RENÉ THOM

Les géodésiques dans les variétés à courbure négative

Séminaire N. Bourbaki, 1952, exp. nº 28, p. 203-213

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1948-1951__1__203_0>

Séminaire BOURBAKI
(Mars 1950)

LES GÉODÉSIQUES DANS LES VARIÉTÉS À COURBURE NÉGATIVE

par René THOM

(d'après E. HOPF [2])

1. Rappel de généralités.

Soient V une variété indéfiniment différentiable et X un champ de vecteurs dans V. La résolution du système différentiel

$$(\sigma) \quad \frac{dP}{X} = dt$$

associe au champ X un groupe G à un paramètre (t) d'homéomorphismes de V sur elle-même. Si τ_t désigne la transformation correspondant à la valeur t du paramètre, on écrira $P_t = \tau_t P$. On suppose, dans tout ce qui suit, que le système (σ) admet un invariant intégral de dimension maximum ; cet invariant définit sur V une mesure dm qui est G-invariante ; on a ainsi défini ce que nous appelons un courant (Strömung) dans V

Dans le cas où la mesure totale $m(V)$ est finie, les théorèmes classiques suivants sont valables :

1° Le théorème de convergence en moyenne de von Neumann.

Soit $f(P)$ une fonction m-mesurable ; il existe alors une moyenne $\hat{f}(P)$ telle que :

$$\lim_{t=\infty} \int_V \left[\frac{1}{t}\int_0^t f(P_t)\,dt - \hat{f}(P)\right]^2 dm = 0$$

2° Le théorème ergodique individuel de Birkhoff.

Pour tout point P (sauf au plus les points d'un ensemble de mesure nulle) $\frac{1}{t}\int_0^t f(P_t)\,dt$ admet pour $t = \infty$ une limite $f_+^*(P)$.

3° Le théorème de symétrie de E. Hopf.

Si on forme les deux moyennes,

$$f_+^* = \lim_{t=+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t f(P_t)\,dt \qquad f_-^* = \lim_{t=-\infty} \frac{1}{t}\int_0^t f(P_t)\,dt$$

alors, presque partout,

$$f_+^*(P) = f_-^*(P)$$

2. Définitions.

A) Ergodicité. - On dit que le courant (G_t) est ergodique si toute fonction, m-mesurable et G-invariante, est une constante (à un ensemble de mesure nulle près).

Comme les moyennes f_+^* et f_-^* sont G-invariantes, ce sont des (presque) constantes dont la valeur est $\frac{1}{m(V)} \int f \, dm$.

Il résulte immédiatement de cette définition qu'un ensemble mesurable de trajectoires du champ ne peut avoir comme mesure que 0 ou $m(V)$, propriété classiquement dénommée transitivité métrique, et équivalente ici à l'ergodicité.

B) Mélange. - Un courant défini dans V par le groupe $G(t)$ peut être étendu dans le produit $V \times V$; il suffit de définir $G'(t)$ par :

$$\tau'_t(P \times Q) = (\tau_t(P) \times \tau_t(Q))$$

sur tout point $P \times Q$ de $V \times V$.

On dit que le courant G est du type mélangé, si le courant étendu G' est ergodique dans $V \times V$; tout courant mélangé est ergodique, mais la réciproque n'est pas vraie ; dans un courant mélangé, les images $\tau_t A$ d'un ouvert A finissent par se diluer et par remplir uniformément tout l'espace. On définit classiquement la condition de mélange par l'égalité :

$$(1) \qquad \lim_{t = \infty} \int_V f(P_t) \, g(P) \, dm = \int_V f(P) \, dm \int_V g(P) \, dm$$

pour toutes f , g , de carré sommable.

3. Le courant géodésique.

Soient M une variété de dimension n , et Ω l'espace des vecteurs unitaires tangents à M . Soit donnée dans M , une métrique riemannienne, définissant, par tout élément de contact α de support a , la géodésique G_α orientée tangente à α . A cet ensemble de géodésiques sur M correspond dans Ω un courant ainsi défini : l'élément $\tau_s \alpha$ est l'élément de contact obtenu en prenant pour support le point b de G tel $\widehat{ab} = s$, et pour tangente en b , la tangente à G_α . L'espace Ω est fibré sur M , la fibre étant la sphère unitaire S^{n-1} ; la mesure invariante dans Ω par le courant géodésique se définit comme le produit $dv \wedge dS$, où dv est l'élément de volume induit dans M par le ds^2 donné, et dS l'élément d'aire de la sphère fibre. (Cet invariant n'est autre, aux notations près que l'invariant $\sum_i dp_i \wedge dq_i$ de la mécanique).

4. Les variétés à courbure négative constante.

Toute variété M à courbure négative constante peut s'obtenir comme quotient de l'espace hyperbolique par un groupe L de déplacements.

Soit B l'intérieur de la n-boule définie dans R par $\sum_1 x_i^2 < 1$, muni de la métrique

$$ds^2 = 4 \frac{\sum dx_i^2}{(1 - \sum x_i^2)^2} \quad ;$$

l'élement de volume est

$$dv = 2^n \frac{dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n}{(1 - \sum x_i^2)^n} \quad ;$$

B sera le revêtement universel $\hat{M}$ de M ; de même l'espace tangent $\hat{\Omega}$ à B est revêtement de Ω ; on désignera par p l'application canonique $p : \hat{\Omega} \longrightarrow \Omega$ correspondante. Et le courant géodésique dans Ω est la projection par p du courant géodésique dans $\hat{\Omega}$ (à cause de l'invariance de la métrique par le groupe L, groupe d'automorphismes des deux revêtements $\hat{M} \to M$ et $\hat{\Omega} \to \Omega$).

Toute géodésique de M (qui est dans l'espace R initial, un cercle orthogonal à la sphère de l'infini S_∞ $\sum x_i^2 = 1$) peut être caractérisée par les deux points π_1 et π_2 où elle rencontre S_∞ ; on peut donner ainsi de Ω une paramétrisation simple : un élément de contact a sera défini par les points π_1 et π_2 où la géodésique G_α qu'il détermine rencontre S_∞ ; soit ω le milieu de G ; si a est le support de α, on posera $s = \widehat{\omega\alpha}$; dans ce nouveau système de coordonnées, le courant géodésique s'exprime par :

$$\tau_t(\pi_1 , \pi_2 , s) = (\pi_1 , \pi_2 , s + t)$$

Géodésiques asymptotiques. - Deux géodésiques G_1, G_2 sont dites positivement asymptotiques si elles aboutissent au même point π_2 de S_∞. On démontre (à l'aide d'un changement simple de coordonnées) le lemme suivant : pour que deux éléments e, $e' \in \hat{\Omega}$ déterminent les géodésiques asymptotiques, il faut et il suffit qu'il existe un nombre c tel que :

$$(2) \qquad \lim_{t = \infty} \sigma(e_{t+c} , e'_t) = 0 ,$$

où σ désigne la distance induite dans $\hat{\Omega}$ par un ds^2 de la forme $d\sigma^2 = ds^2 + d\chi^2$ $d\chi$ élément de distance sur la fibre.

Classification des variétés M. - Soit x_0 un point de M. On dit que la géodésique G issue de x_0 (paramétréepar l'arc λ) va à l'infini, si

$\lim\limits_{\lambda \infty} s(x_0 , p_\lambda) = \alpha$; si une géodésique va à l'infini, il en va de même de toute géodésique + asymptotique ; par suite, si l'ensemble des géodésiques qui vont à l'infini, issues de x_0 , forment un ensemble de mesure nulle (prise ici dans $\hat{\Omega}$) ; il en est de même en tout autre point de M . On dit que, dans ce cas, M est de première classe.

S'il n'en est pas ainsi, M sera dite de deuxième classe.

Rapports de la classification en classes avec le groupe L . - On sait qu'un domaine fondamental de L s'obtient en prenant tous les x qui satisfont à $s(x , x_0) < s(x , \gamma x_0)$ pour tout $\gamma \in L$.

Considérons tous les γx_0 dans B ; on appelle point limite de L tout point adhérent à l'ensemble des γx_0 . L'ensemble Λ des points-limites de L sur S est L-invariant et ne dépend pas de x_0 . L est dit de première espèce, si Λ contient tout S_∞ ; sinon, L est de deuxième espèce.

Toute variété M définie par un groupe L de 2e espèce est de 2e classe ; en effet, le domaine fondamental a en commun avec S_∞ au moins un ouvert, d'où résulte que les géodésiques allant à l'infini forment un ensemble de mesure positive, strictement.

Si L admet un système fini de générateurs, et est de 1re espèce, M est de 1re classe ; dans ce cas, en effet, le domaine fondamental est limité par un nombre fini de sphères géodésiques, et n'a alors aucun point commun avec S ; M est compacte, et donc de 1re classe.

Dans le cas général, on ne peut rien dire : il existe, par exemple des M de 2e classe avec un L de 1re espèce ; toutefois, si le volume total m(M) est fini, il en est de même du volume de Ω ; le courant géodésique satisfait alors au théorème du retour de Poincaré qui affirme que presque toutes trajectoires reviennent dans un voisinage de leur point de départ, les géodésiques qui vont à l'infini ne peuvent par suite former qu'un ensemble de mesure 0 , et M est de la 1re classe.

Lemme sur les mesures. - Soit A un ensemble τ -invariant de $\hat{\Omega}$; un tel ensemble est complètement caractérisé par l'ensemble ω_1 , ω_2 des points π_1 , π_2 . Si un ensemble τ -invariant A de Ω est de mesure m - nulle, la mesure (euclidienne) $\iint d\omega_1 \, d\omega_2$ est nulle.

Si, en effet, A est de mesure 0 , il en est de même de $A' = p^{-1}(A)$ et dans le nouveau système de coordonnées, la mesure dm (invariante) est de la forme

$dm = \mu \, d\pi_1 \, d\pi_2$ où μ est strictement positif.

5. Les variétés de deuxième classe.

Soit A_2 l'ensemble des points de S_∞ tels que les géodésiques qui y aboutissent vont à l'infini ; soit $\bar{A}_2$ son complémentaire ; soit de même A_1 l'ensemble des points $\in S_\infty$ d'où partent les géodésiques qui viennent de l'infini, $\bar{A}_1$ son complémentaire. La mesure $\iint d\omega_1 \, d\omega_2$ de $(A_1 + \bar{A}_1) \times A_2$ est > 0 car c'est l'ensemble des géodésiques qui vont à l'infini. Donc $\int d\omega_2 > 0$. L'auteur fait appel alors à un théorème de symétrie énoncé par lui ([1]) : presque toutes les géodésiques qui vont à l'infini en viennent (et réciproquement). Donc mes $\bar{A}_1 \times A_2 = 0$, d'où mes $\bar{A}_1 = 0$. En permutant les indices 1 et 2, on aurait de même mes $\bar{A}_2 = 0$.

Conclusion : Dans une variété de 2e classe, presque toutes les géodésiques viennent de l'infini, et y retournent. On dit que le courant est dissipatif.

6. Les variétés de 1re classe.

Soit f une fonction uniformément continue dans Ω et sommable ; supposons d'abord $m(\Omega) < \infty$; si P, $P' \in \Omega$ déterminent deux géodésiques + asymptotiques, on a, en raison du lemme (2) :

$$\lim_{t=\infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(P_t)\,dt = \lim \frac{1}{t} \int_0^t f(P'_t)\,dt$$

ou :

$$f_+^*(P) = f_+^*(P') .$$

Soit α une valeur telle que l'ensemble des P qui satisfont à $f_+^*(P) \geqslant \alpha$ (1) soit de mesure > 0. Désignons alors par A l'ensemble des points π_2 correspondants, par $\bar{A}_2$ son complémentaire.

Désignons alors par A_1 l'ensemble des points d'où partent les géodésiques qui satisfont à $f_-^*(P) \geqslant \alpha$ (2) ; d'après le théorème de symétrie, on a mes $(A_1 \times \bar{A}_2) = 0$ d'où, comme précédemment mes $\bar{A}_2 = 0$.

Il s'ensuit que presque toues les géodésiques doivent satisfaire (1) et (2) dès qu'un ensemble de mesure non nulle le fait ; f est par suite une presque contante et il y a ergodicité.

Soit A un domaine normal de Ω, c'est-à-dire un ouvert dont la frontière est de mesure nulle, et soit h la fonction caractéristique de A.

On peut alors trouver deux fonctions uniformément continues f_1 , f_2 telles que $\frac{1}{m(\Omega)}\int (f_2 - f_1)\, dm < \mathcal{E}$ avec $f_1 \leqslant h \leqslant f_2$. Pour presque tout P , on s :

$$\lim_{t=\infty} \frac{1}{t}\int_0^t f_1(P_t)\, dt \leqslant \lim_{t=\infty} \frac{1}{t}\int_0^t h(P_t)\, dt \leqslant \lim_{t=\infty} \frac{1}{t}\int_0^t f_2(P_t)\, dt$$

le 1er et le 3e membre diffèrent de moins de $\mathcal{E}$. Il s'ensuit que $\frac{1}{t}\int_0^t h(P_t)\, dt$ a pour limite $m(A)/m(\Omega)$, temps moyen de séjour de P dans A ; c'est là une définition des plus usitées de l'ergodicité.

Si $m(\Omega) = \infty$, l'auteur montre cependant qu'il existe une sorte d'ergodicité relative : si f et g sont >0 et m-sommables dans Ω , on a :

$$\lim_{t=\infty} \frac{\int_0^t f(P_t)\, dt}{\int_0^t g(P_t)\, dt} = \lim_{t=\infty} \frac{\int_0^t f(P_t)\, dt}{\int_0^t g(P_t)\, dt} = \frac{\int_\Omega f\, dm}{\int_\Omega g\, dm}$$

Il suffit d'appliquer le même raisonnement aux fonctions

$$F^*_+ = \lim_{t \pm \infty} \frac{\int_0^t f(P_t)\, dt}{\int_0^t g(P_t)\, dt} \quad \text{et} \quad \mathcal{F} = \lim_{t=-\infty} \frac{\int_0^t f(P_t)\, dt}{\int_0^t g(P_t)\, dt} .$$

7. Le courant horicirculaire.

Pour étudier les problèmes de mélange, HEDLUND a introduit (dans le cas des surfaces) un nouveau courant, celui des horicycles. HOPF a généralisé cette construction au cas d'une variété à n dimensions. Considérons, au-dessus de M l'espace Z des couples de vecteurs unitaires, orthogonaux ; Z est un espace fibré sur l'espace tangent Ω , avec pour fibre la sphère S^{n-2} décrite par l'extrémité du 2e vecteur ; de même l'espace $\hat{Z}$ des couples de vecteurs orthogonaux au-dessus de $\hat{\Omega}$ est un revêtement de Z , avec le même groupe L comme groupe d'automorphismes.

Le courant ergodique se définit de façon naturelle dans $\hat{Z}$ (et Z) ; si b est un élement de Z , défini par son support a et 2 vecteurs v_1 , v_2 rectangulaires, on posera $\tau_s\, b = b'$, où le support a' et le 1er vecteur v_1' définissent l'élement de Ω transformé par τ_s de l'élément (a , v_1) ; quant au vecteur v_2' , il s'obtiendra par transport parallèle du vecteur v_2 le long de la géodésique reliant a à a' . De façon plus précise : l'élément b détermine une 2-sphère géodésique orthogonale à S_∞ ; cette sphère contient la géodésique

(aa'), et le vecteur v_2 demeure tangent à cette sphère géodésique et orthogonal à aa'.

La mesure invariante est ici encore $d\mu = dm \wedge d\sigma$, où $d\sigma$ est l'élément d'aire de la sphère fibre.

On appelle horicycles (sur une 2-sphère géodésique) les trajectoires orthogonales (au sens euclidien) des géodésiques issues d'un point fixe donné de S ; par tout b passe un horicycle orienté et un seul. Le courant horicirculaire est ainsi défini : $H_\gamma(b)$ est l'élément b' dont le support a'' s'obtient en prenant sur l'horicycle issu de a le point a'' tel que $\widehat{aa''} = t$; le vecteur v_1'' se déduit de v_1 par transport parallèle le long de l'horicycle, et v_2'' est tangent à l'horicycle.

Si l'on désigne par D_α la rotation du couple b de l'angle α dans son plan : on vérifie aisément les formules suivantes, liant les courants géodésique et horicirculaire :

(3) $$H_t = D_\pi D_\alpha \tau_s D_\alpha$$

où α est une certaine fonction de s, nulle pour $s = \infty$.

(4) $$\tau_t H_s b = H_{se^t} \tau_{-t} b$$

obtenue en remarquant que l'arc d'horicycle compris entre 2 géodésiques est fonction exponentielle de la variable t.

Il résulte de (3) que le courant horicirculaire laisse la mesure $d\mu$ invariante. Quant aux caractères d'ergodicité de ces deux courants, on a le lemme suivant : les courants H et τ admettent les mêmes fonctions mesurables invariantes.

La démonstration repose sur l'emploi de l'identité (3) ; si h est h-invariant on a

$$h(b) = h(D_\pi\ D_\alpha\ \tau_s D_\alpha\ b) \quad \text{ou} \quad h(D_{-\alpha} \tau_{-s}\ b) = h(D_\alpha\ D_\pi\ b)$$

et, pour toute g bornée :

$$\int h(D_{-\alpha}\ \tau_{-s}\ b)\ g(b)\ d\mu = \int_Z h(D_\alpha\ D_\pi\ b)\ g(b)\ d\mu$$

par substitution :

$$\int_Z h(D_{-\alpha}\ b)\ g(\tau_s\ b)\ d\mu' = \int_Z h(D_\alpha\ D_\pi\ b)\ g(b)\ d\mu$$

Faisant tendre s vers l'infini :

$$\lim_{\infty} \int_Z h(b)\ g(\tau_\nu\ b)\ d\mu = \int h(D_\pi\ b)\ g(b)\ d\mu$$

L'étoile désignant la moyenne par rapport à τ , il vient :

$$\int_Z g^*(b)\, h(b)\, d\mu = \int_Z h(D_\pi\, b)\, g(b)\, d\mu$$

On utilise alors l'identité, vraie pour toute fonction φ τ -invariante :

$$\int_Z F^* \varphi\, d\mu = \int_Z F\varphi\, d\mu$$

pour remplacer le 1er membre par :

$$\int h^*(b)\, g^*(b)\, d\mu = \int h^*(b)\, g(b)\, d\mu = \int h(D_\pi\, b)\, g(b)\, d\mu$$

et comme g est arbitraire, il vient l'identité :

$$h(D_\pi\, b) = h^*(b) \quad \text{ou} \quad h(b) = h^*(D_\pi\, b)\ .$$

Moyennant l'identité $D_\pi\, \tau_t = \tau_{-t}\, D_\pi$ et la τ -invariance de h^* , on en déduit la τ -invariance de h .

Réciproquement, la τ -invariance entraîne la H-invariance.

Désignons par $\overline{f}(P)$ la moyenne $\frac{1}{\delta}\int f(b)\, d\sigma$ sur la sphère fibre au-dessus de P ; si f est τ-invariante, il en est de même de $\overline{f}$, et par suite de l'ergodicité de τ dans Ω , $\overline{f}$ est une presque constante. De là l'auteur passe <u>sans aucune démonstration</u> à f , dont il affirme la presque-constance ; d'où résulte l'ergodicité <u>dans</u> Z des courants τ et H .

8. <u>Le mélange</u>.

Pour établir que le courant géodésique est du type mélangé, il suffit de montrer que pour toute fonction f telle que $\int f\, dm = 0$, on a

$$\lim_{t=\infty} \int f(\tau_{-t}\, P)\, g(P)\, dm = 0\ .$$

Cas particulier de la formule (1) qui lui est équivalent.

On substitue à l'intégrale donnée l'intégrale dans Z :

$$\lim_{t=\infty} \int_Z f(\tau_{-t}\, b)\, g(b)\, d\mu$$

à laquelle on substitue l'intégrale approchée :

$$\int_Z \Big[\frac{1}{\delta}\int_0^\delta f(\tau_{-t}\, b)\, dt\Big]\, g(b)\, d\mu \quad (\delta > 0\ ,\ \text{et assez petit})$$

Or, en vertu de l'ergodicité de H dans Z , le théorème de von Neumann donne

(associé à $f = 0$)

$$\int \lim \left[\frac{1}{s} \int_0^1 f(H_s\, b)\, ds\right]^2 = 0$$

ou, par changement de variable de la forme $s = s'\, e^t$:

$$\lim_{t=\infty} \int_Z \left[\frac{1}{\delta} \int_0^\delta f(H_{s_{e^t}}(b)\, ds\right]^2 d\mu = 0$$

L'identité (4), puis l'inégalité de SCHWARZ achèvent alors la démonstration.

$$\lim_{t=\infty} \int_Z \left[\frac{1}{\delta} \int_0^\delta f(H_{s'e^t}\, b)\, ds'\right]^2 d\mu = 0 \,.$$

9. <u>Surfaces à courbure variable</u>.

L'auteur parvient à généraliser ses méthodes lorsque la courbure est variable, mais dans le cas des surfaces seulement.

D'après un théorème d'Hadamard, dans toute variété à courbure négative, chaque classe d'homotopie contient une géodésique et une seule ; ceci permet de donner une interprétation du revêtement universel de la surface donnée f ; soit p un point de F choisi comme origine ; soient px , py deux semi-géodésiques orientées issues de p ; si px et py se recoupent en un point a de F , on peut affirmer que le lacet px et py n'est pas homotope à 0 ; désignons par l'arc sur les géodésiques et posons $r = \frac{\lambda}{\lambda+1}$; on définit ainsi l'application du disque ouvert $r < 1$ sur F , et cette application n'est autre que le revêtement universel $\hat{F}$ de F . La métrique se transpose de façon naturelle dans $\hat{F}$; deux géodésiques dans $\hat{F}$ ne peuvent se couper qu'en un point au plus, et entre deux points p , p' de $\hat{F}$ il n'y a qu'une seule liaison géodésique définissant la distance $s(p , p')$.

<u>Géodésiques asymptotiques</u>. - Munissons F de coordonnées polaires ρ , θ et donnons à ds la forme "géodésique" :

$$ds = d\rho^2 + Y^2(\rho , \theta)\, d\theta^2$$

où la fonction Y est la solution de l'équation : $Y'' + KY = 0$ définie par les conditions initiales (et θ est) :

$$Y' = \frac{\partial Y}{\partial \rho} \qquad Y(0 , \theta) = 0 \qquad Y(0 , \theta) = 1$$

Supposons alors qu'on ait sur toute la surface :

$$a^2 < -K < b^2$$

alors $Y'^2 - 1 = -\int_0^{\rho} K\, d(Y^2) > a^2 Y^2$. Et comme $Y \geqslant \rho > \rho_0$

$$a < \frac{Y'}{y} < \sqrt{b^2 + \frac{1}{\rho_0^2}}$$

Soit G une géodésique orientée ne passant pas par le pôle ; joignons un point m de paramètre s sur G au pôle p par la géodésique, et soit l'angle de G avec la géodésique pm ; l'angle vérifie l'équation différentielle (GAUSS) :
$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{Y'}{y} \sin \alpha$.

La fonction $\alpha(s)$ est par suite monotone, et croît de 0 à π lorsque G est décrite de $-\infty$ à $+\infty$.

Deux géodésiques G , G' sont dites positivement asymptotiques, si leurs arcs t , t' peuvent être liés par une fonction $t' = \varphi(t)$ monotone croissante, telle que $\lim_{t \to +\infty} s(p(t), p'(\varphi(t))) = 0$.

THÉORÈME. – Par un point arbitraire de $r < 1$ il passe une (et une seule) géodésique positivement asymptotique à une géodésique donnée G . Il suffit de faire tendre m vers l'infini sur G et montrer l'existence d'une limite pour la géodésique de liaison pm . (Cela résulte du caractère monotone de la variation de l'azimuth de pm en p).

Champ de géodésiques asymptotiques. – Soit G une géodésique d'arc s ; par tout point m de G menons la géodésique + asymptotique à une géodésique donnée G' ; soit α l'angle qu'elles font ; α vérifie l'équation différentielle
$\frac{d\alpha}{ds} = -z' \sin\alpha$ où $z' = \frac{\partial z}{\partial s}$, et z est la solution de l'équation différentielle $z'' + Kz = 0$ donnée par les conditions aux limites $z(0) = I$ et $z(+\infty) = 0$.

(Simple généralisation du cas précédent : envoyer p à l'infini)

Il en résulte comme précédemment; que la fonction $\alpha(s)$ est monotone croissante de 0 à π (z' vérifie $a < -z < b$).

THÉORÈME. – Étant données deux géodésiques G et G' , il existe une et une seule géodésique – asymptotique à G et + asymptotique à G' .

On construit les deux champs ainsi définis, et une géodésique Γ transversale à ces champs ; en chaque point a de Γ , les géodésiques des champs définissent deux angles α et α', tous deux fonctions monotones de s ; il existe donc sur Γ un point tel que $\alpha + \alpha' = \pi$, ce qui donne la géodésique cherchée. Cette géodésique est unique, car s'il en existait deux, on pourrait les joindre par une géodésique transversale, et le raisonnement précédent aboutirait à une contradiction.

On peut ainsi associer à toute géodésique un couple d'angles (φ, ψ). Reste alors à montrer que ces angles, introduits comme coordonnées dans l'espace tangent Ω, se comportent de façon assez régulière pour permettre un théorème de mesure analogue à celui pour $\iint d\pi_1\, d\pi_2$.

Soit G une géodésique d'arc s ; soient φ, ψ les nouvelles coordonnées de la géodésique qui rencontre G au point s sous l'angle α ; l'auteur parvient alors à montrer, que moyennant une hypothèse supplémentaire sur la variation de K (qu'on peut exprimer par $|\text{grad } K| < \infty$), le jacobien $\frac{D(\varphi, \psi)}{D(s, \alpha)}$ est, pour $\alpha \neq 0$, différent de 0 et fonction continue de s et α.

On peut alors énoncer le

LEMME. - Un ensemble τ-invariant d'éléments de F est de mesure nulle, si et seulement si la mesure correspondante $\iint d\varphi\, d\psi = 0$. En effet, si un ensemble de géodésiques est de mes 0, il en est de même du sous-ensemble qui rencontre une géodésique fixe G_0 et réciproquement : on peut en effet définir dans F un ensemble dénombrable de géodésiques tel que toute géodésique rencontre au moins une géodésique de l'ensemble. La propriété énoncée du jacobien $\frac{D(\varphi, \psi)}{D(s, \alpha)}$ achève alors la démonstration du lemme.

Les méthodes employées dans le cas où K est constante s'applique alors mot pour mot et conduisent au résultat :

Si la surface F est de 1re classe, il y a <u>ergodicité</u>

Si la surface F est de 2e classe, il y a <u>dissipativité</u>.

BIBLIOGRAPHIE

[1] HOPF (Eberhard). - Zwei Sätze über den wahrscheinlichen Verlauf der Bewegungen dynamischer Systeme, Math. Annalen, t. 103, 1930, p. 710-719.

[2] HOPF (Eberhard). - Statistik der geodätischen Linien in Mannigfaltigkeiten negative Krümmung, Ber. Verh. Sächs. Akad. Leipzig, t. 91, 1939, p. 261-304.