JEAN-LOUIS KOSZUL

Algèbres de Jordan

Séminaire N. Bourbaki, 1952, exp. nº 31, p. 245-256
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1948-1951__1__245_0>

Séminaire BOURBAKI
(Mai 1950)

ALGÈBRES DE JORDAN

par Jean-Louis KOSZUL

Une algèbre de Jordan est une algèbre non-associative, commutative où la relation $(a^2 b)a = a^2(ba)$ est vérifiée pour tout couple d'éléments a , b . Si $\times$ est le symbole du produit associatif dans l'algèbre L des endomorphismes d'un espace E , le produit $XY = (1/2)(X \times Y + Y \times X)$ de deux éléments de L définit, dans l'espace L , une structure d'algèbre de Jordan. Un isomorphisme d'une algèbre de Jordan A dans l'algèbre de Jordan L est appelé une représentation linéaire fidèle de A dans E .

C'est vers 1933 que P. JORDAN introduit ces algèbres en statistique quantique. Un mémoire de J. JORDAN, von NEUMANN et WIGNER [5] montre en 1934 l'existence d'algèbres de Jordan ne possédant pas de représentation linéaire fidèle et détermine les algèbres de Jordan simples vérifiant certaines conditions de "réalité". Des travaux récents ([1] , [2]) de A. A. ALBERT lèvent ces restrictions et établissent des critères de semi-simplicité analogue à ceux des algèbres de Lie. Il prouvent que les seules algèbres de Jordan simples n'ayant pas de représentation linéaire fidèle sont du type exceptionnel découvert en 1934. Ces algèbres de Jordan exceptionnelles ont notamment l'intérêt d'être apparentées aux algèbres de Lie exceptionnelles de type F_4 et E_6 (CHEVALLEY [3]).

1. Formulaire.

On désignera par A une algèbre de Jordan sur un corps K de caractéristique 0 , par $R(x)$ ou R_x l'endomorphisme de l'espace A tel que $y R(x) = yx (x , y \in A)$, par $E(A)$ l'algèbre associative enveloppant A (c'est-à-dire la plus petite sous-algèbre d'endomorphismes de l'espace A qui contient tous les $R(x)$) .

Par polarisation de $(a^2 b)a = a^2(b a)$, on obtient

(1) $((bc)d)a + ((ca)d)b + ((ab)d)c = (bc)(da) + (ca)(db) + (ab)(dc)$,

valable quels que soient a , b , c , $d \in A$. On en déduit

(2) $$R_{bc} R_a + R_{ca} R_b + R_{ab} R_c = R_a R_{bc} + R_b R_{ca} + R_c R_{ab} ,$$

(3) $$R_{(ab)c} = R_a R_{bc} + R_b R_{ca} + R_c R_{ab} - R_a R_c R_b - R_b R_c R_a$$

(4) $$R_{a(bc)} = R_{bc} R_a + R_{ca} R_b + R_{ab} R_c - R_b R_a R_c - R_c R_a R_b ,$$

et, par soustraction

(5) $$R_{(ba)c-(bc)a} = R_b(R_a R_c - R_c R_a) - (R_a R_c - R_c R_a)R_b ,$$

identité qui prouve que quels que soient a et c dans A , $[R_a , R_c]$ est une dérivation de l'algèbre A .

2. Idempotents.

Soit $e = e^2$ un idempotent de A ; d'après (3) ,

$$2R(e)^3 - 3R(e)^2 + R(e) = 0 .$$

Les racines caractéristiques de $R(e)$ sont donc égales à 1 , ou à 0 (comme dans le cas d'une algèbre associative), ou encore à 1/2 . On désigne par $A_o(e)$, $A_1(e)$ et $A_2(e)$ ou simplement A_o , A_1 , A_2 , les sous-espaces caractéristiques correspondants. La décomposition de l'endomorphisme identique I en

$$I = (2R_e^2 - R_e) + (I - 3R_e + 2R_e^2) + 4(R_e - R_e^2)$$

prouve que $A_o = A_o + A_1 + A_2$.

Par des calculs simples utilisant (5) on établit (cf. ALBERT [2])

(6) $$\begin{array}{lll} A_1 A_1 = A_1 & A_o A_o \subset A_o & A_1 A_o = (0) \\ A_1 A_2 = A_2 & A_o A_2 \subset A_2 & A_2 A_2 \subset A_1 + A_o \end{array}$$

Ainsi A_1 et A_o sont deux sous-algèbres orthogonales.

Supposons que e soit unité de A et que $e = e_1 + e_2 + \dots + e_n$ les e_i étant des idempotents deux à deux orthogonaux. On pose

$$A_{ii} = A_1(e_i) \qquad A_{ij} = A_{ji} = A_2(e_i) \cap A_2(e_j) \quad (i \neq j) .$$

On démontre que A est somme directe des A_{ij} et que

(7) $$\begin{array}{lll} A_{ii} A_{ii} = A_{ii} & A_{ii} A_{jj} = (0) & \\ A_{ii} A_{ik} = A_{ik} & A_{ii} A_{jk} = (0) & \\ A_{ij} A_{jk} = A_{ik} & A_{ij} A_{k\ell} = (0) & A_{ij} A_{ij} \subset A_{ii} + A_{jj} \end{array}$$

lorsque i , j , k , ℓ sont distincts.

Un idempotent e est dit principal si $A_o(e)$ ne contient pas d'idempotent.

THÉORÈME 1. - Dans toute algèbre de Jordan contenant un idempotent, il existe un idempotent principal.

Si $e = e^2$ n'est pas principal, $A_0(e)$ contient un idempotent e' et $(e + e')$ est un idempotent (6) . Soit v un élément de A se décomposant en

$$v = v_0 + v_1 + v_2 \ (v_i \in A_i(e)) \ .$$

Si $v \in A_0 \ (e + e')$ c'est que

$$v(e + e') = v_1 + (1/2)\, v_2 + v_2\, e' + v_0\, e' = 0 \quad ;$$

il en résulte que $v_1 = 0$ et $(1/2)\, v_2 + v_2\, e' = 0$, c'est-à-dire $v_2 = 0$ et donc $v \in A_0(e)$. Ainsi $A_0(e + e') \subset A_0(e)$ et ces sous-espaces sont distincts car $(e + e')e' = e' \neq 0$. On a donc obtenu un idempotent $e + e'$ pour lequel $A_0(e + e')$ est de dimension plus petite que la dimension de $A_0(e)$. Cette réduction peut être répétée jusqu'à ce que l'idempotent obtenu soit principal.

Un idempotent e de A est dit <u>primitif</u> si $A_1(e)$ ne contient pas d'autre idempotent que e .

THÉORÈME 2. - Tout idempotent est somme d'idempotents primitifs deux à deux orthogonaux.

3. <u>Eléments nilpotents</u>. <u>Radical</u>.

Lorsque x parcourt une sous-algèbre B de A , $R(x)$ engendre une sous-algèbre associative de $E(A)$ que l'on note B^* .

THÉORÈME 3. - La sous-algèbre $K[x]$ engendrée par un élément x est associative.

Posons en effet $x^1 = x$, $x^p = x^{p-1}\, x$. La formule (3) donne

$$R(x^{p+1}) = R(x^{p-1})\, R(x^2) + 2R(x)\, R(x^p) - R(x^{p-1})\, R(x)^2 - R(x)^2\, R(x^{p-1})$$

ce qui montre que la sous-algèbre $K[x]^*$ est engendrée par $R(x)$ et $R(x^2)$, elle est donc commutative. Par suite,

$$x^p\, x^q = (x^{p-1}\, x)x^q = (x\, x^{p-1})x^q = x\, R(x^{p-1})\, R(x^q) = x\, R(x^q)\, R(x^{p-1}) = x^{q+1}\, x^{p-1} \ ,$$

donc, de proche en proche $x^p\, x^q = x^{p+q}$.

Un élément x est dit <u>nilpotent</u> si $x^p = 0$ pour p assez grand.

THÉORÈME 4. - Si l'algèbre de Jordan A ne contient pas d'idempotent, tous ses éléments sont nilpotents.

En effet, si $x \in A$ n'était pas nilpotent, l'algèbre associative $K[x]$ ne serait pas résoluble et contiendrait donc un idempotent.

Une algèbre de Jordan est dite résoluble si la suite de ses dérivés successifs aboutit à (0) (l'idéal dérivé de A étant AA). Le théorème 4 montre que tous les éléments d'une algèbre résoluble sont nilpotents.

LEMME 1. - Si B est une sous-algèbre résoluble de A, alors B^* est nilpotente.

On le démontre par récurrence sur la dimension p de B. Si $p = 1$, alors $B = Nu$ avec $uu = 0$; on a $R(u)^3 = 0$ d'après (4). Si $p > 1$, alors la dimension de BB est inférieure à p et B possède un idéal C de dimension $p - 1$ tel que $C \supset BB$. Soit u un élément de B étranger à C. D'après (4), on a

$$R(x)\, R(y)\, R(z) + R(z)\, R(y)\, R(x) \in C^*\, B^* + C^* \quad \text{lorsque } x, y, z \in B .$$

On en déduit que

$$R(x)\, R(y)\, R(z) \in C^*\, B^* + C^* \ ;$$

ceci est trivial lorsque $x \in C$ et résulte de l'inclusion précédente lorsque $x - u$ et $z \in C$ ou $x = z = u$. Par suite $(B^*)^3 \subset C^*\, B^* + C^*$, donc $(B^*)^4 \subset C^*\, B^*$ et par récurrence $(B^*)^{3k+1} \subset (C^*)^k\, B^*$; la nilpotence de B^* résulte donc de celle de C^*.

Une conséquence de ce lemme est que

(8) si x est nilpotent, alors $R(x)$ est nilpotent.

Par un raisonnement analogue à celui du théorème d'Engel sur les algèbres de Lie, ALBERT démontre le

THÉORÈME 5. - Une algèbre de Jordan dont les éléments sont tous nilpotents est résoluble.

Le radical d'une algèbre de Jordan est son idéal résoluble maximal dont l'existence s'établit comme dans le cas d'une algèbre de Lie. On désigne par $t(x)$ la trace de l'endomorphisme $R(x)$.

THÉORÈME 6. - Pour que x soit dans le radical N de A, il faut et il suffit que $t(xy) = 0$ pour tout y de A.

Soit en effet N' le sous-espace de A orthogonal à A pour la forme bilinéaire symétrique $t(xy)$. Si $x \in N$, alors $R(x)$ est nilpotent (8) et par suite $t(x) = 0$. Il en résulte que $N \subset N'$. Par ailleurs, on déduit de (5) que

(9) $$t((ab)c) = t(a(bc))$$

quels que soient a , b , $c \in A$. Donc N' est un idéal. S'il n'était pas résoluble, il contiendrait un idempotent e (théorèmes 5 et 4). On aurait alors $t(e) = t(ee) = 0$, contrairement aux résultats du paragraphe 2 . Il en résulte que N' est résoluble et donc que $N = N'$.

4. Algèbres de Jordan semi-simples.

L'algèbre de Jordan A est dite semi-simple si

1° la famille des $R(x)$ est complètement réductible,

2° $R(x) = 0$ entraîne $x = 0$.

THÉORÈME 7 (ALBERT). - Pour qu'une algèbre de Jordan soit semi-simple, il faut et il suffit que son radical N soit nul.

Supposons $N \neq (0)$. Puisque d'après (8) $R(x) = 0$ pour tout $x \in N$, c'est que N contient un $u \neq 0$ tel que $Nu = (0)$. L'algèbre A ne peut être semi-simple car il existerait alors un idéal supplémentaire de N et l'on aurait donc $R(u) = 0$.

Supposons $N = (0)$; soit $B \neq (0)$ un idéal de A . Les théorèmes 4 et 5 prouvent que B contient un idempotent. D'après le théorème 1 , B contient donc un idempotent principal e . On a

$$A_1(e) + A_2(e) = A\,e \subset B$$

et donc

$$B_0(e) = A_0(e) \cap B \quad \text{et} \quad B = A_1(e) + A_2(e) + B_0(e) \ .$$

Tous les éléments de $B_0(e)$ sont nilpotents car dans le cas contraire, le théorème 4 prouverait que e n'est pas principal. Soit $x \in A_2(e)$. Pour tout $y \in A_1(e) + A_0(e)$, $xy \in A_2(e)$ d'après (6) ; or les éléments de $A_2(e)$ ont visiblement pour trace 0 . Pour tout

$$y \in A_2(e) \ , \quad xy \in A_1(e) + B_0(e) \quad ;$$

donc $xy - (xy)e \in B_0(e)$ est nilpotent ; on déduit donc de (9) que

$$(1/2)\ t(xy) = t(xy - x(ye)) = t(xy - (xy)e) = 0 \ .$$

On a ainsi prouvé que $A_2(e)$ est dans le radical de A , donc que $A_2(e) = (0)$. Les relations (6) prouvent que $A_0(e)$ est alors un idéal de A . Il en résulte que $B_0(e)$ est aussi un idéal de A ; or il est résoluble (théorème 5), par conséquent, $B_0(e) = (0)$ et $A_0(e)$ est un idéal supplémentaire de B. On achève la démonstration en remarquant que si $R(x) = 0$, x est visiblement dans le radical.

Dans le cas où $B = A$, la seconde partie de la démonstration précédente prouve le

THÉORÈME 8. - Dans une algèbre de Jordan semi-simple il existe un idempotent principal et un seul qui est l'unité.

5. Algèbres réduites.

Soit e un idempotent primitif de A. Si $x \in A_1(e)$ n'est pas nilpotent, $K[x]$ contient un idempotent donc $K[x] \ni e$. L'algèbre associative $K[x]$ est donc la somme directe d'une extension algébrique de K et d'un idéal d'éléments nilpotents. Si le corps K est algébriquement fermé, tout $x \in A_1(e)$ est donc de la forme $\alpha e + u$ où $\alpha \in K$ et u est nilpotent. Soit V le sous-espace des $x \in A_1(e)$ tels que $t(x) = 0$. Il coïncide avec l'ensemble des éléments nilpotents de $A_1(e)$. Par conséquent, si $x, y \in V$,

$$2t(xy) = t((x+y)^2) - t(x^2) - t(y^2) = 0$$

c'est-à-dire que $V A_1(e) \subset V$. Il en résulte que $V A \subset V + A_2(e)$; or $t(z) = 0$ pour tout $z \in A_2(e)$. Par suite, V est dans le radical de A et si l'on suppose A semi-simple, on voit que $A_1(e) = Ke$ pour tout idempotent primitif e de A. Une algèbre de Jordan vérifiant cette propriété est dite réduite.

Toute algèbre de Jordan semi-simple est somme directe de sous-algèbres simples deux à deux orthogonales, une algèbre simple étant une algèbre semi-simple ne possédant pas les idéaux triviaux. Dans une extension du corps de base, une algèbre stable reste semi-simple, mais peut cesser d'être simple. Le centre d'une algèbre de Jordan A est l'ensemble des x tels que $R(x)\,R(y) = R(y)\,R(x)$ pour tout y de A. On démontre facilement que le centre d'une algèbre de Jordan simple est un corps commutatif C. Considérés comme algèbre sur C, l'algèbre de Jordan est encore simple et reste simple dans toute extension scalaire.

Etant donnée une algèbre de Jordan simple, on commencera par considérer sa structure d'algèbre sur son centre. Il est alors possible d'en faire une extension scalaire qui soit une algèbre réduite.

6. Détermination des Algèbres de Jordan simples réduites.

On suppose l'unité e de A décomposée en somme d'idempotents primitifs

$e_1, e_2, \ldots, e_n$ deux à deux orthogonaux. Le nombre n est appelé le <u>degré</u> de A (on vérifie qu'il ne dépend pas de la décomposition de e). On utilise la décomposition de A en somme de sous-espace A_{ij} définie au paragraphe 2. On suppose A réduite c'est-à-dire que pour tout i, $A_{ii} = Ke_i$.

Si $x \in A_{ij}$ $(i \neq j)$, alors (7) prouve que $x^2 = \alpha e_i + \beta e_j$ où α et β sont des scalaires. On a

$$(x^2 e_i)x = x^2(e_i x) \quad \text{et} \quad xe_i = (1/2)x ,$$

par conséquent, $(1/2)\alpha x = (1/4)\alpha x + (1/4)\beta x$ et donc $\alpha = \beta$. On définit une forme quadratique $f(x)$ sur A_{ij} en posant $x^2 = f(x)(e_i + e_j)$ pour tout $x \in A_{ij}$. La forme bilinéaire symétrique polarisée de $f(x)$ est définie par $xy = f(x, y)(e_i + e_j)$.

LEMME 2. - La forme $f(x, y)$ est régulière.

En effet, si $a \in A_{ij}$ et $f(a, y) = 0$ pour tout $y \in A_{ij}$, on a $a A_{ij} = (0)$. D'autre part, si $y \in A_{kp} \neq A_{ij}$, les formules (7) montrent que $ay \in A_{lm}$ où $l \neq m$. On a donc $t(ay) = 0$ pour tout y ; a est dans le radical de A qui est (0).

<u>Algèbres de degré</u> 2. L'algèbre est entièrement définie par la forme quadratique régulière $f(x)$ de A_{12}. La dimension de A_{12} est un entier > 0 arbitraire.

<u>Algèbres de degré</u> > 2

LEMME 3. - Si i, j, k sont distincts et si $u \in A_{ij}$ est tel que $f(u) \neq 0$, alors $R(u)$ applique A_{jk} isomorphiquement dans A_{ik}.

En effet, supposons que $a \in A_{ij}$ et $au = 0$, alors d'après (1), $(u^2 e_j)a = u^2(e_j a)$, donc $(1/2)f(u)a = (1/4)f(u)a$ et par suite $a = 0$.

THÉORÈME 9. - Tous les sous-espaces A_{ij} ont même dimension.

Le théorème est une conséquence immédiate du lemme si l'on suppose que $A_{ij} \neq (0)$ quels que soient i et j. Le cas contraire ne peut se produire ; supposons en effet $A_{1j} = (0)$ pour $1 < j \leq p \leq n$, et $A_{1j} \neq (0)$ pour $p < j \leq n$. Si $p = n$, Ke serait un idéal non trivial de A. Si $p < n$, le lemme 3 prouve que $A_{jk} = (0)$ pour $1 < j \leq p$ et $p < k \leq n$. Par suite, $A = A_1(u) + A_0(u)$ où $u = e_1 + e_2 + \ldots + e_p$ ce qui est exclu car A est simple.

Compte-tenu de (7) , la formule (1)

$$((xy)e_i)z + ((yz)e_i)x + ((zx)e_i)y = (xy)(e_i\, z) + (yz)(e_i\, x) + (zx)(e_i\, y)$$

donne

(10) $$(xy)z + (zx)y = (yz)x = (1/2)f(y\,,\, z)x$$

lorsque $x \in A_{ij}$, y , $z \in A_{jk}$, i , j , k , étant distincts,

(11) $$(xy)z = x(yz)$$

lorsque $x \in A_{ij}$, $y \in A_{jk}$, $z \in A_{k\ell}$, i , j , k , ℓ étant distincts.
Supposant i , j , k distincts et $x \in A_{ij}$, $y \in A_{jk}$, le calcul de $(xy)^2$ montre que

(12) $$f(2xy) = f(x)\, f(y)$$

relation liant les formes quadratiques de A_{ij} , A_{jk} , et A_{ik} .

Au besoin après extension du corps de base, on choisit dans chaque A_{1j} un élément e_{1j} tel que $f(e_{1j}) = 1$. On pose $e_{ij} = e_{ji} = 2e_{1i}\, e_{1j}$ pour $i \neq j$, $1 > i$, $j > 1$. On a alors $f(e_{ij}) = 1$ et $2e_{ij}\, e_{jk} = e_{ik}$ quels que soient i , j , k distincts. On désigne désormais par des lettres grecques les éléments de A_{12} . Le conjugué d'un élément $\alpha \in A_{12}$ sera par définition $\bar{\alpha} = 2f(e_{12}\,,\alpha) - \alpha$.
Posons pour tout $\alpha \in A_{12}$:

$$\alpha_{12} = \alpha \qquad \alpha_{21} = \bar{\alpha}\,,$$

$\alpha_{ij} = 4e_{1i}\,(e_{2j}\,\alpha)$ lorsque 1 , 2 , i , j sont distincts,

$\alpha_{1j} = 2e_{2j}\alpha \qquad \alpha_{j1} = 2e_{2j}\,\bar{\alpha}$ lorsque 1 , 2 , i sont distincts,

$\alpha_{12} = 2e_{1i}\,\alpha \qquad \alpha_{2i} = 2e_{1i}\,\bar{\alpha}$ lorsque 1 , 2 , i sont distincts.

D'après le lemme 3 et le théorème 9 chaque application $\alpha \to \alpha_{ij}$ est un isomorphisme de A_{12} sur A_{ij} . On peut donc définir pour chaque système d'indices i , j , k distincts une fonction bilinéaire F_{ijk} de A_{12} à valeurs dans A_{12} en posant

$$[F_{ijk}\,(\alpha\,,\beta\,)]_{ik} = 2\,\alpha_{ij}\,\beta_{jk}\,.$$

On vérifie que la structure d'algèbre L définie par F_{ijk} dans A_{12} est indépendante au choix des indices i , j , k . On pose $F_{ijk}(\alpha\,,\beta) = \alpha \circ \beta$.

D'après (12) , $f(\alpha_{ij}) = f(\alpha)$, donc

(13) $$f(\alpha \circ \beta) = f(\alpha)\quad f(\beta)\,.$$

Or l'existence d'une forme quadratique régulière vérifiant (13) prouve que l'algèbre L est de l'un des types suivants :

1° $s = 1$: L est isomorphe au corps de base K ;

2° $s = 2$: L est une algèbre sur K admettant une base u , v telle que u soit unité et $v^2 = -u$.

3° $s = 4$: L est une algèbre (associative) de quaternions généralisées.

4° $s = 8$: L est une algèbre (non associative) de Cayley généralisée.

Ce fait décisif a été découvert par A. HURWITZ.

Soit M_n l'algèbre des endomorphismes de l'espace $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ et soit $E_{ij} \in M_n$ l'endomorphisme tel que $e_k E_{ij} = \delta_{ik} e_j$. On définit un isomorphisme $x \to x^*$ de l'espace A dans l'algèbre $L \otimes M_n$ en posant

$$(e_i)^* = 1 \otimes E_{ii} \qquad (\alpha_{ij})^* = \alpha \otimes E_{ij} + \bar{\alpha} \otimes E_{ji} .$$

On a alors

$$(\alpha_{ij}\ \beta_{jk})^* = (1/2)(\alpha \circ \beta)^* = (1/2)\ (\alpha \circ \beta) \otimes E_{ik} + (\bar{\alpha} \circ \bar{\beta}) \otimes E_{ki} =$$
$$= 1/2\ [(\alpha_{ij})^*\ (\beta_{jk})^* + (\beta_{jk})^*\ (\alpha_{ij})^*] .$$

Ainsi A est isomorphe à l'algèbre obtenue en prenant dans l'espace des éléments "hermitiques" de $L \otimes M_n$ la loi de composition qui fait passer de (X, Y) à $(1/2)\ (XY + YX)$ $(X, Y \in L \otimes M_n)$.

Si $n \geqslant 4$, alors en prenant i , j , k , ℓ distincts, la formule (11) prouve que

$$((\alpha \circ \beta) \circ \gamma)_{i\ell} = 2(\alpha \circ \beta)_{ik}\ \gamma_{k\ell} = 4(\alpha_{ij}\ \beta_{jk})\gamma_{k\ell} =$$
$$= 4\,\alpha_{ij}(\beta_{jk}\ \gamma_{k\ell}) = (\alpha \circ (\beta \circ \gamma))_{i\ell} ,$$

par suite L est associative et $s \neq 8$. Donc, si $s = 8$ et $n > 2$, alors A est de degré 3 et sa dimension est 27 ; ce sont les algèbres de Jordan exceptionnelles. Dans les autres cas ($s = 1$, 2 ou 4) l'algèbre A possède une représentation linéaire fidèle (cf. ALBERT [1]). C'est une conséquence triviale de ce qui précède lorsque L est une algèbre à division.

7. Dérivations des algèbres de Jordan simples.

Soit A une algèbre de Jordan possédant une unité e . On désigne par $L(A)$ l'algèbre de Lie obtenue en prenant dans $E(A)$ le plus petit sous-espace qui contient les $R(x)$ et qui est fermé pour la loi $[X, Y] = XY - YX$. D'après

(5) , $L(A)$ est somme du sous-espace R engendré par $R(x)$ lorsque x parcourt A et du sous-espace S engendré par $[R(x), R(y)]$ lorsque x et y parcourent A . C'est même une somme directe car

$$e\,R(x) = x \quad \text{et} \quad e\,[R(x), R(y)] = 0 \quad \text{quels que soient } x, y \in A .$$

On désigne par $D(A)$ l'algèbre des <u>dérivations</u> de A . D'après (5) , les éléments de S sont des dérivations que l'on qualifie d'<u>intérieures</u>. On doit à Jacobson (cf. [4]) le

THÉORÈME 10. - Toutes les dérivations d'une algèbre de Jordan semi-simple sont intérieures.

Les méthodes de Jacobson prouvent en effet que $E(A)$ est une algèbre associative semi-simple et que $L(A)$ est somme directe de son centre et d'une algèbre semi-simple $L'(A)$. Si $D \in D(A)$, alors $XD - DX \in L(A)$ pour tout $X \in L(A)$ et l'endomorphisme D <u>de</u> $L(A)$ qui fait passer de X à $XD - DX$ est une dérivation de l'algèbre de Lie $L(A)$. Or cette dérivation D_L est certainement nulle sur le centre de $L(A)$ car ce centre appartient au centre de l'algèbre associative semi-simple $E(A)$ qui est une somme d'extensions algébriques du corps de base. Par suite, D_L est simplement une dérivation de l'algèbre de Lie semi-simple $L'(A)$; on sait qu'une telle dérivation est nécessairement intérieure, c'est-à-dire qu'il existe dans $L'(A)$ un Y tel que $XD - DX = XY - YX$ pour tout $X \in L(A)$. Pour $X = R(x)$, ceci prouve que

$$xD = eR(xD) = eR(x)D - eDR(x) = eR(x)Y - eYR(x) = x(Y - R(eY)) .$$

Par conséquent, $D \in L(A)$ et puisque $eD = (ee)D = 2eD = 0$, il en résulte que $D \in S$.

JACOBSON a identifié les algèbres de Lie $D(A)$ et $L'(A)$ lorsque A est une algèbre de Jordan non exceptionnelle (cf. [4]). Ce sont des algèbres semi-simples dont les composantes simples appartiennent aux classes non exceptionnelles. Par contre

THÉORÈME 12 (CHEVALLEY [3]). - Si A est une algèbre de Jordan simple exceptionnelle sur un corps algébriquement fermé, $D(A)$ est l'algèbre de Lie simple de type F_4 et $L'(A)$ est l'algèbre simple de type E_6 sur ce corps.

On se bornera à indiquer les étapes de la démonstration qui exige d'assez nombreuses vérifications.

Soit Q la sous-algèbre des dérivations de A nulles sur le sous-espace $Ke_1 + Ke_2 + Ke_3$ engendré par les idempotents primitifs orthogonaux. Avec les notations du paragraphe 2, les trois sous-espaces A_{ij} $(i = j)$ sont stables par toute dérivation $D \in Q$; de plus,

$f(xD , y) + f(x , yD)(e_i + e_j) = (xD)y + x(yD) = (xy)D = f(x , y)(e_i + e_j)D = 0$

quels que soient x , y A_{ij}. La restriction de $D \in Q$ à A_{ij} laisse donc invariante la forme $f(x , y)$. Inversement, tout endomorphisme de A_{ij} laissant cette forme invariante est somme d'endomorphismes transformant $z \in A_{ij}$ en $f(z , x)y - f(z , y)x = z [R(x) , R(y)]$ où x et y sont des éléments de A_{ij} ; c'est donc la restriction d'une dérivation $D \in Q$. Chacune de ces trois représentations linéaires de Q est fidèle ; on démontre en effet avec le lemme 3 que si $D \in Q$ est nulle sur un sous-espace A_{ij}, alors $D = 0$. Par conséquent, Q est une algèbre simple du type orthogonal (cf.(9)) de dimension 28. Soit $x_1 , x_2 , \dots , x_8$ une base orthogonale de A_{ij} ; on pose $H_{pq} = R(x_p) , R(x_q)$. Les dérivations H_{12}, H_{34}, H_{56} et H_{78} engendrent une sous-algèbre abélienne de Cartan C de Q. On vérifie que la famille des endomorphismes $H \in C$ est complètement réductible dans A et que les seuls zéros communs aux $H \in C$ sont les éléments de $Ke + Ke + Ke$.

Posons $D_{ij}(x) = [R(e_i - e_j) , R(x)]$ pour $i \neq j$ et $x \in A_{ij}$.

On a

$$e_i D_{ij}(x) = (1/2)x , \quad e_j D_{ij}(x) = (- 1/2)x , \quad e_k D_{ij}(x) = 0 ,$$

par conséquent, une dérivation de la forme

$$D_{12}(x) + D_{23}(y) + D_{31}(z)$$

n'est dans Q que si $x = y = z = 0$. Ces dérivations constituent donc un sous-espace de dimension $3 \times 8 = 24$ qui est supplémentaire de Q dans $D(A)$. Ainsi $D(A)$ a pour dimension 52. En utilisant la représentation adjointe de C dans $D(A)$, on constate que $D(A)$ est simple et admet C pour sous-algèbre de Cartan. C'est donc l'algèbre exceptionnelle F_4 de rang 4.

L'algèbre $L(A) = R + D(A)$ a pour dimension $27 + 52 = 79$. Son centre se réduit à $KR(e)$, où e est l'unité de A. Donc $L'(A)$ a pour dimension 78. On en obtient une sous-algèbre de Cartan en adjoignant à C les éléments $R(e_1 - e_2)$ et $R(e_1 - e_3)$. On vérifie alors que c'est l'algèbre exceptionnelle E_6 de rang 6.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALBERT (A. A.). - On Jordan algebras of linear transformations, Trans. Amer. math. Soc., t. 59, 1946, p. 524-555.

[2] ALBERT (A. A.). - A structure theory for Jordan algebras, Annals of Math., Series 2, t. 48, 1947, p. 546-567.

[3] CHEVALLEY (C.) and SCHAFER (R. D.). - The exceptional simple Lie algebras F_4 and E_6, Proc. nat. Acad. Sc., t. 36, 1950, p. 137-141.

[4] JACOBSON (N.). - Derivation algebras and multiplication algebras of semi-simple Jordan algebras, Annals of Math., Series 2, t. 50, 1949, p. 866-874.

[5] JORDAN (P.), von NEUMANN (J.) and WIGNER (E.). - On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism, Annals of Math., Series 2, t. 35, 1934, p. 29-64.