frac{pq}{\sigma} < r < \sigma pq$, on démontre encore à l'aide de (1) que

$$\sum_{p,q,r} \frac{\log p \log q \log r}{pqr} = o(\log^2 x) \quad .$$

On en déduit qu'à tout entier n et à tout $\varepsilon > 0$ on peut associer un nombre $t \geq n$ tel que

$$\sum_{r} \frac{\log r}{r} < \varepsilon \qquad \text{quand} \qquad \frac{t}{\sigma} \leq r \leq \sigma t \quad ,$$

c'est-à-dire $\theta(\sigma t) - \theta(\frac{t}{\sigma}) < \varepsilon\, \sigma t$. Si $n \to \infty$ on obtient $a\sigma - \frac{A}{\sigma} < \varepsilon$, donc $\sigma^2 \leq \frac{A}{a}$ en contradiction avec le fait que σ était un nombre arbitraire vérifiant $1 < \sigma < \frac{A}{a}$. On a donc $a = A$ ce qui démontre le théorème des nombres premiers.

A. SELBERG [3] a montré comment cette méthode pouvait également être utilisée pour démontrer qu'il y a une infinité de nombres premiers $p \equiv \ell \pmod{k}$ si $(\ell , k) = 1$ (théorème de Dirichlet). De façon précise, il montre que pour de tels nombres premiers $\sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p} > c_k \log x$. La démonstration est encore basée sur l'évaluation d'une somme analogue à la somme S précédente, mais où $n \equiv \ell \pmod{k}$. Cette évaluation permet d'obtenir l'inégalité

$$\frac{1}{\log x} \sum_{p \leq x} p^{-1} \log p \leq \frac{2}{\varphi(k)} + O\left(\frac{\log \log x}{\log x}\right) \quad , \quad p \equiv \ell \pmod{k} \quad ,$$

$\varphi(k)$ indicateur d'Euler. Des considérations élémentaires sur les restes quadratiques permettent d'achever la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

[1] HARDY (G.H.) and LITTLEWOOD (J.E.). - Some problems of "Partitio numerorum" : a further contribution to the study of Goldbach's problem, Proc. London math. Soc., t. 22, 1923, p. 46-56.

[2] VAN DER CORPUT (J.G.). - Démonstration élémentaire du théorème sur la distribution des nombres premiers, Mathematisch Centrum, Amsterdam, Scriptum 1.

[3] SELBERG (Atle). - An elementary proof of Dirichlet's theorem about primes in an arithmetic progression, Ann. of Math., t. 50, 1948, p. 297-304.

[4] SELBERG (Atle). - An elementary proof of the prime-number theorem, Ann. of Math., t. 50, 1948, p. 305-313.

[5] VINOGRADOW (I.M.). - Representation of an odd number as a sum of three primes, C.R. Acad. Sc. U.R.S.S., t. 15, 1937, p. 169-172.