JEAN-PIERRE SERRE

Extensions de groupes localement compacts

Séminaire N. Bourbaki, 1952, exp. nº 27, p. 197-202
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1948-1951__1__197_0>

Séminaire BOURBAKI
(Mars 1950)

EXTENSIONS DE GROUPES LOCALEMENT COMPACTS

par Jean-Pierre SERRE

(d'après IWASAWA [2] et GLEASON [1])

Cet exposé n'étudie que les extensions finies de groupes de Lie, ou plus généralement, de groupes localement compacts. Les extensions infinies (c'est-à-dire les limites projectives) feront l'objet d'un exposé ultérieur.

1. - Extensions des groupes discrets (cf. BAER et EILENBERG-MACLANE).

Un groupe E est dit extension du groupe F par le groupe B s'il admet F pour sous-groupe invariant et si $E/F = B$. Dans toute la suite, B et F seront considérés comme connus, et l'on cherchera à construire le groupe E.

a) F étant invariant, les automorphismes intérieurs de E définissent des automorphismes de F, d'où une représentation $E \to \mathrm{Aut}(F)$. Dans cette représentation, F est envoyé sur $\mathrm{Int}(F)$, d'où, par passage au quotient, une représentation : $B \to \mathrm{Aut}(F)/\mathrm{Int}(F)$, qui est un premier invariant de l'extension E.

b) Cette représentation étant connue, considérons la représentation $E \to \mathrm{Aut}(F) \times B$ produit des représentations canoniques de E dans $\mathrm{Aut}(F)$ et dans B. Le noyau de cette représentation est le centre G de F, et l'image est le sous-groupe H formé des couples (σ, b) où $\sigma = \theta(b)$. H et G sont donc connus et l'on voit que l'on s'est ainsi ramené à étudier les extensions de noyau abélien.

c) Dans ce dernier cas, soit f une section (c'est-à-dire une application $B \to E$, telle que $p \circ f(b) = b$, p désignant la projection de E sur B), posons : $f(x).f(y) = u(x,y)\, f(xy)$. La fonction u est à valeurs dans F, c'est une 2-cochaine sur B. Si l'on calcule $f(x).f(y).f(z)$, on trouve que u vérifie l'identité $\theta_x\, u(y,z) + u(x,yz) = u(x,y) + u(xy,z)$. Si l'on convient d'appeler bord de la n-cochaine $g(x_1,\dots,x_n)$ la n+1 cochaine :

$$dg(x_1,\dots,x_{n+1}) = \theta_{x_1}\, g(x_2,\dots,x_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i\, g(x_1,\dots,x_i.x_{i+1},\dots,x_{n+1}) + \\ + (-1)^{n+1}\, g(x_1,\dots,x_n) \quad ,$$

on voit que u est un 2-cocycle. En outre, si l'on remplace f par la section $f'(x) = v(x)\, f(x)$ où $v(x) \in F$, f' définit un cocycle $u' = u + dv$. D'où :

Les extensions de F par B (correspondant à une représentation $B \longrightarrow \mathrm{Aut}(F)$ donnée) correspondent biunivoquement aux éléments du groupe de cohomologie de dimension 2 du groupe B à coefficients dans F .

2. Extensions de groupes topologiques.

Définitions évidentes. Les résultats précédents se transposent de la façon suivante :

a) Remplacer automorphisme par automorphisme de groupe topologique. Si F est localement compact, on mettra sur Aut(F) la topologie de la convergence compacte et la représentation θ sera continue.

b) Le seul changement est que l'on peut simplement dire que E admet une représentation (et non un homomorphisme) de noyau G sur H . Dans de nombreux cas, cette représentation sera tout de même un homomorphisme.

c) On ne peut appliquer la méthode de la cohomologie que si l'on a une section continue, ce qui est une exigence extrêmement forte.

REMARQUE. - Toutes les méthodes précédentes s'appliquent de façon locale, et, en particulier, valent aussi bien pour des noyaux de groupes. La méthode c) n'exige alors que la connaissance de sections locales.

3. Espaces fibrés principaux.

L'existence, sous certaines conditions, de sections locales est un cas particulier d'un résultat valable pour les espaces fibrés principaux.

DÉFINITION. - Soient E un espace topologique et F un groupe topologique opérant sur E . On dit que E est fibré principal de groupe F si, pour tout couple (x,x') d'éléments de E , il existe au plus un $s \in F$ avec $x' = x.s$ et si cet s est fonction continue de (x,x') .

Les fibres sont les classes de la relation d'équivalence $x' = x.s$. La base est le quotient de E par cette relation. Si E est un groupe topologique et F un sous-groupe fermé, les fibres sont les classes à droite et la base, l'espace homogène associé. Si la base et le groupe structural sont localement compacts, E aussi.

THÉORÈME 1 (Gleason). - Si le groupe structural est un groupe de Lie et si E est un espace complètement régulier (en particulier un groupe topologique séparé), E est localement trivial (localement trivial signifie que par tout point passe une section locale).

D'après un théorème d'ADO, il existe une représentation linéaire locale fidèle de F. Soit M l'algèbre de matrices où F est ainsi plongée. F opère sur M et, en particulier, sur le groupe G des matrices inversibles. Soit g une application d'un voisinage 0 d'une fibre donnée, dans E, vérifiant la condition $g(x.s) = g(x).s$ pour s assez petit. L'image réciproque d'une section locale dans G donnera une section locale dans E, car g est un homéomorphisme sur chaque fibre. Tout revient donc à construire une telle application g.

Pour cela, on prend une fonction numérique positive, égale à 1 en un point déterminé de la fibre étudiée et nulle en dehors d'un voisinage convenable, soit f. Posons $g(x) = \int 1_n f(xs)s^{-1} ds$ (ds : mesure de Haar à gauche sur F ; 1_n : unité de M). On a bien $g(xt) = g(x)t$ (pour t assez petit) et $g(x) \in G$ pour x assez près de la fibre donnée. C.Q.F.D.

REMARQUE. - Le caractère local de la démonstration montre que l'on a :

THÉORÈME 2. - Si E est un noyau de groupe admettant pour noyau de sous-groupe un noyau de groupe de Lie, E admet une section locale.

4. Extension d'un groupe de Lie par un groupe de Lie.

Nous allons démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 3 (Iwasawa-Gleason). - Toute extension d'un groupe de Lie par un groupe de Lie est un groupe de Lie.

La démonstration étant purement locale montrera même que toute extension d'un noyau de groupe de Lie par un autre est un noyau de groupe de Lie.

Appliquons les méthodes du n° 1. $\mathrm{Aut}(F)$ est un noyau de groupe de Lie ainsi que $\mathrm{Aut}(F)/\mathrm{Int}(F)$. Toute représentation continue d'un noyau de groupe de Lie dans un autre étant analytique, il en résulte que θ est analytique et que H est un noyau de groupe de Lie. On est donc ramené au cas abélien.

Pour étudier ce dernier, remarquons que, d'après le théorème 2, E admet une section locale, et correspond donc à une classe de cohomologie de dimension 2. Si l'on choisit une section locale (et de ce fait un cocycle), on peut identifier l'espace E avec le produit $B \times F$ et le munir de la structure différentiable produit. Mais pour que la loi de groupe soit différentiable, on voit tout de suite qu'il faut et qu'il suffit que le cocycle en question soit différentiable sur $B \times B$.

Nous avons donc à montrer que <u>toute classe de cohomologie contient un cocycle indéfiniment différentiable</u>.

Soient donc u un 2-cocycle et $k(x)$ une fonction indéfiniment différentiable sur B, à support compact, et telle que $\int k(x)\,dx = 1$ (dx mesure de Haar à gauche). Posons $v(x) = \int u(x,t)\,k(t)\,dt$. Un calcul immédiat montre que :

$$(1) \qquad (u-dv)(x,y) = \int u(x,yt)\,k(t)\,dt - \int u(x,t)\,k(t)\,dt \ .$$

Le cocycle u est donc homologue au cocycle du second membre. Mais ce dernier est indéfiniment différentiable par rapport à y (produit de composition). Nous allons passer de ce résultat à la différentiabilité par rapport au couple (x,y) en utilisant le fait que, pour tout cocycle u, le cocycle $v(x,y) = -\theta_{xy}\,u(y^{-1},x^{-1})$ lui est homologue (car, si u est relatif à une section f, v est relatif à $g(x) = f(x^{-1})^{-1}$).

On voit alors, en échangeant x et y, que tout cocycle est homologue à un cocycle différentiable en x. Appliquant à ce dernier l'identité (1) on trouve bien un cocycle indéfiniment différentiable par rapport à (x,y). C.Q.F.D.

5. Extension d'un R^n par un compact.

D'après le théorème 1, cette extension est localement triviale (puisque le groupe structural est R^n). Mais alors elle est triviale (prolonger une section partielle en utilisant le fait que R^n est un rétracte absolu). On peut donc appliquer les méthodes cohomologiques.

Soit alors u un 2-cocycle, et appliquons-lui l'identité (1) où l'on a pris pour $k(x)$ la fonction constante égale à 1. On trouve $u-dv = 0$, ce qui montre que le second groupe de cohomologie de B est nul. D'où :

THÉORÈME 4 (Iwasawa). – <u>Dans toute extension d'un R^n par un groupe compact, il y a une section qui est un sous-groupe</u>.

En fait, une extension évidente de la méthode précédente montre que

THÉORÈME 5. – <u>Tous les groupes de cohomologie d'un groupe compact sont nuls</u>.

Si l'on applique ceci au premier groupe de cohomologie, on voit que cela donne : dans les hypothèses du théorème 4, <u>deux sous-groupes sections sont conjugués</u> (Iwasawa).

REMARQUE. - Ces démonstrations étaient employées depuis longtemps dans le cas des groupes finis (Cf. ZASSENHAUS, Chapître 4, théorème 25 par exemple).

6. Extensions de groupes compacts.

THÉORÈME 6 (Iwasawa). - Si F est un groupe compact, le groupe $\mathrm{Aut}(F)/\mathrm{Int}(F)$ est totalement discontinu.

Dans le cas abélien, cela revient à dire que $\mathrm{Aut}(F)$ est totalement discontinu, ce qui est évident puisque $\mathrm{Aut}(F) = \mathrm{Aut}(\hat{F})$ et que $\hat{F}$ est discret.

Dans le cas général, on remarque que tout automorphisme appartenant à la composante connexe de l'unité dans $\mathrm{Aut}(F)$ laisse les caractères de F invariants (cela tient à ce que les caractères forment un ensemble discret pour la topologie de la convergence uniforme d'après les relations d'orthogonalité de Schur). Si F_i est l'image de F dans une représentation linéaire, cet automorphisme passe donc au quotient et définit sur F_i un automorphisme appartenant à la composante connexe de l'unité. Mais alors c'est un automorphisme intérieur (il s'agit, en somme, de vérifier le théorème 6 pour les groupes de Lie, ce qui n'est pas difficile, vu que l'on connaît leur structure). On en déduit, par un raisonnement de compacité, que l'automorphisme de F étudié est intérieur, ce qui achève la démonstration.

On en déduit aussitôt les résultats suivants :

THÉORÈME 7 (Iwasawa). - Tout groupe compact à centre nul est facteur direct dans toute extension connexe (appliquer 1.b), en remarquant que $\Theta = 0$ et que $G = 0$).

THÉORÈME 8 (Iwasawa). - Tout groupe compact abélien est contenu dans le centre de toute extension connexe (car $\Theta = 0$) .

THÉORÈME 9 (Iwasawa). - Tout groupe résoluble compact connexe est abélien.

7. Structure des groupes de Lie résolubles.

(Rappelons que résoluble signifie : qui admet une suite de composition à quotients abéliens).

THÉORÈME 10 (Chevalley). - Tout groupe de Lie connexe résoluble est homéomorphe au produit d'un tore par un R^n .

Le groupe étudié, G , admet une suite de composition formée de sous-groupes fermés connexes tels que les quotients soient abéliens : il suffit de prendre les commutateurs successifs de G .

On obtiendra le théorème 10 en raisonnant par récurrence sur la longueur de la chaine précédente et en utilisant le lemme suivant :

LEMME. - Toute extension de R^n ou d'un tore T^p par R ou T admet une section qui est un sous-groupe.

La démonstration du lemme est immédiate : on sépare les divers cas, et l'on fait usage des théorèmes 4 et 9.

Le théorème 10 se laisse préciser comme suit :

Soit T^p un tore, sous-groupe compact maximum d'un groupe résoluble E . Le groupe E possède des sous-groupes à 1 paramètre, $R_1,\dots,R_q$ isomorphes à R et tels que tout $x \in E$ s'écrive d'une façon et d'une seule sous la forme $x = t\, r_1,\dots,r_q$ où $t \in T^p$ et $r_i \in R_i$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] GLEASON (Andrew). - On the structure of locally compact groups, Proc. nat. Acad. Sc. U.S.A., t. 35, 1949, p. 384-386.

[2] IWASAWA (Kenkichi). - On some types of topological groups, Ann. of Math., t. 50, 1949, p. 507-558.

ADDITIF

Les résultats d'IWASAWA et GLEASON donnés dans le présent exposé étaient destinés à faciliter l'étude de la structure des groupes localement compacts ; depuis, cette structure a été complètement élucidée, grâce aux travaux de GLEASON, MONTGOMERY-ZIPPIN, YAMABE.

On trouvera un bon exposé de la question dans :

MONTGOMERY (Deane) and ZIPPIN (Leo). - Topological transformation groups. - New York, Interscience, 1955 (Interscience Tract n° 1).

[Avril 1957]