JEAN-LOUIS KOSZUL

Cohomologie des espaces fibrés différentiables et connexions

Séminaire N. Bourbaki, 1952, exp. nº 38, p. 313-319

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1948-1951__1__313_0>

Séminaire BOURBAKI
(décembre 1950)

COHOMOLOGIE DES ESPACES FIBRÉS DIFFÉRENTIABLES ET CONNEXIONS

par Jean-Louis KOSZUL

1. Soit P' un espace fibré principal de groupe G (à droite), de base B', classifiant pour la dimension n. Si d'autre part P est un espace fibré principal de groupe G dont la base B est de dimension $\leq n$, on a un diagramme commutatif d'applications :

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r] \arrow[dr] & P' \arrow[r] & B' \\
 & P \arrow[u] \arrow[r] & B \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Les applications $P' \to B'$ et $P \to B$ sont les projections canoniques sur les bases. L'application $P \to P'$ est une application compatible avec les opérations de G. Puisque P' est classifiant pour la dimension de B, une telle application existe et sa classe d'homotopie est déterminée par les structures fibrées de P et P'. L'application $B \to B'$ se déduit de la précédente par passage au quotient. Les applications $G \to P$ et $G \to P'$ sont définies respectivement par $s \to p.s$ et $s \to p'.s$, p' étant l'image dans P' d'un point p de P et $s \in G$; l'espace P étant supposé connexe leurs classes d'homotopie sont également déterminées par les structures fibrées de P et P'.

De ces applications dérivent donc des homomorphismes portant sur les anneaux de cohomologie, entièrement déterminés par les structures fibrées de P et P' :

$$(1) \qquad \begin{tikzcd}
H^*(G) & H^*(P') \arrow[l] \arrow[d] & H^*(B') \arrow[l] \arrow[d] \\
 & H^*(P) \arrow[ul] & H^*(B) \arrow[l]
\end{tikzcd} .$$

Lorsque l'on se limite à des espaces fibrés différentiables compacts à la cohomologie à coefficients réels, on peut utiliser, au lieu des espaces classifiants, l'"algèbre de Weil" W du groupe G qui se comporte comme l'algèbre des formes différentielles d'un espace fibré principal de groupe G classifiant pour toutes les dimensions. C'est le choix d'une connexion invariante dans P qui définira un homomorphisme de W dans l'algèbre des formes différentielles de P et permettra de reconstituer un tableau d'homomorphismes analogue à (1). Si F est une variété compacte où G opère différentiablement, on peut également définir une "algèbre différentielle universelle" se comportant comme l'algèbre des formes d'un espace classifiant pour tous les espaces fibrés différentiables de fibre F .

La méthode, introduite par A. WEIL, a été développée et exploitée notamment dans l'étude des espaces homogènes.

2. Algèbre de Lie d'opérateurs dans une algèbre différentielle.

Une majuscule de ronde $\mathcal{X}$ désignera une variété différentiable de classe ∞ ; X désignera alors l'algèbre de ses formes différentielles et $H^*(X)$ son algèbre de cohomologie à coefficients réels qui s'obtient à partir de l'opérateur de différentiation extérieure δ dans X .

Soit $\mathcal{G}$ un groupe de Lie compact connexe opérant différentiablement à droite dans une variété $\mathcal{M}$ et soit g l'algèbre de Lie des champs de vecteurs invariants à gauche sur $\mathcal{G}$. Tout $x \in g$ définit un champ de vecteurs sur $\mathcal{M}$; le produit intérieur par ce champ de vecteurs est un endomorphisme $i(x)$ de M qui possède les propriétés suivantes :

1° $i(x)$ est une antidérivation de M qui dépend linéairement de x et abaisse le degré d'une unité,

2° $i(x)\, i(y) + i(y)\, i(x) = 0$ quels que soient $x , y \in g$,

3° les "transformations infinitésimales" $\theta(x) = i(x)\delta + \delta\, i(x)$ vérifient

$$\theta(x)\, i(y) - i(y)\, \theta(x) = i(\, [x , y]\,)$$

quels que soient $x , y \in g$.

On dira en ce sens que l'algèbre de Lie g opère dans l'algèbre différentielle M .

Si X et Y sont deux algèbres différentielles où opère g , on fait opérer g dans leur produit tensoriel $X \otimes Y$ en posant

$$i(x).(a \otimes b) = (i(x).a) \otimes b + (-1)^r\, a \otimes (i(x).b) ,$$

lorque $b \in Y$ et que a est de degré r dans X .

On dira qu'un homomorphisme de X dans Y est permis lorsqu'il commute avec les opérateurs δ et $i(x)$.

Si $\mathcal{P}$ est un espace fibré différentiable de groupe $\mathcal{G}$ et de base $\mathcal{B}$, la projection de $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{B}$ définit un isomorphisme canonique de B dans P . On identifiera B avec son image dans P .

Pour qu'une forme de $\mathcal{P}$ soit dans l'image de B , il faut et il suffit que ce soit un zéro de $i(x)$ et de $\theta(x)$ pour tout $x \in g$. D'une manière générale, dans une algèbre différentielle où opère g , les éléments qui possèdent cette propriété seront dits basiques.

3. Connexion - Algèbre de Weil.

Soit $\mathcal{P}$ un espace fibré principal de groupe $\mathcal{G}$.

On appelle connexion sur $\mathcal{P}$ une forme différentielle γ de degré 1 sur $\bar{P}$, à valeurs dans l'espace des vecteurs de $\mathcal{G}$ d'origine e (élément neutre de $\mathcal{G}$) , qui vérifie les deux conditions suivantes :

$\gamma(pds) = ds$ pour tout point $p \in \mathcal{P}$ et tout vecteur ds d'origine e de $\mathcal{G}$,

$\gamma(dpt) = t^{-1}\,\gamma(dp)t$ pour tout $t \in \mathcal{G}$ et tout vecteur dp de $\mathcal{P}$.

On démontre que, si la base de $\mathcal{P}$ est dénombrable à l'infini, il existe toujours une connexion de classe infinie sur $\mathcal{P}$.

Soit γ une connexion sur $\mathcal{P}$ et soit $x' \in g^*$ une forme différentielle invariante à gauche de degré 1 sur G : $\langle x' , \gamma(dp)\rangle$ est alors une 1-forme différentielle à valeurs scalaires sur $\mathcal{P}$ que l'on notera $k.x'$. La connexion γ définit ainsi une application linéaire k de g^* dans l'espace des formes de degré 1 sur $\mathcal{P}$.

L'application linéaire k se prolonge en homomorphisme $k : A^*(g) \to P$, $A^*(g)$ étant l'algèbre extérieure des formes invariantes à gauche sur $\mathcal{G}$. Or g opère dans l'algèbre différentielle $A^*(g)$.

On a pour tout $x \in g$, $i(x)k = ki(x)$ mais en général, $\delta k - k\delta \neq 0$.

L'application linéaire $x' \to \delta k.x' - k\delta.x'$ de g^* dans le sous-espace des formes de degré 2 de $\mathcal{P}$ se prolonge en un homomorphisme $S^*(g) \to P$, où $S^*(g)$ désigne l'algèbre des formes multilinéaires symétriques sur g . Ceci permet de prolonger k en un homomorphisme $k : W^*(g) = A^*(g) \otimes S^*(g) \to P$. On définit dans $W^*(g)$ une structure d'algèbre différentielle au moyen de l'opérateur δ tel que, pour tout $x' \in g^*$

$$\delta.(x' \otimes 1) = (\delta.x') \otimes 1 + 1 \otimes x'$$
$$\delta.(1 \otimes x') = \Sigma_i\, x_i' \otimes \theta(x_i)\, x'$$

où x_i et x_i' sont des bases duales de g et g^* . On y fait opérer g en posant $i(x).(a \otimes c) = (i(x).a) \otimes c$ pour $x \in g$, $a \in A^*(g)$ et $c \in S^*(g)$. Munie de cette structure, $W^*(g)$ est l'"algèbre de Weil" de g . On démontre que k est compatible avec les structures différentielles et les opérations de g .

Les éléments basiques de $W^*(g)$ sont les zéros des $\theta(x)$ dans $S^*(g)$. Ils constituent une sous-algèbre $H^*_S(g)$ dont tous les éléments sont des zéros de δ . Ce sont les invariants symétriques de la représentation transposée de la représentation adjointe de g . On démontre en utilisant la compacité de $\mathcal{G}$ que $H^*_S(g)$ est isomorphe à une algèbre de polynômes (cf. [3]). On a $k.H^*_S(g) \subset B$.

Il existe un homomorphisme permis $f : W^*(g) \to A^*(g) \subset G$ dont l'idéal des zéros est engendré par les éléments de degré >0 dans $S^*(g)$. Tout point $p \in \mathcal{P}$ définit d'autre part un homomorphisme permis $f(p) : P \to G$. Quel que soit le point p , on a $f(p)\, k = f$. Des inclusions $H^*_S(g) \subset W^*(g)$, $B \subset P$ et des homomorphismes f , $f(p)$ et k dérive donc un diagramme commutatif portant sur les algèbres de cohomologie :

(2)
$$\begin{tikzcd} H^*(G) & H(W^*(g)) \arrow[l] \arrow[d] & H^*_S(g) \arrow[l] \arrow[d] \\ & H^*(P) \arrow[ul] & H^*(B) \arrow[l] \end{tikzcd}$$

4. Algèbre universelle pour une fibre F .

On désigne comme plus haut par $\mathcal{P}$ un espace fibré différentiable de groupe $\mathcal{G}$; soit $\mathcal{F}$ une variété où $\mathcal{G}$ opère différentiablement à droite. L'espace fibré associé $\mathcal{E}(\mathcal{G}, \mathcal{P}, \mathcal{F})$ est la base de l'espace fibré principal obtenu en faisant opérer simultanément $\mathcal{G}$ dans les deux facteurs de $\mathcal{F} \times \mathcal{P}$. La base de $\mathcal{E}$ s'identifie canoniquement à la base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{P}$.

On définira d'une manière analogue l'algèbre différentielle universelle pour les fibrations en $\mathcal{F}$ comme la sous-algèbre (F,g) des éléments basiques de $F \otimes W^*(g)$. Une connexion dans $\mathcal{P}$ définit un homomorphisme $k : W^*(g) \to P$ qui se prolonge en un homomorphisme $\bar{k} : F \otimes W^*(g) \to F \times P$, où $F \times P$ est l'algèbre des formes différentielles de $\mathcal{F} \times \mathcal{P}$. Cet homomorphisme $\bar{k}$ est compatible avec les structures différentielles et les opérations de g . Il applique donc (F,g) dans la sous-algèbre des éléments basiques de $F \times P$ c'est-à-dire dans E . D'autre part $K.H^*_S(g) \subset E \cap P = B$. Il existe un homomorphisme canonique permis $f : (F,g) \to F$, et tout point $p \in \mathcal{P}$ définit un homomorphisme permis $f(p) : P \to F$. Quel que soit le point p , on a $f(p)\bar{k} = f$. Des inclusions

$H_S^*(g) \subset (F,g)$, $B \subset E$ et des homomorphismes $f(p)$, f et $\bar{k}$ dérive donc un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
H^*(F) & H^*(F,g) \arrow[l] \arrow[d] & H_S^*(g) \arrow[l] \arrow[d] \\
& H^*(E) \arrow[ul] & H^*(B) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

L'espace $\mathcal{P}$ étant supposé connexe, $H^*(E) \to H^*(F)$ est indépendant du choix du point p . On démontre de plus le

THÉORÈME d'invariance : les homomorphismes $H^*(F,g) \to H^*(E)$ et $H_S^*(g) \to H^*(B)$ sont indépendants du choix de la connexion.

Les images de $H^*(F,g)$ dans $H^*(F)$ et $H^*(E)$ ainsi que l'image de $H_S^*(g)$ dans $H^*(B)$ sont donc des invariants de la structure fibrée $\xi(\mathcal{G}, \mathcal{P}, \mathcal{F})$; ce sont les sous-algèbres caractéristiques.

Toute classe de cohomologie dans la sous-algèbre caractèristique de $H^*(F)$ appartient à l'image de $H^*(E)$; ceci donne des conditions nécessaires pour qu'un espace $\mathcal{E}$ puisse être fibré par des fibres homéomorphes à $\mathcal{F}$ avec $\mathcal{G}$ comme groupe de structure opérant dans $\mathcal{F}$.

Classes transgressives. - Une classe de cohomologie $T \in H^*(F)$ est dite transgressive pour ξ (respectivement, universellement transgressive) s'il existe dans E (respectivement dans (F,g)) un cocycle modulo B (respectivement, modulo $H_S^*(g)$) dont l'image par tout homomorphisme permis soit dans T .

Il résulte immédiatement des propriétés de $\bar{k}$: $(F,g) \to E$ que les classes absolument transgressives de $H^*(F)$ sont transgressives pour tous les espaces fibrés de fibre $\mathcal{F}$.

5. Cohomologie de l'algèbre de Weil.

Si l'on prend pour $\mathcal{F}$ le groupe $\mathcal{G}$ opérant à droite dans lui-même, (F,g) est alors canoniquement isomorphe à l'algèbre de Weil de g . Son algèbre de cohomologie $H(W^*(g))$ se réduit aux multiples scalaires de l'unité (de même que l'anneau de cohomologie d'un espace fibré principal classifiant pour la dimension n n'a que des éléments de degré 0 ou $> n$) . La sous-algèbre caractéristique de $H^*(G)$ ne comporte donc que les scalaires. On démontre que les classes absolument transgressives de degré > 0 sont les éléments primitifs au sens de HOPF de l'algèbre extérieure $H^*(G)$.

6. Fibration par un espace fibré principal.

THÉORÈME (H. CARTAN). - Si la fibre $\mathcal{F}$ est un espace fibré principal, de base $\mathcal{U}$ et de groupe $\mathcal{G}$, alors $H^*(U)$ est canoniquement isomorphe à $H^*(F,g)$.

L'isomorphisme canonique dérive de l'inclusion $U \subset (F,g)$ (cf. [2]). Tout se passe comme si $H^*(F,g)$ était l'algèbre de cohomologie d'un "espace fibré" associé à l'espace fibré principal $\mathcal{F}$, l'algèbre des "formes différentielles de la fibre" étant $W^*(g)$ qui a même cohomologie qu'un point.

C'est sur ce résultat que repose la

DÉMONSTRATION du théorème d'invariance. - On commence par prouver que $H^*(F,g) \to H^*(E)$ est indépendant du choix de la connexion. Les homomorphismes

$$\begin{tikzcd} F \otimes W^*(g) \arrow[r, "t"] & (F \times P) \otimes W^*(g) \arrow[r, "K'"] & F \times P \\ & F \times P \arrow[u, "c"'] & \end{tikzcd}$$

sont définis comme suit : t et c sont les isomorphismes canoniques provenant des inclusions $F \subset F \times P$ et $F \times P \subset (F \times P) \otimes W^*(g)$; k' est l'homomorphisme prolongeant l'homomorphisme $k : W^*(g) \longrightarrow P$ défini par une connexion dans $\mathcal{P}$. Tous ces homomorphismes sont compatibles avec les structures différentielles et les opérateurs de g. On a $k't = \bar{k}$ et $k'c =$ identité de $F \times P$. D'après le théorème précédent, de la restriction de c à E dérive un isomorphisme canonique de $H^*(E)$ sur $H^*(F \times P,g)$. L'homomorphisme de $H^*(F \times P,g)$ dans $H^*(E)$ qui en est l'inverse est donc indépendant du choix de la connexion. Puisque d'autre part l'homomorphisme $H^*(F,g) \longrightarrow H^*(F \times P,g)$ dérivant de la restriction de t à (F,g) est canonique, il en résulte bien que l'homomorphisme $H^*(F,g) \to H^*(E)$ dérivant de la restriction de $\bar{k} = k't$ à (F,g) est indépendant de la connexion choisie.

L'homomorphisme $H^*_S(g) \to H^*(B)$ dérivant de $\bar{k}$ ne dépend visiblement pas de $\mathcal{F}$. En prenant pour $\mathcal{F}$ un point, on constate qu'il coïncide avec $H^*(F,g) \to H^*(E)$ ce qui prouve qu'il ne dépend pas de la connexion.

NOTE. - Lorsque $\mathcal{F}$ est un fibré principal, $H^*(F,g)$ est de dimension finie. Il n'en est pas ainsi dans le cas général. Si $\mathcal{G}$ opère transitivement dans $\mathcal{F}$ et si le sous-groupe $\mathcal{G}'$ des éléments de $\mathcal{G}$ qui laisse un point de $\mathcal{F}$ fixe est connexe, alors $H^*(F,g)$ est canoniquement isomorphe à $H^*_S(g')$, g' étant l'algèbre de Lie de $\mathcal{G}'$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOREL (Armand). - Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts, Ann. of Math., Series 2, t. 57, 1953, p. 115-207.

[2] CARTAN (H.). - La transgression dans un groupe de Lie et dans un espace fibré principal, Colloque de Topologie (espaces fibrés) [1950. Bruxelles]. - Liège, Thone, et Paris, Masson, 1951 ; p. 56-71.

[3] KOSZUL (J.-L.). - Sur un type d'algèbres différentielles en rapport avec la transgression, Colloque de Topologie (espaces fibrés) [1950. Bruxelles]. - Liège, Thone, et Paris, Masson, 1951 ; p. 73-81.

[Octobre 1957]