ARMAND BOREL

Sous-groupes compacts maximaux des groupes de Lie

Séminaire N. Bourbaki, 1952, exp. n° 33, p. 271-279
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1948-1951__1__271_0>

Séminaire BOURBAKI
(Décembre 1950)

SOUS-GROUPES COMPACTS MAXIMAUX DES GROUPES DE LIE

par Armand BOREL.

1. Enoncé du théorème principal.

Soient $A_1, \dots, A_n$ des sous-espaces fermés d'un groupe topologique G ; on pose $G = A_1.A_2 \dots A_n$ si tout $g \in G$ s'écrit d'une seule façon comme produit $g = a_1.a_2 \dots a_n$ $(a_i \in A_i)$, les a_i étant fonctions continues de g ; l'espace de G est alors homéomorphe au produit topologique $A_1 \times \dots \times A_n$. Cet exposé est consacré au

THÉORÈME. - Un groupe de Lie connexe G possède des sous-groupes compacts maximaux et tout sous-groupe compact est contenu dans l'un d'eux ; ils sont connexes et deux quelconques d'entre eux sont conjugués par un automorphisme intérieur de G.

Soit K l'un d'eux ; alors G est homéomorphe à $K \times R^s$.

On peut de plus trouver s sous-groupes fermés à 1 paramètre $H_1, \dots, H_s$, isomorphes à R, tels que $G = K.H_1.H_2 \dots H_s$.

COROLLAIRE. - Un groupe de Lie connexe possède un plus grand sous-groupe invariant compact : l'intersection de ses sous-groupes compacts maximaux.

L'existence de $H_1, \dots, H_s$ est due à IWASAWA. Le reste du théorème a été démontré par E. CARTAN pour les groupes semi-simples et les groupes simplement connexes, puis par IWASAWA et MALCEV dans le cas général. Les principales difficultés se présentent dans le cas semi-simple ; avant de l'aborder, un exemple (à comparer avec le lemme 3) :

EXEMPLE. - Le groupe $GL(n,C)$ des $n \times n$-matrices régulières sur C ; on sait que toute matrice régulière s'écrit d'une seule façon comme produit $u.h$ ($u \in U(n)$ = = groupe unitaire sur C^n, h hermitienne définie positive); d'autre part, l'application $a \longrightarrow \exp a$ est un homéomorphisme de l'espace des matrices hermitiennes sur celui des matrices hermitiennes définies positives et le 1e espace est évidemment homéomorphe à R^{n^2}, donc $GL(n,C)$ est homéomorphe à $U(n) \times R^{n^2}$ (cf. CHEVALLEY [6] p. 14-16) ; le théorème "de conjugaison" est bien connu.

2. G semi-simple de centre réduit à e.

RAPPEL. - Je note G^* l'algèbre de Lie de G ; c'est une algèbre sur R à n dimensions. Par extension du corps de base, on obtient à partir de G^* une algèbre de Lie sur C, à n dimensions, la "forme complexe" de G, que je noterai CG^* ; réciproquement, étant donnée une algèbre de Lie sur C à n dimensions, on appelle forme réelle de cette algèbre un sous-espace vectoriel sur R, ayant une base de n éléments indépendants sur C, et contenant le commutateur de 2 quelconques de ses éléments. Une algèbre sur C n'a pas forcément de forme réelle et si elle en a, elle peut en avoir plusieurs non isomorphes (dans le réel). Les automorphismes intérieurs $g \to aga^{-1}$ $(a, g \in G)$ de G induisent des automorphismes de G^*, identifié à l'espace tangent à G en e. On a ainsi une représentation de G, que nous désignons par $\mathrm{Int}\, G^*$. Si G est semi-simple, $\mathrm{Int}\, G^*$ est un sous-groupe fermé de $GL(n,R)$ et les topologies de $\mathrm{Int}\, G^*$ en tant que groupe de Lie et en tant que sous-espace de $GL(n,R)$ sont équivalentes. Soient $x, y \in G^*$; $\mathrm{ad}\, x$ désigne la dérivation intérieure $y \to [x,y]$ de G^* ; $\{\mathrm{ad}\, x,\ x \in G^*\}$ est l'algèbre de Lie $\mathrm{Ad}\, G^*$ de $\mathrm{Int}\, G^*$ (le commutateur étant naturellement défini par $[\mathrm{ad}\, x, \mathrm{ad}\, y] = \mathrm{ad}\, x \circ \mathrm{ad}\, y - \mathrm{ad}\, y \circ \mathrm{ad}\, x$). La forme bilinéaire "de Killing" $B(x,y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, x \circ \mathrm{ad}\, y)$ est non dégénérée si G^* est semi-simple et réciproquement (E. CARTAN) ; si elle est définie négative tout groupe ayant G^* comme algèbre de Lie est compact (WEYL). Si CG^* est une algèbre sur C, une forme réelle sur laquelle B est définie négative est dite forme réelle compacte ; un théorème fondamental de WEYL assure que toute algèbre de Lie sur C semi-simple admet une forme réelle compacte.

PROPOSITION 1. - Soit G semi-simple connexe de centre réduit à e. Alors G contient un sous-groupe compact connexe K tel que G soit homéomorphe à $K \times R^s$; K est un sous-groupe compact maximal de G.

Cette proposition résultera des lemmes 1, 2 et 3 ; le lemme 1 est aussi à la base de la classification des groupes semi-simples non compacts ; démontré par E. CARTAN ([4], n^{os} 20-22) à l'aide de la théorie des espaces riemanniens symétriques, il a été ensuite obtenu algébriquement par GANTMACHER ([7], paragraphe 2), puis par CHEVALLEY et MOSTOW ([10], Théorème 1 et lemme 2.1) :

LEMME 1. - Soit G^* une algèbre de Lie semi-simple sur R, CG^* sa forme complexe. On peut trouver une forme réelle compacte G^*_o de CG^* et une base $x_1, \ldots, x_m$, $y_1, \ldots, y_{n-m}$ de G^*_o telles que :

1) l'endomorphisme Θ défini par : $x_i \to x_i$ $(i = 1, \ldots, m)$, $y_j \to -y_j$ $(j = 1, \ldots, n-m)$ soit un automorphisme de G^*_o

2) $x_1, \ldots, x_m$, $iy_1, \ldots, iy_{n-m}$ soit une base (sur R) de G^*.

3) les matrices $\mathrm{ad}\, x_i$ et $\mathrm{ad}\, y_j$ soient antisymétriques réelles.

On peut envisager de façon évidente CG comme une algèbre sur R à $2n$ dimensions ; tout élément de CG considérée comme telle s'écrit $x + ix'$

$(x, x' \in G^*)$ et $\theta : x + ix' \to x - ix'$ est un automorphisme, admettant G comme ensemble de vecteurs fixes. Le point essentiel, dont la démonstration très technique ne peut être reproduite ici, consiste à montrer que θ laisse invariante une forme réelle compacte G_o^* de CG^* ([10] , Théorème 1). On peut alors trouver une base (sur R) $u_1,\dots,u_n$ de G_o^* par rapport à laquelle $B(u,v)$ est la forme bilinéaire unité précédée du signe moins ; l'égalité facile à établir $B([u,v], w) + B(v,[u,w]) = 0$ montre l'antisymétrie de $ad\ u$, qui est d'autre part évidemment réelle. De $\theta[u,v] = [\theta(u), \theta(v)]$ on tire $ad\ \theta(u) \circ ad\ \theta(v) = \theta \circ ad\ u \circ ad\ v \circ \theta^{-1}$, d'où $B(\theta(u), \theta(v)) = B(u,v)$, θ est donc représenté par une matrice orthogonale réelle, dont le carré est l'identité ; par une substitution orthogonale réelle on peut alors obtenir qu'une base de G_o^* vérifiant 1) et 3) reste vrai. Enfin, $x_1,\dots,x_m$, $iy_1,\dots,iy_{n-m}$ étant fixes par θ et linéairement indépendants forment une base de G^* , d'où 2).

$\{ad\ u\ ,\ u \in G_o^*\}$ est une sous-algèbre de $ad\ CG^*$ (considérée comme algèbre sur R) qui engendre un groupe orthogonal réel compact isomorphe à $Int\ G_o^*$; $\{ad\ u\ ,\ u \in G^*\}$ engendre un sous-groupe de $GL(n,C)$ semblable à $Int\ G^*$, donc fermé, et isomorphe à G , (puisque le centre de $G = e$) que nous identifierons à G .

Nous supposons donc dans la suite du n° 2 : G est un sous-groupe fermé de $GL(n,C)$; G^* a une base $x_1,\dots,x_m$, $iy_1,\dots,iy_{n-m}$ vérifiant le lemme 1 et de plus $ad\ x_i = x_i$, $ad\ y_j = y_j$.

REMARQUE. - Soit X (resp. Y), l'espace sur R sous-tendu par $x_1,\dots,x_m$ (resp. $y_1,\dots,y_{n-m}$) ; du fait que θ est un automorphisme on tire :

$$[X, X] \subset X \qquad [X, Y] \subset Y \qquad [Y, Y] \subset X$$

Posons $[y_j, y_k] = c^s_{m+j,m+k}\ x_s$, $[x_j, y_k] = c^{m+s}_{j,m+k}\ y_s$; l'antisymétrie des $ad\ y_k$ montre $c^{m+s}_{m+k,j} = - c^j_{m+k,m+s} = c^j_{m+s,m+k}$

enfin on a dans G^* , $[iy_j iy_k] = - c^s_{m+j,m+k}\ x_s$, $[x_j, iy_k] = c^{m+s}_{j,m+k}\ (iy_s)$

LEMME 2. - Toutes les matrices hermitiennes définies positives de G sont de la forme $\exp(\sum ia_j\ y_j)$, (a_j réels) ; elles forment un sous-espace fermé H de G , homéomorphe à R^{n-m} .

Soit $g \in H$ hermitienne définie positive et u la matrice hermitienne telle que $g = \exp u$; à montrer : $u = i(a_1 y_1 + \dots + a_{n-m}\ y_{n-m})$; après un changement de base on peut supposer que u est diagonale, soient $c_1,\dots,c_n$ ses valeurs propres (réelles) ; $g \in \operatorname{Int} CG^*$, donc $g^k \in \operatorname{Aut} CG^*$ $(k = \pm 1, \pm 2, \dots)$ ce qui se traduit par un nombre fini d'égalités $P(\exp kc_1,\dots,\exp kc_n) = 0$, où P est un polynôme. Les c_i étant réels on a aussi $P(\exp . tc_1,\dots,\exp tc_n) = 0$ pour t réel quelconque ; cela montre que $\exp tu \in \operatorname{Aut} CG^*$, donc u est une dérivation, forcément intérieure, de CG^*, c'est-à-dire $u \in \operatorname{ad} CG^*$ est combinaison linéaire à coefficients purement imaginaires de $x_1,\dots,y_{n-m}$. D'autre part θu est aussi hermitienne et g est fixe par θ (envisagé comme automorphisme de $\operatorname{Int} CG^*$) donc $\theta u = u$, d'où $u = i(a_1 y_1 + \dots + a_{n-m} y_{n-m})$; le reste du lemme est trivial.

Si h_1, $h_2 \in H$ alors $(h_1\, h_2\, h_1) \in H$ car pouvant être relié par une suite continue de matrices hermitiennes régulières à une matrice définie positive h_2, elle est elle-même définie positive. $U_h : h \to h_1 h\, h_1$ est un homéomorphisme de H sur elle-même ; c'est une <u>transvection</u> au sens de E. CARTAN.

LEMME 3. – $x_1,\dots,x_m$ <u>engendrent un sous-groupe compact connexe</u> K <u>de</u> G, <u>et</u> $G = K.H$; K <u>est compact maximal dans</u> G.

$x_1,\dots,x_m$ engendrent dans $\operatorname{Int} G_o^*$ la composante connexe K de e du sous-groupe des éléments fixes par θ ; K est donc fermé et compact. On voit aisément que $K.H$ est fermé dans G. Montrons qu'il y est ouvert. Soit $g = k_o . h_o \in K.H$ et h l'unique matrice hermitienne définie positive telle que $h.h = h_o$; $h \in H$ et de plus $h^{-1} K h \cap H = \{e\}$ car si $h \in H$, $h \neq e$, ses puissances h^k $(k = \pm 1, \dots)$ n'ont pas des coefficients uniformément bornés ; H est alors au voisinage de e une section locale de la fibration de G par $h^{-1}Kh$ et

$$h^{-1}Kh.H = h^{-1}Kh.h^{-1}H\,h^{-1} = h^{-1}K.H\,h^{-1}$$

est un voisinage de e dans G ; par conséquent

$$k_o h.(h^{-1}\,K.H\,h^{-1})h = k_o\,KH = K.H$$

est un voisinage de $k_o . h_o$ dans G ; la continuité de k_o, h_o comme fonctions de g est triviale.

Enfin, K est compact maximal, car un groupe compact plus grand contiendrait, vu le lemme 3, un $h \in H$, $h \neq e$ dont les puissances ne seraient pas uniformément bornées, ce qui est absurde.

PROPOSITION 2. - Tout sous-groupe compact K' de G est conjugué à un sous-groupe de K par un automorphisme intérieur de G.

La démonstration est de E. CARTAN ([4], n° 16). Soit $g = k.h$, k est orthogonale réelle, h hermitienne définie positive et $k\,h\,h'\,h\,k^{-1} = g.h'.\bar{g}^{-1}$ ($\bar{g}$ complexe conjuguée de $g = \theta g$) est hermitienne définie positive si h' l'est. Nous faisons correspondre de la sorte à $g \in G$ un homéomorphisme U_g de H sur elle-même. On obtient donc un homomorphisme de G dans le groupe des homéomorphismes de H sur elle-même. Soit $h \in H$ et $h^{1/2}$ sa racine carrée définie positive, $h^{1/2} \in H$ et l'ensemble des $g \in G$ pour lesquels U_g laisse h fixe est $(h^{1/2}\,K\,h^{-1/2})$. C'est un sous-groupe conjugué de K. Il suffit donc pour obtenir la proposition 2 de montrer que les transformations U_k $(k \in K')$ ont un point fixe commun. C'est pour obtenir cela qu'il est nécessaire (du moins dans l'état actuel de la question) d'introduire des considérations de géométrie riemannienne. La proposition 2 résultera des lemmes 4 et 5.

LEMME 4. - On peut définir sur H une métrique riemannienne à courbure de Riemann négative ou nulle, invariante par les transformations U_g $(g \in G)$.

Dans l'espace tangent à H en e, on prend comme forme quadratique $B(iy, iy) =$ = somme des carrés des valeurs propres de iy ; dans notre système de coordonnées, c'est la forme unité ; ensuite on transporte cette métrique par les transvections U_h ; l'invariance évidente de B par les transformations U_k du groupe de stabilité K de e montre que cette métrique est invariante par les transformations U_g $(g \in G)$. On montre de plus que les géodésiques issues de e sont les sous-groupes à 1 paramètre $\exp ity$, que la transvection U_h réalise le transport par parallélisme de e à h^2 le long de la géodésique qui les joint, et que $\theta h = \bar{h} = h^{-1}$; la symétrie, par rapport à e, est une isométrie, H est donc un espace symétrique, au sens de E. CARTAN. Enfin, pour le tenseur de courbure on a la formule

$$R^s_{r,jk}\,(iy_s) = -\,(1/4)\,[[iy_j, iy_k], iy_r] \tag{A}$$

d'où en utilisant la remarque ci-dessus :

$$R^s_{r,jk} = (1/4)\;c^t_{n+j,n+k}\,[x_t, iy_r] = (1/4)\sum_t c^t_{n+j,n+k}\,c^t_{n+r,n+s}$$

En appliquant la formule (19), de E. CARTAN dans [5] on voit que la courbure de Riemann dans la direction du 2-plan soustendu par iy_j et iy_k est

$$(A') \qquad -R_{jk,jk} = -R^k_{j,jk} = -\sum_t (c^t_{n+j,n+k})^2 \leqslant 0$$

cela vaut pour toute direction plane de l'espace tangent en e , donc pour les directions planes issues des autres points vu la transitivité du groupe des isométries.

Les calculs de E. CARTAN qui conduisent à (A') me paraissent contenir deux fautes de signe qui se compensent. Tout d'abord dans [2],à la p. 64, le signe $-$ de la formule (6) n'est pas repris dans (7) ni dans les formules du haut de la p. 65, d'où la différence de signe avec (A). Ensuite dans [3] , p. 383, il part de cette formule (sans le signe $-$) dans laquelle doivent figurer les constantes de structure de G et non pas celles de la forme compacte G_o (désignés par Γ , resp. Γ_u) ; or CARTAN dit que l'on peut faire en sorte que les constantes de structure de G_o forment un trivecteur (c'est l'antisymétrie signalée dans le lemme 1), puis il applique cette règle pour trouver $R_{jk,jk}$ aux constantes de structure de G ; or certaines de ces dernières diffèrent par le signe des constantes de structure correspondantes de G_o (cf. la remarque ci-dessus et on voit facilement que cela donne encore un changement de signe, d'où (A')).

LEMME 5. - Les transformations d'un groupe compact N d'isométries (différentiables) d'un espace de Riemann H simplement connexe, à courbure non positive, admettent un point fixe commun.

Soit dv la mesure de Haar sur N , $d(P,Q)$ la distance de P et Q , $n(P)$ le transformé de P par $n \in N$; on sait([5] Note III) que P et Q sont reliés par une seule géodésique $\overline{PQ}$ et que si Q_o est un 3e point de H :

$$(B) \qquad d^2(P,Q) \geqslant d^2(P,Q_o)+d^2(Q,Q_o) - 2d(P,Q_o).d(Q,Q_o) \cos (\overline{Q_oP}, \overline{Q_oQ})$$

Soit $S \in H$ choisi une fois pour toutes et

$$J(Q) = \int_N d^2(n(S),Q)\, dv_n \ ;$$

soit Q_o un point pour lequel $\delta J = 0$; pour montrer que $n(Q_o) = Q_o$ $(n \in N)$ il suffit, puisque $J(n(Q_o)) = J(Q_o)$, de savoir que $J(Q) > J(Q_o)$ si $Q \neq Q_o$ or $\delta J = 0$ se traduit par

$$\int_N d(n(S),Q_o) \cos (\overline{Q_o\, n(S)}, \overline{Q_oQ})\, dv_n = 0$$

et il suffit d'intégrer terme à terme (B) (en remplaçant P par $n(S)$) pour obtenir l'inégalité cherchée, d'où finalement la proposition 2.

L'existence des H_i résulte aisément de la proposition 3. La démonstration (cf. [8], p. 525-529) s'appuie sur le lemme 1 ; ce n'est donc pas à proprement parler une nouvelle démonstration de la proposition 1 ; elle indique que l'on peut prendre comme section de la fibration de G par K un sous-groupe au lieu de H ; elle n'est (actuellement) d'aucune utilité pour obtenir la proposition 2.

PROPOSITION 3. - Soit G semi-simple de centre réduit à e. Il possède un sous-groupe compact connexe K et un sous-groupe résoluble simplement connexe L tels que $G = K.L.$

3. G semi-simple ou G extension de R^s par un compact.

Soient G semi-simple, Z son centre (discret), $G' = G/Z$, K' compact maximal dans G', K son image réciproque dans G ; de $G/K = G'/K' = R^s$ on tire que K est connexe et même, en utilisant le théorème de Feldbau, que G est homéomorphe à $K \times R^s$; K n'est pas forcément compact, mais c'est un revêtement d'un groupe compact, donc $K = K_1 \times R^p$ et K_1 est le plus grand sous-groupe compact de K, donc compact maximal dans G ; d'où la proposition 1 pour G ; la proposition 2 est immédiate. Si l'on admet dans G' l'existence de $H'_1,\dots,H'_s$ tels que $G' = K'.H'_1,\dots,H'_s$ on peut éviter le recours au théorème de Feldbau ; il suffit de prendre dans G des sous-groupes H_i appliqués isomorphiquement sur les H'_i, et des sous-groupes $H_{s+1},\dots,H_{s+p}$ tels que $R^p = H_{s+1} \times\dots\times H_{s+p}$, alors $G = K_1.H_1 \dots H_{s+p}$.

Soit maintenant G extension de R^s par un compact K'. On sait (cf. [11]) que la fibration de G par R^s a un sous-groupe section K et que 2 groupes sections sont conjugués. Il reste à voir qu'un sous-groupe compact K_1 non section est conjugué à un sous-groupe de K ; tout élément de K_1 s'écrit d'une seule façon sous la forme $r.k$ ($r \in R^s$, $k \in K$) et l'application $r.k \to k$ est un isomorphisme de K_1 dans un sous-groupe K_2 de K (biunivocité à cause de $R^s \cap K_1 = \{e\}$). Alors $R^s.K_2$ est un groupe et sa fibration par R^s admet comme sections, K_1 et K_2 qui sont donc conjugués.

4. Le cas général.

Démonstration par récurrence sur la dimension de G ; c'est trivial pour $\dim G = 1$; admettons que le théorème soit vrai pour les groupes de $\dim < \dim G$; on peut supposer que G est non semi-simple, il possède alors un sous-groupe invariant connexe abélien $N \neq \{e\}$, on sait que $N = T^p \times R^q$ (T^p tore à p

dimensions).

a) $\underline{p > 0}$. T^p est le plus grand sous-groupe compact de N et est donc invariant <u>dans G</u> . Soit $G' = G/T^p$; les images réciproques des sous-groupes compacts maximaux de G' sont évidemment les sous-groupes compacts maximaux de G et sont connexes et conjugués les uns des autres ; si K est l'un d'eux, K' son image dans G' , $G/K = G'/K' = R^s$ donne, d'après le théorème de Feldbau, G homéomorphe à $K \times R^s$.

b) $\underline{p = 0}$, $\underline{N = R^q}$. Soit K' compact maximal dans $G' = G/N$, K son image réciproque dans G ; alors $K = K_1 . N$ et K_1 est compact maximal dans K et G . De plus un sous-groupe compact de G est conjugué à un sous-groupe de K , donc (cf. n° 3) de K_1 ; enfin, G homéomorphe à $K \times R^s$, (donc à $K_1 \times R^{q+s}$) s'obtient de nouveau par le théorème de Feldbau.

Dans les cas a) et b) , on peut de nouveau obtenir les H_i et éviter d'utiliser le théorème de Feldbau en "remontant" des sous-groupes à 1 paramètre de G' .

5. <u>Un complément.</u>

C'est le théorème suivant, dû à IWASAWA ([8] lemme 3.13) :

<u>Soient</u> G <u>de Lie connexe,</u> N <u>un sous-groupe invariant connexe</u> , K_1 <u>compact maximal dans</u> N, K' <u>compact maximal dans</u> G/N .

<u>Alors il existe un sous-groupe</u> K <u>compact maximal de</u> G <u>tel que</u> $N \cap K_1 = K$ <u>et que</u> $KN/N = K'$.

On traite tout d'abord les cas N semi-simple (pas immédiat), $N = R^p$, $N = T^q$, puis on fait une démonstration par récurrence sur la dimension de N .

BIBLIOGRAPHIE

[1] CARTAN (Elie). - La géométrie des groupes simples, Ann. di Mat., t. 4, 1927, p. 209-256.

[2] CARTAN (Elie). - La géométrie des groupes de transformations, J. Math. pures et appl., t. 6, 1927, p. 1-119.

[3] CARTAN (Elie). - Sur certaines formes riemanniennes remarquables des géométries à groupe fondamental simple, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., t. 44, 1927, p. 345-467.

[4] CARTAN (Elie). - Groupes simples clos et ouverts et géométrie riemannienne, J. Math. pures et appl., t. 8, 1929, p. 1-33.

[5] CARTAN (Elie). - Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann, 2e éd. - Paris, Gauthier-Villars, 1946 (Cahiers scientifiques, 2).

[6] CHEVALLEY (Claude). - Theory of Lie groups, I. - Princeton, Princeton University Press, 1946.

[7] GANTMACHER (Felix). - Canonical representation of automorphisms of a complex semi-simple Lie group, Mat. Sbornik, N. S., t. 5 (47), 1939, p. 101-146.

[8] IWASAWA (K.). - On some types of topological groups, Ann. of Math., t. 50, 1949, p. 507-558.

[9] MALČEV (A.). - On the theory of the Lie groups in the large, Mat. Sbornik, N.S., t. 16 (58), 1945, p. 163-190.

[10] MOSTOW (George-Daniel). - A new proof of E. Cartan's theorem on the topology of semi-simple groups, Bull. Amer. math. Soc., t.55, 1949, p. 969-980.

[11] SERRE (Jean-Pierre). - Extensions de groupes localement compacts, Séminaire Bourbaki, t. 2, 1949/50.

ADDITIF

Divers compléments au théorème fondamental et une simplification dans l'obtention de l'inégalité (B) se trouvent dans :

MOSTOW (George-Daniel). - Some new decomposition theorems for semi-simple groups, Lie algebras and Lie groups. - Princeton, American mathematical Society, 1955 (Memoirs Amer. math. Soc. n° 14), p. 31-54.

MOSTOW (George-Daniel). - On covariant fiberings of Klein spaces, Amer. J. Math., t. 77, 1955, p. 247-277.

[Juin 1957]