HENRI CARTAN

Espaces fibrés analytiques complexes

Séminaire N. Bourbaki, 1952, exp. nº 34, p. 281-290

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1948-1951__1__281_0>

Séminaire BOURBAKI
(Décembre 1950)

ESPACES FIBRÉS ANALYTIQUES COMPLEXES

par Henri CARTAN

1. Définitions.

Une "variété à structure analytique-complexe", ou, plus brièvement, une variété analytique-complexe, est, en gros, une variété (connexe) de dimension paire $2n$, munie de systèmes de "coordonnées locales" (systèmes de n fonctions complexes), le passage d'un système de coordonnées locales à un autre s'effectuant au moyen d'une transformation analytique-complexe (à jacobien $\neq 0$). L'entier n est la dimension complexe de la variété.

Un groupe de Lie complexe G opère (à droite) dans une variété analytique-complexe E si on s'est donné une application analytique $(x, s) \to x.s$ de $E \times G$ dans E, telle que $x.e = x$ (e : élément neutre) et que $(x.s).t = x.(st)$ pour $x \in E$, s et $t \in G$.

Une variété analytique-complexe E dans laquelle opère un groupe de Lie complexe G est un espace fibré (principal) de fibre G si chaque "fibre" (i.e.: classe d'équivalence définie par G) possède un voisinage ouvert V, stable pour G, tel qu'il existe un isomorphisme de V sur un produit $U \times G$, où U est une variété analytique-complexe ; "isomorphisme" s'entend au sens de la structure analytique-complexe et de la structure d'espaces ayant G comme groupe d'opérateurs, et l'espace $U \times G$ (muni de la structure analytique-complexe produit de celles de U et de G) est muni du groupe d'opérateurs G comme suit : $(u,g).s = (u,gs)$. Ceci entraîne que les fibres de E sont isomorphes à G ; l'espace quotient de E par la relation d'équivalence définie par G s'appelle espace de base ; notation : B. C'est une variété analytique-complexe.

L'espace fibré E de fibre G est trivial s'il est isomorphe au produit $B \times G$.

Précisons bien : puisque le mot "isomorphe" est entendu au sens de la structure analytique, on vient de définir la trivialité au sens analytique, qu'il ne faut pas confondre avec la trivialité au sens topologique (ou au sens différentiable, etc.).

Cartes locales. - Recouvrons l'espace de base par des ouverts U_i, assez petits pour que leurs images réciproques V_i dans E soient isomorphes aux produits $U_i \times G$. Une carte locale est un isomorphisme φ_i de V_i sur $U_i \times G$; alors, si

$U_i \cap U_j \neq \emptyset$, $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ est un automorphisme de $(U_i \cap U_j) \times G$, de la forme

$$(u,g) \longrightarrow (u, f_{ji}(u)g) \quad .$$

Réciproquement, donnons-nous arbitrairement un espace B , un recouvrement de B par des ouverts U_i , et dans chaque intersection non vide $U_i \cap U_j$, une application analytique f_{ij} de $U_i \cap U_j$ dans le groupe G , de manière que si $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$, on ait $f_{ij}f_{jk} = f_{ik}$, ce qui entraîne que $f_{ii} = e$ (fonction constante dont la valeur est l'élément neutre e de G), et que $f_{ij}f_{ji} = e$. Alors le système de ces f_{ij} définit un espace fibré (analytique) de fibre G : on prend la "somme" des espaces produits $U_i \times G$, et on en fait le quotient par la relation d'équivalence

$$(x_i , g) \equiv (x_j , g') \quad \text{si} \quad x_i = x_j \in U_i \cap U_j \quad \text{et} \quad g' = f_{ji}(x_i)g \quad .$$

On n'a fait que transposer les notions classiques relatives aux espaces fibrés, mais ici on trouve comme espace fibré une variété à structure analytique-complexe.

Pour qu'un espace fibré principal soit analytiquement trivial, il faut et il suffit qu'il possède une <u>section analytique</u>. On appelle ainsi une application <u>analytique</u> de B dans E , qui transforme chaque point x de B en un point de la fibre située au-dessus de x . En cartes locales : pour que E soit analytiquement trivial, il faut et il suffit qu'il existe, pour chaque U_i , une application analytique f_i de U_i dans G , de manière que, dans $U_i \cap U_j$, $f_{ij} = f_i^{-1} f_j$.

2. Exemples.

<u>Recherche d'une fonction méromorphe ayant des parties infinies données</u>. - Une variété analytique-complexe B est donnée ; dans chaque U_i d'un recouvrement ouvert de B , on se donne une fonction méromorphe h_i , de manière que, dans $U_i \cap U_j$, $h_j - h_i$ soit une fonction <u>holomorphe</u> f_{ij} ("donnée de Cousin"). Les f_{ij} définissent un espace fibré de base B , ayant pour fibre <u>le groupe additif</u> C <u>des nombres complexes</u>. Dire qu'un tel espace est trivial, équivaut à dire que $f_{ij} = f_j - f_i$, chaque f_i étant holomorphe dans l'ouvert U_i correspondant ; c'est aussi la condition pour qu'il existe une fonction méromorphe h dans B , telle que, dans chaque U_i , $h - h_i$ soit holomorphe (fonction méromorphe ayant des parties infinies données ; "premier problème de Cousin").

<u>Recherche d'une fonction holomorphe multiforme, localement uniforme, ayant des périodes données</u>. - Une fonction holomorphe multiforme sur B , partout prolongeable analytiquement sans être globalement uniforme, n'est pas autre chose que la

primitive d'une forme différentielle (analytique-complexe) de degré un, fermée (i.e.: dont la différentielle extérieure est nulle). Une telle forme s'appelle une différentielle de première espèce. Pour chaque lacet de B, l'intégrale de la forme ω est une fonction (à valeurs complexes) du lacet, qui ne dépend que de sa classe d'homologie ; d'où un homomorphisme du groupe d'homologie $H_1(B)$ (homologie à coefficients entiers, pour la dimension 1) dans le groupe additif C. Comme cet homomorphisme est nul sur le sous-groupe de torsion de $H_1(B)$, il définit un homomorphisme du groupe de Betti $H'_1(B)$ dans C. C'est cet homomorphisme qu'on peut appeler le "système des périodes" de la différentielle de première espèce ω.

PROBLÈME. - Etant donné un homomorphisme de $H'_1(B)$ dans C, chercher, s'il en existe, une différentielle de première espèce ω qui lui donne naissance (d'après le théorème de de Rham, il existe toujours une forme différentielle fermée qui répond à la question ; mais ce n'est pas, en général, une forme différentielle analytique-complexe).

Or la donnée d'un homomorphisme p du groupe d'homotopie $\pi_1(B)$ dans C définit un espace fibré de fibre C, comme suit : considérons l'espace produit $\tilde{B} \times C$, où $\tilde{B}$ est le revêtement universel de B ; pour tout élément α du groupe fondamental $\pi_1(B)$, identifions les points $(\tilde{b}, c)$ et $(\alpha . \tilde{b}, c + p(\alpha))$. Or $\tilde{B} \times C$ est espace fibré (trivial) de base $\tilde{B}$ et de fibre C ; en passant au quotient, on obtient un espace fibré E de base B et de fibre C. Une section (analytique) de E n'est autre qu'une fonction holomorphe sur $\tilde{B}$, admettant le système de périodes donné. Ainsi : pour qu'il existe une différentielle de première espèce admettant le système donné de périodes, il faut et il suffit que l'espace fibré, de fibre C, défini par ce système de périodes, soit trivial.

Recherche d'une fonction holomorphe (resp. méromorphe) admettant des variétés de zéros donnés, affectées d'ordres de multiplicité (resp. des variétés de zéros et des variétés polaires données). - On se donne un recouvrement de B par des ouverts U_i, et dans chaque U_i on se donne une fonction holomorphe h_i (resp. une fonction méromorphe h_i) de manière que, dans $U_i \cap U_j$, h_j/h_i soit holomorphe et $\neq 0$ ("donnée de Cousin de 2e espèce"). Les $f_{ij} = h_j/h_i$ sont des applications analytiques des $U_i \cap U_j$ dans le groupe C^* (groupe multiplicatif des nombres complexes $\neq 0$), d'où un espace fibré de base B, ayant pour fibre le groupe C^*. Dire qu'un tel espace est trivial, c'est dire qu'il existe des applications analytiques f_i de U_i dans C^*, telles que $f_{ij} = f_j/f_i$, ce qui exprime qu'il existe une fonction holomorphe (resp. méromorphe) h dans B, telle que, dans chaque U_i, h/h_i soit holomorphe et $\neq 0$.

REMARQUE. - La donnée de Cousin des h_i revient à la donnée d'une famille, partout régulière dans B, de sous-variétés analytiques de dimension (complexe) $n-1$, dont chacune est affectée d'un ordre de multiplicité (entier >0 pour une variété de zéros, entier <0 pour une variété polaire). C'est ce qu'on appelle un <u>diviseur</u> dans le langage de la géométrie algébrique (mais ici, il s'agit de "diviseur" au sens analytique-complexe).

3. Domaines d'holomorphie.

On étudiera particulièrement 2 catégories d'espaces B. Tout d'abord, les <u>domaines d'holomorphie</u> : en gros, ce sont les variétés analytiques-complexes B susceptibles d'être appliquées analytiquement dans l'espace numérique C^n, d'une manière localement biunivoque, et qui sont réunion d'une suite croissante de "polyèdres analytiques" ; un polyèdre analytique de B est un sous-ensemble compact P de B qu'on peut définir comme suit : c'est une composante connexe (supposée compacte) de l'ensemble des points de B qui satisfont à certaines inégalités en nombre fini $|F_k(x)| \leqslant 1$, les F_k étant des fonctions holomorphes dans B. On montre ([1], [2]) que toute fonction holomorphe dans P est limite uniforme de polynômes par rapport aux F_k, donc limite uniforme de fonctions holomorphes dans B.

THÉORÈME 1. - <u>Si</u> B <u>est un domaine d'holomorphie, tout espace fibré de base</u> B, <u>ayant pour fibre le groupe additif</u> C, <u>est trivial</u>.

<u>Principe de la démonstration</u>, inspirée de OKA :

1°) on montre que l'espace est trivial au-dessus de tout compact de B ;

2°) on passe à la limite, grâce à l'approximation des fonctions analytiques sur les polyèdres compacts de B. Pour 1°), le point essentiel est le :

LEMME. - Soient P un polyèdre analytique, x l'une des variables complexes de l'espace ambiant C^n dans lequel est plongé P ; d_1 et d_2 deux ensembles compacts du plan de la variable x ; P_1 et P_2 les intersections de P avec les ensembles $x \in d_1$, $x \in d_2$ respectivement. Alors, si un espace fibré de fibre C, dont la base est un voisinage de P, est trivial au-dessus d'un voisinage de P_1, et trivial au-dessus d'un voisinage de P_2, il est trivial au-dessus d'un voisinage de P (on le montre en prouvant que toute fonction holomorphe dans

$P_1 \cap P_2$ est différence d'une fonction holomorphe dans P_1 et d'une fonction holomorphe dans P_2).

COROLLAIRE 1. - Pour un domaine d'holomorphie B , le premier problème de Cousin a toujours une solution (OKA, [1]).

COROLLAIRE 2. - Si B est un domaine d'holomorphie, il existe toujours une différentielle de première espèce ayant un système de périodes arbitrairement donné.

4. Variétés kählériennes compactes.

On appelle ainsi une variété analytique-complexe, compacte, et susceptible d'être munie d'une métrique kählérienne, c'est-à-dire d'une métrique hermitienne sans torsion (cf. [3]) : forme différentielle quadratique hermitienne $\sum_\nu \omega_\nu \bar{\omega}_\nu$ définie positive, telle que la forme extérieure associée $\Omega = \sum_\nu \omega_\nu \wedge \bar{\omega}_\nu$ satisfasse à $d\Omega = 0$. Exemple : toute variété algébrique plongée sans singularités dans un espace projectif complexe est une variété kählérienne.

Comme l'a remarqué A. WEIL, [4] de nombreux théorèmes démontrés par HODGE [5] pour les variétés algébriques valent pour les variétés kählériennes en général. Par exemple : les formes différentielles fermées de degré 1 , analytiques (autrement dit, les "différentielles de première espèce") et leurs complexes-conjuguées constituent un espace vectoriel sur le corps complexe, dont la dimension est égale au premier nombre de Betti de B (qui est donc pair). En d'autres termes : il existe une forme différentielle de première espèce, et une seule, dont les périodes aient pour parties réelles un système arbitrairement donné.

Le fait qu'on ne puisse pas se donner arbitrairement les périodes d'une différentielle de première espèce entraîne la conséquence que voici : il existe des espaces fibrés de base B , de fibre C , non triviaux (mais un tel espace est toujours topologiquement trivial).

Nous allons classifier les espaces fibrés de fibre C , dont la base B est une variété compacte kählérienne. Tout d'abord, pour que deux systèmes de périodes définissent des espaces fibrés isomorphes, il faut et il suffit qu'il existe une différentielle de première espèce dont les périodes soient égales à la différence des deux systèmes. Un espace fibré associé à un système de périodes possède donc un invariant, à savoir un système de périodes réelles ; autrement dit, un homomorphisme de $H_1(B)$ dans le groupe additif R des réels ; ou encore : un élément du premier groupe de cohomologie à coefficients réels $H^1(B, R)$.

Nous allons voir qu'il n'existe pas d'autres espaces fibrés de fibre C que les précédents, et que le seul invariant d'un espace fibré de fibre C est donc l'élément de $H^1(B, R)$, dont la nullité est nécessaire et suffisante pour qu'il soit trivial.

THÉORÈME 2. - Tout espace fibré de fibre C, dont la base est une variété kählérienne compacte, possède une "section analytique périodique". Autrement dit, si on considère l'espace fibré image réciproque ayant pour base le revêtement universel de la base de l'espace fibré donné, ce nouveau fibré possède une section analytique.

Principe de la démonstration : B est recouvert par des U_i, et, dans $U_i \cap U_j$, on a une fonction analytique $f_{ij} = -f_{ji}$, avec $f_{ij} + f_{jk} = f_{ik}$ dans $U_i \cap U_j \cap U_k$. On peut d'abord trouver des g_i indéfiniment différentiables telles que $f_{ij} = g_j - g_i$ (en fait, g_i est définie dans un ouvert un peu plus petit que U_i). Puis on peut s'arranger pour que les g_i soient "harmoniques". Alors $dg_i = \omega_i + \bar{\omega}_i$, où la forme différentielle ω_i ne dépend que des différentielles des coordonnées locales, et où $\bar{\omega}_i$ ne dépend que des différentielles des conjuguées des coordonnées locales ; les formes ω_i et $\bar{\omega}_i$ sont fermées. On a $df_{ij} = \omega_j - \omega_i$, et $\bar{\omega}_i = \bar{\omega}_j$, de sorte que $\bar{\omega}_i$ est la restriction, à U_i, d'une forme fermée $\bar{\omega}$ définie sur tout B. C'est la conjuguée d'une forme différentielle de première espèce ; soit h une primitive (non uniforme) ; alors $g_i - h = f_i$ est une fonction holomorphe dans U_i, définie à des périodes près, et on a $f_{ij} = f_j - f_i$ aux périodes près. C.Q.F.D.

5. Espaces fibrés dont la fibre est le groupe C^*.

Le groupe fondamental de l'espace C^* étant le groupe additif des entiers Z, on sait, par la topologie, qu'un espace fibré de fibre C^* et de base B possède un invariant topologique, une "obstruction", élément du groupe de cohomologie $H^2(B, Z)$ pour la dimension 2. On peut le retrouver comme suit : recouvrons B par des ouverts U_i simplement connexes, assez petits pour que l'espace fibré E soit trivial au-dessus de chaque U_i. La structure fibrée est définie par des applications analytiques f_{ij} de $U_i \cap U_j$ dans C^*, et $\log f_{ij}$ est uniforme dans $U_i \cap U_j$. Choisissons une détermination g_{ij} de $\frac{1}{2\pi i} \log f_{ij}$. Alors, dans $U_i \cap U_j \cap U_k$, $g_{ij} + g_{jk} + g_{ki}$ est un entier c_{ijk} (réel). Le système de ces entiers définit un cocycle de dimension 2 de l'espace B, dont la classe de cohomologie est l'élément $u \in H^2(B, Z)$ cherché. La condition $u = 0$ est nécessaire et suffisante pour que l'on puisse choisir des déterminations des g_{ij} de manière que $g_{ij} + g_{jk} + g_{ki}$ soit toujours nul. Alors les g_{ij} définissent un espace fibré F dont la fibre est le groupe additif C. Et pour que l'espace initial E soit trivial, il faut et il suffit que l'espace F possède une section périodique à périodes entières (réelles).

Tout ceci vaut pour toute variété analytique-complexe B. Si B est domaine d'holomorphie, F possède toujours une section (à périodes nulles) ; donc : pour que l'espace fibré E, de fibre C^*, soit analytiquement trivial, il faut et il suffit que son invariant topologique $u \in H^2(B, Z)$ soit nul. (cf. [1 bis] . Supposons maintenant que B soit une variété kählérienne compacte : l'espace F possède toujours une section périodique à périodes réelles, et celles-ci sont univoquement déterminées. Pour que l'espace fibré initial E, de fibre C^*, soit trivial, il faut et il suffit que ces périodes réelles soient entières. Donc : lorsque B est kählérienne, et que l'invariant $u \in H^2(B, Z)$ est nul, l'espace fibré E possède un nouvel invariant, élément du quotient de $\mathrm{Hom}(H_1(B), R)$ par l'image de $\mathrm{Hom}(H_1(B), Z)$; la nullité de ce second invariant est nécessaire et suffisante pour la trivialité de l'espace E.

REMARQUE. - Le quotient de $\mathrm{Hom}(H_1(B), R)$ par l'image de $\mathrm{Hom}(H_1(B), Z)$ est isomorphe au groupe des homomorphismes du groupe de Betti $H_1'(B)$ dans le groupe T (groupe additif des réels modulo 1).

Les résultats précédents s'interprètent dans le cas du 2e problème de Cousin : le "diviseur" définit une classe d'homologie de B, de dimension $2n-2$, à coefficients entiers ; par la "dualité des variétés", il lui correspond canoniquement un élément du groupe de cohomologie $H^2(B, Z)$: c'est l'invariant topologique u de l'espace fibré E défini par la donnée de Cousin. S'il est nul, et si B est domaine d'holomorphie, il existe une fonction méromorphe (uniforme) dans B admettant le diviseur donné. S'il est nul, et si B est kählérienne, il existe aussi une telle fonction méromorphe, mais elle n'est plus uniforme : elle se reproduit multipliée par une constante complexe de valeur absolue égale à un quand on décrit un lacet, mais n'est pas changée par un lacet dont un multiple entier est homologue à zéro.

6. Formes différentielles méromorphes ayant des singularités données.

On se bornera aux formes fermées de degré 1, qui s'écrivent (localement) comme combinaisons linéaires des différentielles des coordonnées complexes locales, à coefficients méromorphes (cf. [4]). Dans chaque U_i d'un recouvrement ouvert de B , on se donne une telle forme $\bar{\omega}_i$, de manière que, dans $U_i \cap U_j$, $\bar{\omega}_j - \bar{\omega}_i = \omega_{ij}$ soit à coefficients holomorphes (et fermée). On est devant le problème : étant données des ω_{ij} analytiques, fermées, telles que $\omega_{ji} + \omega_{ij} = 0$, $\omega_{ij} + \omega_{jk} + \omega_{ki} = 0$ dans $U_i \cap U_j \cap U_k$, trouver, si possible, des ω_i (fermées, analytiques dans U_i) telles que, dans $U_i \cap U_j$, $\omega_j - \omega_i = \omega_{ij}$. Ceci définit une structure fibrée d'un type plus spécial que ceux envisagés auparavant : la base en est la variété B' des vecteurs tangents à B , la fibre est le groupe additif C .

Une telle donnée possède un invariant : élément de $H^2(B, C)$, groupe de cohomologie de B à coefficients complexes. Pour le définir, on peut supposer que les $U_i \cap U_j$ sont simplement connexes ; choisissons, pour chaque $U_i \cap U_j$, une fonction holomorphe f_{ij} telle que $df_{ij} = \omega_{ij}$; alors $f_{ij} + f_{jk} + f_{ki}$ est une constante complexe c_{ijk} ; ces c_{ijk} définissent un cocycle (de dimension 2) à valeurs complexes, d'où la classe de cohomologie cherchée $v \in H^2(B, C)$. La condition $v = 0$ est nécessaire et suffisante pour que les f_{ij} puissent être choisies de manière à rendre nuls les c_{ijk} , et alors les f_{ij} définissent un espace fibré F de base B , de fibre C .

Pour que le problème initial ait une solution, il faut d'abord que $v = 0$; ensuite, il faut et il suffit que l'espace fibré F ait une section analytique périodique. Or cette dernière condition est toujours remplie quand B est un domaine d'holomorphie ou quand B est une variété kählérienne compacte. Dans ces deux cas, la nullité de $v \in H^2(B, C)$ est donc nécessaire et suffisante.

Interprétation de V : les "périodes polaires" des formes méromorphes $\bar{\omega}_i$ associent à chaque variété polaire un nombre complexe ; d'où un cycle de dimension $2n-2$, à coefficients complexes, ("cycle polaire") et, par "dualité", une classe de cohomologie v de dimension 2 , à coefficients complexes. Pour que $v = 0$, il faut et il suffit que l'intersection du cycle polaire avec tout cycle de dimension 2 soit nulle.

En particulier, la donnée d'un diviseur définit un système de formes différentielles méromorphes $\bar{\omega}_i$: à savoir les différentielles logarithmiques des fonctions méromorphes locales admettant le diviseur. Dans ce cas, les "périodes polaires" sont des entiers. L'élément $v \in H^2(B, C)$ attaché aux formes $\bar{\omega}_i$ est alors l'image canonique de l'élément $u \in H^2(B, Z)$ défini par le diviseur. Il ne suffit pas que $v = 0$ pour que $u = 0$: le noyau de l'homomorphisme canonique $H^2(B, Z) \to H^2(B, C)$ est canoniquement isomorphe au quotient de $\mathrm{Hom}(H_1(B), T)$ par l'image de $\mathrm{Hom}(H_1(B), R)$.

Interprétation. - Si B est compacte kählérienne, la condition $v = 0$ est nécessaire et suffisante pour qu'il existe une fonction méromorphe, multiforme, admettant le diviseur donné, et dont les multiplicateurs soient des constantes, qu'on peut alors astreindre à être de valeur absolue $= 1$, ce qui achève de les déterminer ; ces multiplicateurs définissent un élément w de $\mathrm{Hom}(H_1(B), T)$. Si en outre u est nul, alors w est l'image d'un élément de $\mathrm{Hom}(H_1(B), R)$: les multiplicateurs relatifs aux cycles dont un multiple est homologue à zéro, sont égaux à 1 .

7. Cas où les obstructions ne sont pas nulles.

EXEMPLE. - B est compacte kählérienne, et on se donne un diviseur quelconque, d'où un élément $u \in H^2(B, Z)$. Cela définit un diviseur sur un revêtement universel $\tilde{B}$, et un élément $\tilde{u} \in H^2(\tilde{B}, Z)$, image de u . Pour qu'il existe une fonction méromorphe sur $\tilde{B}$, admettant ce diviseur, il faut que $\tilde{u} = 0$; mais comme $H_1(\tilde{B}) = 0$, cela équivaut à dire que l'élément $u' \in H^2(B, R)$ défini par u a une image nulle dans $H^2(\tilde{B}, R)$. Il en sera notamment ainsi lorsque u' est somme de produits d'éléments de $H^1(B, R)$: cas étudié par KODAIRA [6]. On peut alors construire une fonction f , méromorphe dans $\tilde{B}$, admettant le diviseur, et qui, par tout lacet de B , se reproduise multipliée par e^{φ} , où φ est une primitive d'une différentielle de première espèce de B (φ dépend du lacet). Telle est la généralisation, donnée par KODAIRA, des fonctions thêta ; les fonctions thêta classiques sont relatives au cas où B est un tore.

Il y a des résultats analogues, quoique différents, quand B est un domaine d'holomorphie ; plus précisément, quand B est produit de domaines dans les plans des n variables complexes (STEIN , [7]).

8. Autres problèmes.

On a vu qu'une structure fibrée de base B , de fibre C^* définit un invariant, élément de $H^2(B, Z)$. Quels sont les éléments de $H^2(B, Z)$ que l'on obtient ainsi ? Quels sont ceux qui correspondent à un "diviseur" ? Il semble que A. WEIL et KODAIRA sachent démontrer que, si B est une variété algébrique plongée sans singularités dans un espace projectif complexe, toute structure fibrée analytique sur B , de fibre C^* , correspond à un diviseur.