Roger Godement

I. Les représentations unitaires irréductibles du groupe complexe unimodulaire

Séminaire N. Bourbaki, 1952, exp. n° 4, p. 21-27

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1948-1951__1__21_0>

Séminaire BOURBAKI
(Décembre 1948)

I. LES REPRÉSENTATIONS UNITAIRES IRREDUCTIBLES DU GROUPE COMPLEXE UNIMODULAIRE

par Roger GODEMENT

[d'après GELFAND et NEUMARK [1]] .

On désigne par G le groupe des matrices complexes $g = ((g_{pq}))$ de déterminant $+1$; la mesure de Haar sur G est notée $d\mu(g)$ (elle est invariante à droite <u>et</u> à gauche). On pose

(1) $$\beta(g) = |g_{22}|^4 . |g_{33}|^8 \dots |g_{nn}|^{4n-4}$$

1. <u>Sous-groupe</u> K , d'élément générique $k = ((k_{pq}))$ avec

(2) $$k_{pq} = 0 \quad \text{pour} \quad p < q \quad ; \text{d'où} \quad k_{11}\, k_{22} \dots k_{nn} = 1 .$$

On prend pour paramètres, les $k_{pq} (p > q)$, les k_{22} , ... , k_{nn} , et les variables imaginaires conjuguées ; on désigne par dk le produit (extérieur) des dk_{pq} considérés. Les mesures de Haar sur K sont

(2) $$d\mu_\ell(k) = |k_{22}|^{-4} \dots |k_{nn}|^{-2n} . dk \wedge \overline{dk} \quad \text{(invariante à gauche)}$$

(3) $$d\mu_r(k) = |k_{33}|^2 \dots |k_{nn}|^{2n-4} . dk \wedge \overline{dk} \quad \text{(invariante à droite)}$$

On a

(4) $$d\mu_r(k) = \beta(k)\, d\mu_\ell(k) .$$

2. <u>Sous-groupe</u> K' , d'élément générique $k' = ((k'_{pq}))$ avec

(5) $$k'_{pq} = 0 \quad \text{pour} \quad p > q .$$

On note $g \to g'$ l'antiautomorphisme de G consistant à permuter lignes et colonnes ; il échange K et K' . Mesures de Haar sur K' :

(6) $$d\mu_\ell(k') = |k'_{33}|^2 \dots |k'_{nn}|^{2n-4} . dk' \wedge \overline{dk'}$$

(7) $$d\mu_r(k') = |k'_{22}|^{-4} \dots |k'_{nn}|^{-2n} . dk' \wedge \overline{dk'} = \beta(k')^{-1} . d\mu_\ell(k') .$$

---

[1] GELFAND (I. M.) und NEUMARK (M. A.). - Unitäre Darstellungen der klassischen Gruppen. - Berlin, Akademie-Verlag, 1957 (Mathematische Lehrbücher und Monographien, 2. Abteilung, Band 6).

3. Sous-groupe Z de K, d'élément générique $z = ((z_{pq}))$ avec

(8) $$z_{pq} = 0 \text{ pour } p < q, \quad z_{pp} = 1 \quad (1 \leqslant p \leqslant n).$$

On y prend pour paramètres les z_{pq} et $\bar{z}_{pq}$ $(p > q)$. Il y a une mesure de Haar sur Z :

(9) $$d\mu_{\ell}(z) = d\mu_r(z) = d\mu(z) = dz \wedge \overline{dz}, \text{ où } dz = \prod_{p>q} dz_{pq}.$$

4. Sous-groupe Z' de K', d'élément générique $z' = ((z'_{pq}))$ avec

(10) $$z'_{pq} = 0 \text{ pour } p > q, \quad z'_{pp} = 1 \quad (1 \leqslant p \leqslant n).$$

Résultats analogues à ceux de Z :

(11) $$d\mu_{\ell}(z') = d\mu_r(z') = d\mu(z') = dz' \wedge \overline{dz'}, \text{ où } dz' = \prod_{p<q} dz'_{pq}.$$

5. Sous-groupe $\Delta = K \cap K'$, fermé des matrices diagonales

(12) $$\delta = \{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n\} \text{ avec } \delta_1 . \delta_2 \ldots \delta_n = 1.$$

Δ est abélien maximal. On prend pour paramètres $\delta_2, \ldots, \delta_n$ et les conjugués. On a

(13) $$d\mu(\delta) = |\delta_2|^{-2} \ldots |\delta_n|^{-2} \, d\delta \wedge \overline{d\delta} \text{ où } d\delta = d\delta_2 \wedge \ldots \wedge d\delta_n.$$

6. Relations entre ces sous-groupes.

a. Tout $k \in K$ admet des représentations uniques de la forme

(14) $$k = \delta . z = z_1 . \delta \quad (\text{avec } \delta \in \Delta \; ; \; z, z_1 \in Z) \; ; \text{ on a } \delta_p = k_{pp}.$$

b. Tout $k' \in K'$ admet des représentations uniques de la forme

(15) $$k' = \delta . z' = z'_1 . \delta \quad (\text{avec } \delta \in \Delta \; ; \; z', z'_1 \in Z') \; ; \text{ on a } \delta_p = k'_{pp}.$$

c. Presque tout $g \in G$ admet des représentations uniques de la forme

(16) $$g = z'.k = k'.z \quad (\text{avec } k \in K, \; k' \in K', \; z \in Z, \; z' \in Z').$$

d. Presque tout $k' \in K'$ admet une représentation unique

(17) $$k' = z'^{-1} . \delta . z' \; ; \text{ de même, } k = z^{-1} \delta z \quad (k \in K, \; z \in Z).$$

e. Tout $g \in G$ admet $n!$ représentations sous la forme

(18) $$g = z^{-1} . k' . z \; ; \text{ de même, } g = z'^{-1} . k . z'.$$

f. Presque tout $g \in G$ est de la forme

(19) $$g = x^{-1}.\delta.x \qquad \text{où } x \in G \text{ , } \delta \in \Delta \text{ ;}$$

δ peut être choisi de $n!$ façons différentes.

7. Relations entre mesures de Haar.

a. En identifiant, d'après 6a , les espaces K et $\Delta \times Z$, on obtient

(20) $$\int_K f(k)d\mu_\ell(k) = \int_\Delta\int_Z f(\delta z)d\mu(\delta)d\mu(z) \text{ ;}$$

(20') $$\int_K f(k)d\mu_r(k) = \int_\Delta\int_Z f(z\delta)d\mu(\delta)d\mu(z) \text{ .}$$

b. De même avec K' et $\Delta \times Z'$.

c. 6c conduit à

(21) $$\int_G f(g)d\mu(g) = \int_{K'}\int_Z f(k'z)d\mu_\ell(k')d\mu(z) = \int_K\int_{Z'} f(z'k)d\mu(z')d\mu_r(k)$$

d. D'après 6e , $Z \times K'$ recouvre G $n!$ fois ; désignons par $\lambda_g^{(p)}$ les valeurs propres de g , par k'_g l'un quelconque des k' de (18), par f et φ des fonctions sommables sur G et K' respectivement ; on a alors

(22) $$\int_Z d\mu(z)\int_{K'} f(z^{-1}k'z)\varphi(k')d\mu_\ell(k') = \int_G f(g)\,\frac{\sum \varphi(k'_g)\,\beta^{\frac{1}{2}}(k'_g)}{\prod_{p<q}|\lambda_g^{(p)} - \lambda_g^{(q)}|^2}\,d\mu(g)$$

où le $\sum$ est étendu aux $n!$ solutions k'_g de (18).

8. L'espace homogène K .

Soit G/Z' l'espace homogène des classes à droite modulo Z' ; d'après (16), presque toute classe est de la forme $Z'.k$, où $k \in K$ est bien déterminé, et réciproquement ; on peut représenter G comme groupe de transformations dans G/Z' , ou encore sur K ; si on le représente sur K le transformé $A_g k$ de $k \in K$ par $g \in G$ est l'élément (cf. (16))
$k_1 \in K$ tel que

(23) $$kg = z'.k_1 \qquad \text{avec } z' \in Z' \text{ .}$$

Les A_g sont donc définis presque partout sur K (et partout sur G/Z').

La formule (21) prouve que les A_g conservent $d\mu_r(k)$:

(24) $$d\mu_r(A_g k) = d\mu_r(k) \text{ .}$$

9. L'espace homogène Z .

Si l'on considère l'espace G/K' des classes à droite de K' , on peut de même l'identifier, à un ensemble négligeable près, à Z : une classe $K'g$ contient un seul $z \in Z$, et réciproquement (cf. (16)). On peut donc représenter G comme groupe de transformations sur Z ; le transformé $T_g z$ de $z \in Z$ par $g \in G$ sera le $z_1 \in Z$ tel que

(25) $$zg = k'.z_1 \quad \text{où} \quad k' \in K' .$$

$d\mu(z)$ n'est pas invariante par les T_g ; si l'on pose

(26) $$T_g z = z_1 , \quad zg = k' z_1 = \delta.z'.z_1 \qquad (\text{cf. } (15))$$

on a

(27) $$d\mu(T_g z) = \beta^{-1}(\delta).d\mu(z) = \beta^{-1}(zg)d\mu(z) .$$

10. La représentation unitaire dans $\mathcal{H}_K$; sa décomposition.

Soit $\mathcal{H}_K$ l'espace des fonctions de carré sommable sur K pour $d\mu_r(k)$. Si l'on pose pour $g \in G$, $f \in \mathcal{H}_K$,

(28) $$U_g^K f(k) = f(A_g k)$$

on a, en vertu de (24), une représentation unitaire $\{\mathcal{H}_K ; U_g^K\}$ de G ; celle-ci se décompose de la façon suivante. D'après (20) et (4) on a

(29) $$\int |f(k)|^2 d\mu_r(k) = \int_Z d\mu(z) \int_\Delta |f(\delta z)\beta^{\frac{1}{2}}(\delta)|^2 d\mu(\delta) , \text{ pour } f \in \mathcal{H}_K .$$

Soit X le groupe des caractères de Δ ; posons (Fourier sur Δ)

(30) $$f_\chi(z) = \int_\Delta f(\delta z)\beta^{1/2}(\delta)\overline{\chi(\delta)}\, d\mu(\delta)$$

pour $\chi \in X$; (29), (30) et Plancherel donnent

(31) $$\int_K |f(k)|^2 d\mu_r(k) = \int_Z d\mu(z) \int_X |f_\chi(z)|^2 d\mu(\chi) = \int_X d\mu(\chi) \int_Z |f_\chi(z)|^2 d\mu(z) .$$

Soit alors $\mathcal{H}_Z$ l'espace L^2 construit sur Z ; pour presque tout $\chi \in X$, $f_\chi(z)$ définit un élément $f_\chi \in \mathcal{H}_Z$, et (31) donne, en prenant des produits scalaires dans $\mathcal{H}_K$ et $\mathcal{H}_Z$:

(32) $$\langle f , g \rangle = \int_X \langle f_\chi , g_\chi \rangle\, d\mu(\chi) ;$$

donc $\mathcal{H}_K$ est une "somme directe continue" d'espaces de Hilbert tous isomorphes à $\mathcal{H}_Z$.

On va voir que les U_g^K se décomposent aussi dans ces divers espaces.

Posons $f'(k) = U_g^K f(k) = f(A_g k)$, et soit f'_χ la χ-composante de f', donnée par

(33) $$f'_\chi(z) = \int_\Delta f'(\delta z)\, \beta^{1/2}(\delta)\overline{\chi(\delta)}\, d\mu(\delta) = \int_\Delta f[A_g(\delta z)]\, \beta^{1/2}(\delta)\chi(\delta)\, d\mu(\delta)\ .$$

Posons

(34) $$\delta z = k \ ;\ A_g k = k_1 \ ;\ kg = z'k_1 \ ;\ k_1 = \delta_1 z_1\ .$$

On a en vertu des relations du n° 6 :

(35) $$z_1 = T_g z \ ;\ A_g k = k_1 = \delta_1 z_1 = \delta\,\delta_2 . z_1 = \delta\,\delta_2 . T_g z = A_g(\delta z) \ ;$$

δ_2, pour z et g donnés, <u>ne dépend pas de</u> δ, car on a la formule

(36) $$zg = \delta_2 z_1' z_1 \quad \text{avec unicité de } \delta_2,\ z_1',\ z_1 \text{ d'après 6a et 6b.}$$

Ceci étant (33) devient

(37) $$f'_\chi(z) = \int_\Delta f(\delta_2 . \delta . T_g z)\, \beta^{1/2}(\delta)\overline{\chi(\delta)}\, d\mu(\delta) =$$
$$= \beta^{\frac{1}{2}}(\delta_2)\chi(\delta_2) \int_\Delta f(\delta . T_g z)\, \beta^{\frac{1}{2}}(\delta)\chi(\delta)\, d\mu(\delta)$$

ou

(38) $$f'_\chi(z) = \beta^{-\frac{1}{2}}(\delta_2)\chi(\delta_2)\, f_\chi(T_g z)\ .$$

On est donc conduit à poser

(39) $$U_{\chi;g} f(z) = \beta^{-\frac{1}{2}}(\delta_2)\chi(\delta_2)\, f(T_g z) \quad \text{pour } f \in \mathcal{H}_Z$$

où δ_2 est donné en fonction de g et z par (36). En utilisant (27), on montre que les $U_{\chi;g}$ sont <u>unitaires</u> dans $\mathcal{H}_Z$; d'où une famille de représentations $\{U_{\chi;g}\ ;\ \mathcal{H}_Z\}$ dépend d'un "paramètre" $\chi \in X$, et (32) se complète par

(40) $$\langle U_g^K f\ ,\ g\rangle = \int_X \langle U_{\chi;g} f_\chi\ ,\ g_\chi\rangle\, d\mu(\chi) \quad \text{pour } f\ ,\ g \in \mathcal{H}_K\ .$$

La <u>représentation</u> $\{\mathcal{H}_K\ ;\ U_g^K\}$ se décompose donc suivant les $\{\mathcal{H}_Z\ ;\ U_{\chi;g}\}$.

On peut simplifier (39) ; prolongeons χ à G en posant

(41) $$\chi(g) = \chi(\delta) \quad \text{si } g = Z'\delta Z \qquad (\text{cf. (15) et (16)})\ ;$$

$\chi(g)$ est défini presque partout, et vérifie, comme du reste β, les équations

(42) $$\chi(gk) = \chi(g)\chi(k) \ ;\ \chi(k'g) = \chi(k')\chi(g) \quad \text{pour } g \in G\ ,\ k \in K\ ,\ k' \in K'$$

En posant

(43) $$\alpha_\chi(g) = \beta^{-\frac{1}{2}}(g)\chi(g)$$

(39) s'écrit

(44) $$U_{\chi;g}f(z) = \alpha_\chi(zg).f(T_g z)$$

On peut écrire explicitement (44) comme suit. Pour $\delta = \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\}$, posons

(45) $$\chi(\delta) = |\delta_2|^{m_2+i\rho_2} \dots |\delta_n|^{m_n+i\rho_n}. \delta_2^{-m_2} \dots \delta_n^{-m_n}$$

($m_2, \dots, m_n$ entier, $\rho_2, \dots, \rho_n$ réels, caractérisant le caractère χ de Δ).

Pour $g = ((g_{pq}))$, posons

(46) $$g_p = \begin{vmatrix} g_{pp} & \dots & g_{pn} \\ \dots & \dots & \dots \\ g_{np} & \dots & g_{nn} \end{vmatrix} ;$$

Alors (44) s'écrit

$$U_{\chi;g}f(z) = |g_2^1|^{m_2+i\rho_2-2}.|g_3^1|^{m_3-m_2+i(\rho_3-\rho_2)-2} \dots |g_n^1|^{m_n-m_{n-1}+i(\rho_n-\rho_{n-1})-2}$$

(47) $$(g_2^1)^{-m_2}(g_3^1)^{-(m_3-m_2)} \dots (g_n^1)^{-(m_n-m_{n-1})}.f(T_g z)$$

où l'on a posé $zg = g^1 = ((g_{pq}^1))$.

11. <u>Cas</u> $n = 2$.

Pour $n = 2$, $g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$, on a

(48) $$z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z_{21} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x+iy & 1 \end{pmatrix}$$

donc Z est isomorphe à R^2 ; on a $d\mu(z) = dx\,dy$; pour $z \in C$, il vient

(49) $$T_g z = \frac{g_{11}z + g_{21}}{g_{12}z + g_{22}}$$

et (47) s'écrit

$$(50)\quad U_{\chi;g}f(z) = |g_{12}z + g_{22}|^{m+i\rho-2}.(g_{12}z + g_{22})^{-m}.f\left(\frac{g_{11}z + g_{21}}{g_{12}z + g_{22}}\right) ,$$

$\mathcal{H}_Z$ étant l'espace des $f(z) = f(x + iy)$ telles que

$$(51)\qquad \iint |f(x + iy)|^2 \, dx \, dy < +\infty .$$