ROGER GODEMENT

Théorie des caractères dans les groupes unimodulaires

Séminaire N. Bourbaki, 1952, exp. n° 41, p. 337-347

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1948-1951__1__337_0>

Séminaire BOURBAKI
(Mars 1951)

THÉORIE DES CARACTÈRES DANS LES GROUPES UNIMODULAIRES

par Roger GODEMENT.

1. Algèbres unitaires.

1. DÉFINITION. - On appelle algèbre unitaire toute algèbre $\mathbf{A}$ sur le corps complexe, munie d'une involution $x \to x^*$ et d'un produit scalaire (x, y) (donc d'une topologie) avec les axiomes suivantes :

(AU 1) : $(xy, z) = (y, x^* z)$;
(AU 2) : $(x, y) = (y^*, x^*)$;
(AU 3) : les opérateurs $y \to xy$ de la représentation régulière sont continus ;
(AU 4) : les produits xy sont partout denses dans $\mathbf{A}$.

Exemple à la fois trivial et typique : l'algèbre des matrices $\mathbf{M}_n(C)$ avec le produit scalaire $\mathrm{Tr}(AB^*)$.

Soit $\mathcal{H}$ l'espace de Hilbert complété de $\mathbf{A}$; $x \to x^*$ se prolonge en une application semi-linéaire, isométrique et involutive S de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}$. Les opérateurs $y \to xy$ se prolongent en opérateurs U_x dans $\mathcal{H}$. Les opérateurs $y \to yx$ se prolongent en opérateurs continus V_y de $\mathcal{H}$, avec les relations

$$U_x V_y = V_y U_x \quad ; \quad V_x = S U_x^* S \quad ;$$

il est clair que $x \to U_x$ (resp. $x \to V_x$) est une représentation unitaire de $\mathbf{A}$ (resp. de l'algèbre opposée).

L'axiome (AU 4) a pour seul but d'assurer que parmi les limites faibles d'opérateurs U_x se trouve l'opérateur unité de $\mathcal{H}$.

2. THÉORÈME DE COMMUTATION. - Soit $\mathbf{R}^s$ (resp. $\mathbf{R}^d$) l'anneau d'opérateurs (faiblement fermé) engendré par les U (resp. V) ; par le théorème de bicommutation de von Neumann, $T \in \mathbf{R}^s$ veut dire que tout opérateur permutable aux U permute à T. Il est clair que tout opérateur de $\mathbf{R}^s$ permute à tout opérateur de $\mathbf{R}^d$; réciproquement, tout opérateur permutable aux U est dans $\mathbf{R}^d$, ce qui s'exprime par

$$\mathbf{R}^s = (\mathbf{R}^d)' \quad ; \quad \mathbf{R}^d = (\mathbf{R}^s)' \ .$$

La démonstration est élémentaire, mais astucieuse puisque trouvée par l'orateur. Elle repose sur la notion d'élément <u>borné</u> : $a \in \mathcal{H}$ est dit borné si l'application $x \to V_x \underset{\sim}{a}$ de $\underset{\sim}{A}$ dans $\mathcal{H}$ est continue (on note alors $U_{\underset{\sim}{a}}$ son prolongement à $\mathcal{H}$) ; on démontre que si $\underset{\sim}{a}$ est borné, l'application $x \to U_x \underset{\sim}{a}$ est aussi continue, d'où un autre opérateur $V_{\underset{\sim}{a}}$. Evidemment, les éléments de $\underset{\sim}{A}$ sont bornés, mais il peut y avoir d'autres.

Les opérateurs $U_{\underset{\sim}{a}}$ ($\underset{\sim}{a}$ borné) sont dans l'anneau $\underset{\sim}{R}^s$ et y forment un idéal bilatère faiblement dense, et autoadjoint. Vu la formule

$$U_{\underset{\sim}{a}} \underset{\sim}{b} = V_{\underset{\sim}{b}} \underset{\sim}{a} \quad \text{et aussi} \quad U_{\underset{\sim}{a}} U_{\underset{\sim}{b}} = U_{U_{\underset{\sim}{a}} \underset{\sim}{b}}$$

pour $\underset{\sim}{a}$, $\underset{\sim}{b}$ bornés, on peut munir de façon naturelle l'ensemble des éléments bornés d'une structure d'algèbre unitaire, prolongeant $\underset{\sim}{A}$.

3. <u>Trace canonique sur</u> $\underset{\sim}{R}^s$.

Pour $H \in \underset{\sim}{R}^s$ <u>hermitien positif,</u> posons

$$\mathrm{tr}(H) = \begin{cases} (\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{a}) & \text{si } H^{\frac{1}{2}} = U_{\underset{\sim}{a}} \text{ pour un } \underset{\sim}{a} \text{ borné ;} \\ +\infty & \text{dans le cas contraire.} \end{cases}$$

On a alors, toujours par des procédés élémentaires, les mirifiques propriétés suivantes :

(tr 1) : $\mathrm{tr}(H) \geqslant 0$; $\mathrm{tr}(H) = 0$ <u>implique</u> $H = 0$;
(tr 2) : $\mathrm{tr}(UHU^{-1}) = \mathrm{tr}(H)$ <u>si</u> $U \in \underset{\sim}{R}^s$ <u>est unitaire</u> ;
(tr 3) : $\mathrm{tr}(H) = \sum \mathrm{tr}(H_i)$ <u>si</u> $H = \sum H_i$ (sommation <u>arbitraire</u>)
(tr 4) : <u>les</u> $A \in \underset{\sim}{R}^s$ <u>de la forme</u> $U_{\underset{\sim}{a}}$ <u>sont caractérisés par le fait que</u> $\mathrm{tr}(A^*A)$ <u>est fini</u> ; <u>on a de plus</u>

$$\mathrm{tr}(U_{\underset{\sim}{a}} U_{\underset{\sim}{b}}^*) = (\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b})$$

(Bien entendu, dans cette dernière relation il est sous-entendu qu'on a étendu tr de façon évidente aux combinaisons linéaires d'opérateurs hermitiens positifs de trace finie). On appelle tr la <u>trace canonique</u> sur $\underset{\sim}{R}^s$.

On dit que l'algèbre unitaire $\underset{\sim}{A}$ est <u>irréductible</u> si le système formé par les U <u>et</u> les V est irréductible au sens usuel. Comme les opérateurs permutables aux U et aux V forment (n° 2) l'anneau $\underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{R}^s \cap \underset{\sim}{R}^d$, centre de $\underset{\sim}{R}^s$ ou de $\underset{\sim}{R}^d$, une condition nécessaire et suffisante d'irréductibilité est que $\underset{\sim}{R}^s$ soit un <u>facteur</u> ; la trace canonique donne alors automatiquement la trace relative sur ce facteur, définie à un facteur constant près (voir [1]), et on voit par (tr 4) (qui prouve l'existence d'un grand nombre d'opérateurs de trace finie) que les facteurs obtenus ne sont jamais purement infinis : seuls les cas (I) et (II) peuvent se présenter (et se présentent effectivement). On obtient les cas finis (I_n), n fini, et (II_1) lorsque l'opérateur 1 est de la forme $U_{\underset{\sim}{a}}$ (auquel cas $tr(H) = (H\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{a})$) pour tout $H \in \underset{\sim}{R}^s$.

2. Traces et caractères dans les groupes.

4. Algèbres de groupe. - Soit G localement compact unimodulaire. On désigne par $\underset{\sim}{M} = \underset{\sim}{M}(G)$ l'espace des mesures complexes bornées sur G muni des structures suivantes:

(a) produit de composition $\alpha\beta = \gamma$, donné par $\int f(x)d\gamma(x) = \iint f(xy)d\alpha(x)d\beta(y)$

(b) involution $\alpha \to \alpha^*$ donnée par $d\alpha^*(x) = d\alpha(x^{-1})$;

(c) topologie : α converge vers β si $\int (f(x)d\alpha(x)$ converge vers $\int f(x)d\beta(x)$ pour toute f continue et bornée sur G.

Si l'on désigne par ε_s la masse $+1$ en s ($\varepsilon_e = \varepsilon$ est l'élément unité de $\underset{\sim}{M}$), les $\varepsilon_s\alpha$ sont les translatées à gauche de α ; on a la formule

$$\alpha\beta = \int \varepsilon_s\beta \cdot d\alpha(s)$$

à interpréter dans le sens intégrale faible.

On dira qu'une partie $\mathfrak{A}$ de M est une algèbre de groupe de G si :

(AG 1) : $\mathfrak{A}$ est une sous-algèbre autoadjointe de $\underset{\sim}{M}$;

(AG 2) : $\mathfrak{A}$ est invariante par les translations ;

(AG 3) : toute mesure de norme $\leqslant 1$ est adhérente à l'ensemble des mesures de norme $\leqslant 1$ contenues dans $\mathfrak{A}$ (ce qui implique que $\mathfrak{A}$ est partout dense dans $\underset{\sim}{M}$, et qu'en particulier la mesure ε est limite d'éléments de $\mathfrak{A}$ dont la norme reste $\leqslant 1$).

EXEMPLE 1. - Sur un groupe de Lie, les mesures $f(x)dx$ où f est de classe C^p (p donné $\leqslant +\infty$) et à support compact.

EXEMPLE 2. - Sur un groupe abélien, les mesures dont la transformée de Fourier est à support compact.

EXEMPLE 3. - Sur la droite, les α telles que $\hat{\alpha}(t) = O(t^{-1})$ à l'infini.

Naturellement, on ne parle pas des exemples triviaux.

Le cas qui se présentera le plus fréquemment dans ce qui suit est celui où $\mathfrak{A}$ est un idéal bilatère de $\underset{\sim}{M}$ (ce qui implique (AG 2)) ; si $\mathfrak{A}'$ et $\mathfrak{A}''$ sont des idéaux bilatères partout denses de $\underset{\sim}{M}$, il en est de même de $\mathfrak{A}' \cap \mathfrak{A}''$ (par contre ce n'est pas vrai en général ; l'intersection peut être nulle : exemples 1 et 2 ci-dessus).

5. Traces sur un groupe. - Elles donnent un moyen systématique de construire des algèbres unitaires.

Soit $\sigma(\alpha, \beta)$ une forme hermitienne positive définie sur une algèbre de groupe $\mathfrak{A}$; on dit que c'est une trace sur G si les axiomes suivants sont vérifiés :

(T 1) : $\sigma(\varepsilon_s\alpha, \varepsilon_s\beta) = \sigma(\alpha, \beta)$ pour $\alpha, \beta \in \mathfrak{A}$, $s \in G$

(T 2) : $\sigma(\alpha, \beta) = \sigma(\beta^*, \alpha^*)$ pour $\alpha, \beta \in \mathfrak{A}$;

(T 3) : pour $\beta, \gamma \in \mathfrak{A}$, la fonction $\sigma(\varepsilon_s\beta, \gamma)$ est continue sur G (et bornée d'après Cauchy-Buniatowsky-Schwarz), et on a en outre

$$\sigma(\alpha\beta, \gamma) = \int \sigma(\varepsilon_s\beta, \gamma)d\alpha(s)$$

pour toute $\alpha \in \mathfrak{A}$.

EXEMPLE 1. - $\mathcal{E}(f, g) = fg^*(e) = \int f(x)g(x)dx$.

EXEMPLE 2. - Distributions centrales et de type positif sur les groupes de Lie

EXEMPLE 3. - Si G abélien, et si $dm(x)$ est une mesure positive arbitraire sur le dual $\hat{G}$, poser $\sigma(\alpha, \beta) = \int \hat{\alpha}(\hat{x})\overline{\hat{\beta}(\hat{x})}dm(\hat{x})$ pour α, β dont les transformées de Fourier sont à support compact (ou plus généralement de carré sommable pour $dm(\hat{x})$).

On montre facilement que pour toute trace σ définie sur $\mathfrak{A}$, on a la relation suivante, plus générale que (T 1).

$$\sigma(\alpha\beta, \gamma) = \sigma(\beta, \alpha^*\gamma) \quad \text{pour } \alpha, \beta, \gamma \in \mathfrak{A};$$

c'est là que sortent les algèbres unitaires.

En effet, dans $\mathfrak{A}$ considérons l'ensemble $\mathfrak{n}$ des α avec $\sigma(\alpha, \alpha) = 0$; c'est un idéal bilatère autoadjoint de $\mathfrak{A}$; donc l'algèbre quotient $\underset{\sim}{A} = \mathfrak{A}/\mathfrak{n}$ est munie naturellement d'une involution et d'un produit scalaire ; si $\alpha \longrightarrow \hat{\alpha}$ est l'application canonique de $\mathfrak{A}$ sur $\underset{\sim}{A}$, on a

$$\langle \hat{\alpha}, \hat{\beta} \rangle = \sigma(\alpha, \beta).$$

Il est clair que les axiomes (AU 1) et (AU 2) sont vérifiés ; pour vérifier les autres, on observe que d'après (T 1) l'idéal $\mathfrak{N}$ est invariant par les translations à gauche, qui passent donc au quotient et donnent, d'après (T 1) une repréentation unitaire $s \to U_s$ de G dans $\underset{\sim}{A}$, laquelle est continue d'après (T 3) ; comme (T 3) s'écrit encore

$$(\hat{\alpha}\,\hat{\beta}\,,\hat{\gamma}) = \int \langle U_s\hat{\beta}\,,\,\hat{\gamma}\rangle\,.d\alpha(s)$$

l'opérateur U_α : $\hat{\beta} \to \hat{\alpha}\hat{\beta}$ est donné par

$$U_\alpha = \int U_s.d\,\alpha(s)\ ,$$

donc est continu: d'où (AU 3). Si de plus α converge dans $\mathfrak{A}$ vers ε, U_α converge faiblement vers l'unité, d'où (AU 4) puisqu'alors $\hat{\alpha}\,\hat{\beta}$ converge vers $\hat{\beta}$

$\underset{\sim}{A}$ est donc bien une algèbre unitaire.

EXEMPLE. - Les fonctions continues à support compact (avec les opérateurs de $\underset{\sim}{M}$) et le produit sacalaire $\int f(x)\overline{g(x)}dx$ forment une algèbre unitaire, définie par la trace ε de l'exemple 1. Bien entendu, ici les anneaux $\underset{\sim}{R}^s$ et $\underset{\sim}{R}^d$ du paragraphe 1 sont engendrés, dans L^2, par les translations à gauche et à droite respectivement, en sorte que tout opérateur dans L^2 qui commute aux translations à droite est engendré par les translations à gauche. Si G est abélien $\underset{\sim}{R}^s = \underset{\sim}{R}^d = \underset{\sim}{R}$ est un anneau commutatif maximal $(\underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{R}')$, ce qu'on peut aussi voir par Fourier.

Soit σ une trace ; dans le complété $\mathcal{H}^\sigma$ de l'algèbre unitaire correspondante, on a défini une représentation unitaire $s \to U_s$ de G (on peut en définir une seconde à partir des translations à droite ; cf. le cas de L^2), d'où une représentation unitaire correspondante de $\underset{\sim}{M}$ en posant $U_\alpha = \int U_s.d\alpha(s)$; pour $\alpha \in \mathfrak{A}$, cette notation est conforme à celle du paragraphe 1 (à ceci près qu'on devrait écrire $U_{\hat{\alpha}}$ au lieu de U_α ...). Soit tr la trace canonique sur $\underset{\sim}{R}^s$, anneau engendré par les U_α, i.e. par les U_s ; alors, pour $\alpha \in \mathfrak{A}$ l'opérateur U_α est "normé" et on a

$$\sigma\,(\alpha\,,\beta) = tr(U_\alpha\,U_\beta^*) \quad \text{pour} \quad \alpha\,,\beta \in \mathfrak{A}.$$

On appelle algèbre de définition de σ l'ensemble de toutes les $\alpha \in \underset{\sim}{M}$ telles que U_α soit normé ; en prolongeant σ de façon évidente à son algèbre de définition $\mathfrak{A}(\sigma)$ (laquelle est non seulement une algèbre de groupe, mais un idéal bilatère de $\underset{\sim}{M}$), on a encore une trace sur G . Si $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\sigma)$, on dit que σ est achevée, on démontre que toute trace se prolonge avec unicité en une trace achevée,. à savoir celle qu'on vient de définir.

6. Caractères. - Une trace achevée est un caractère de G si l'algèbre unitaire correspondante est irréductible. Un caractère s'obtient donc comme suit : on prend une représentation unitaire $s \to U_s$ telle que les U_s engendrent un facteur $\underset{\sim}{R}^s$ et telle que les $\alpha \in \underset{\sim}{M}$ avec $\mathrm{tr}(U_\alpha U_\alpha^*) < +\infty$ soient "suffisamment nombreuses" (tr désigne une trace relative dans $\underset{\sim}{R}^s$), ce qui implique que le facteur en question ne soit pas purement infini ; ces α forment alors une algèbre de groupe $\mathfrak{a}$, et $\chi(\alpha, \beta) = \mathrm{tr}(U_\alpha U_\beta^*)$ est un caractère admettant $\mathfrak{a}$ pour algèbre de définition.

On rappelle que si $\underset{\sim}{R}^s$ est l'anneau de tous les opérateurs (i.e. si la représentation est irréductible), $\mathrm{tr}(U_\alpha U_\alpha^*) < +\infty$ veut dire que U_α est du type d'Hilbert-Schmidt ; il est donc exceptionnel qu'une représentation irréductible conduise à un caractère (mais c'est toutefois la règle sur le groupe de Lorentz).

Les caractères possèdent les propriétés suivantes :

(I). - Pour que les algèbres unitaires définies par deux caractères soient isomorphes, il faut et il suffit que ces deux caractères soient proportionnels (donc aient même algèbre de définition).

(II). - Soient σ et σ' deux traces achevées, définies sur des idéaux $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}'$; écrivons $\sigma \ll \sigma'$ si $\sigma(\alpha, \alpha) \leqslant \sigma'(\alpha, \alpha)$ pour $\alpha \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}'$; c'est une relation d'ordre (parce que si σ et σ' coïncident sur $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}'$, qui est une algèbre de groupe, elles sont identiques : unicité du prolongement en une trace achevée). Ceci dit, χ est un caractère si et seulement si toute trace achevée majorée par χ lui est proportionnelle. Etant donné que les traces achevées forment de façon évidente un cône convexe, les caractères sont les points des génératrices extrémales de ce cône.

(III). - L'anneau $\underset{\sim}{R}^s$ engendré par un caractère χ est de classe finie si et seulement si χ est défini par une fonction continue : $\chi(\alpha, \beta) = \int \chi(x) d\, \alpha \beta^*(x)$.

(IV). - L'anneau $\underset{\sim}{R}^s$ engendré par un caractère χ est de classe (I) si et seulement s'il existe une représentation irréductible $s \to T_s$ de G telle que : pour $\alpha \in \mathfrak{a}(\chi)$, algèbre de définition de χ, T_α est du type d'Hilbert-Schmidt, et on a $\chi(\alpha, \beta) = \mathrm{Tr}(T_\alpha T_\beta^*)$ pour $\alpha, \beta \in \mathfrak{a}(\chi)$. En outre dans ce cas la représentation irréductible est unique.

La propriété (I) provient de l'unicité de la trace dans les facteurs (on peut aussi s'en passer). Pour (II), il suffit de remarquer ceci : dans l'anneau $\underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{R}^s \cap \underset{\sim}{R}^d$ associé à une trace σ, soit H avec $H = H^*$, $0 \leqslant H \leqslant 1$; posons $\sigma_H(\alpha, \beta) = \mathrm{tr}(U_\alpha H U_\beta^*)$; alors on obtient par ce procédé, et une seule fois, toute trace majorée par σ, d'où la propriété extrémale des caractères. Pour (III) : $\underset{\sim}{R}^s$

est de classe finie si et seulement si $tr(1) < +\infty$, i.e. si l'algèbre de définition de χ contient ε , i.e. si c'est tout $\underset{\sim}{M}$, auquel cas la fonction continue cherchée n'est autre que $\chi(x) = \chi(\varepsilon_x, \varepsilon)$. Enfin, la démonstration de (IV) est un peu plus technique, et provient de ce que tout facteur de classe (I) est isomorphe à l'anneau de <u>tous</u> les opérateurs d'un Hilbert, l'isomorphisme en question transformant la trace relative en la trace usuelle (voir[1]).

On connaît des exemples non triviaux de caractères donnant des facteurs de classe (II_∞) ; mais on n'en sait rien de plus, et ils sont fort génants (car dans le cas (II_∞) il est impossible de "normaliser" la trace relative).

3. <u>**Existence des caractères.**</u>

On désigne par G un groupe unimodulaire à <u>base dénombrable</u>, par σ une trace achevée sur G , dont l'algèbre de définition est $\mathfrak{a}$ (idéal bilatère autoadjoint partout dense de $\underset{\sim}{M}$). On admet (ce qui sans doute est toujours vrai) qu'il existe dans $\mathfrak{a}$ une <u>suite</u> de mesures α_n de norme $\leqslant 1$ convergent vers ε ; on l'appelle <u>suite régularisante</u> (car pour $\beta \in \underset{\sim}{M}$ arbitraire, les $\alpha_n \beta$ sont dans $\mathfrak{a}$ et convergent vers β). On note $\underset{\sim}{A}$ l'algèbre unitaire définie par σ , $\mathcal{H}$ le complété de $\underset{\sim}{A}$, $\alpha \to U_\alpha$ la représentation correspondante de $\underset{\sim}{M}$, $\underset{\sim}{R}^s$ le facteur engendré par les U_α , tr la trace canonique sur $\underset{\sim}{R}^s$, et enfin $\underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{R}^s \cap \underset{\sim}{R}^d$ le centre de $\underset{\sim}{R}^s$; rappelons que l'anneau $\underset{\sim}{R}$ est <u>abélien</u>. D'après les hypothèses faites, l'espace $\mathcal{H}$ est à base dénombrable. Rappelons aussi que σ est définie pour U_α normé, et donnée par

$$\sigma(\alpha, \beta) = tr(U_\alpha U_\beta^*) \quad ; \tag{1}$$

rappelons aussi que les éléments normés de $\underset{\sim}{R}^s$ forment un idéal bilatère, donc un module sur $\underset{\sim}{R}$ en particulier.

7. <u>Le spectre de</u> $\underset{\sim}{R}$. - Comme toute algèbre autoadjointe commutative d'opérateurs, contenant l'unité et uniformément fermée, $\underset{\sim}{R}$ est isomorphe pour toutes ses structures à l'algèbre de toutes les fonctions continues sur un espace compact Z("spectre" de $\underset{\sim}{R}$) ; soit $T \to \hat{T}$ l'isomorphisme en question.

Pour $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b} \in \mathcal{H}$, l'expression $\langle T\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b} \rangle$ est une forme linéaire continue (pour la norme) sur $\underset{\sim}{R}$; donc (définition des mesures)

$$\langle T\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b} \rangle = \int \hat{T}(\zeta) dm_{\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b}}(\zeta) \tag{2}$$

où $m_{\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b}}$ est une mesure bien déterminée sur Z . Ces mesures possèdent des propriétés formelles simples, de telle sorte que l'on peut associer, à toute fonction $f(\zeta)$ bornée et borélienne sur Z, un opérateur continu T_f dans $\mathcal{H}$ par

$$(3) \qquad \langle T_f \underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b} \rangle = \int f(\zeta) dm_{\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b}}(\zeta)$$

pour $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b} \in \mathcal{H}$; si f est continue, on retrouve évidemment les éléments de $\underset{\sim}{R}$. Par des calculs simples on montre que : (a) $f \longrightarrow T_f$ est une représentation unitaire de l'algèbre des f en question ; (b) les T_f appartiennent au bicommutant $\underset{\sim}{R}''$ de $\underset{\sim}{R}$; (c) si f est la fonction caractéristique d'un ensemble $\omega \subset Z$, T_f est un projecteur $E(\omega)$; pour $\underset{\sim}{a} \in \mathcal{H}$ on a notamment la relation

$$\|E(\omega)\underset{\sim}{a}\|^2 = m_{\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{a}}(\omega) .$$

Maintenant, rappelons-nous qu'il existe une application canonique $\alpha \longrightarrow \hat{\alpha}$ de l'algèbre de groupe $\mathfrak{A}$ dans $\mathcal{H}$, et que $\sigma(\alpha, \beta) = \mathrm{tr}(U_\alpha U_\beta^*) = \langle \hat{\alpha}, \hat{\beta} \rangle$; plus généralement, on vérifie que $\langle T\hat{\alpha}, \hat{\beta} \rangle = \mathrm{tr}(U_\alpha T U_\beta^*)$ pour $T \in \underset{\sim}{R}$. Pour simplifier, on notera $m_{\alpha,\beta}$ la mesure associée sur Z aux élements $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ de $\mathcal{H}$; on a donc, au lieu de (2), la relation

$$(5) \qquad \mathrm{tr}(U_\alpha T U_\beta^*) = \int \hat{T}(\zeta) dm_{\alpha,\beta}(\zeta)$$

pour $T \in \underset{\sim}{R}$, $\alpha, \beta \in \mathfrak{A}$.

Maintenant, choisissons des nombres $k_n > 0$ tels que la série de mesures

$$(6) \qquad m = \sum k_n . m_{\alpha_n, \alpha_n}$$

soit absolument convergente.

Il est clair que toutes les m_{α_n,α_n} sont absolument continues par rapport à m ; donc si $\omega \subset Z$ vérifie $m(\omega) = 0$, on aura d'après (4) et Lebesgue-Nikodym $E(\omega)\hat{\alpha}_n = 0$; d'où a fortiori pour $\beta \in \mathfrak{A}$, et vu que $E(\omega)$ permute à $\underset{\sim}{R}^d$, la relation $E(\omega)V_\beta \hat{\alpha}_n = 0$; or dans toute algèbre unitaire on a $U_x y = V_y x = xy$; donc il vient aussi $U_{\alpha_n} E(\omega)\hat{\beta} = 0$; faisant converger α_n vers ε ceci donne $E(\omega)\hat{\beta} = 0$, et comme l'image de $\mathfrak{A}$ dans $\mathcal{H}$ est partout dense dans $\mathcal{H}$, on voit que $E(\omega) = 0$; la réciproque étant évidente d'après (4) et (6), on voit que

$$(7) \qquad m(\omega) = 0 \quad \text{équivaut à} \quad E(\omega) = 0 ;$$

appliquant (4) et Lebesgue-Nikodym, on voit que toutes les mesures $m_{\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b}}$ sont absolument continues par rapport à m.

Bien entendu (7) détermine m à une équivalence près ; mais nous choisirons m par (6).

Maintenant, si l'on tient compte du fait que $\mathfrak{R}$ est faiblement fermé, donc que tous les T_f donnés par (3) (f continue ou non) sont dans $\mathfrak{R}$ on vérifie immédiatement que toute fonction mesurable et bornée pour m coïncide m - presque partout avec une fonction continue parfaitement déterminée. Cette propriété est fondamentale: elle dispense en effet d'avoir à "choisir" des représentants pour les classes de fonctions mesurables.

8. Propriétés des fonctions $\theta_{\alpha,\beta}(\zeta)$. - De ce qui précède résulte que, pour $\alpha, \beta \in \mathfrak{A}$, on peut écire

(8) $$dm_{\alpha,\beta}(\zeta) = \theta_{\alpha,\beta}(\zeta) dm(\zeta)$$

où $\theta_{\alpha,\beta}$ est mesurable (et même sommable) pour m ; nous désignerons par $\mathfrak{A}_0$ l'ensemble des $\alpha \in \mathfrak{A}$ telles que la fonction $\theta_{\alpha,\alpha}(\zeta)$ soit bornée sur Z . La relation (5) et les propriétés formelles des traces impliquent les suivantes :

(T' 1) : $dm_{\alpha\beta,\gamma}(\zeta) = dm_{\beta,\alpha^*\gamma}(\zeta) \qquad (\alpha \in \mathfrak{M} \ ; \beta, \gamma \in \mathfrak{A})$

(T' 2) : $dm_{\beta,\gamma}(\zeta) = dm_{\gamma^*,\beta^*}(\zeta) \qquad (\beta, \gamma \in \mathfrak{A})$;

(T' 3) : $dm_{\alpha\beta,\alpha\beta}(\zeta) \leq \|U_\alpha\|^2 . dm_{\beta,\beta}(\zeta)$.

En combinant ceci avec les propriétés de linéarité, positivité et autres des mesures considérées, on constate facilement que $\mathfrak{A}_0$ est un idéal bilatère autoadjoint de $\mathfrak{M}$; comme d'après (6) il contient visisblement les α_n, il est partout dense ; donc, c'est une algèbre de groupe.

Ceci dit, pour $\alpha, \beta \in \mathfrak{A}_0$, on peut imposer à $\theta_{\alpha,\beta}(\zeta)$ d'être continue sur Z , ce qui la détermine parfaitement ; (T' 1) et (T' 2) se traduisent alors par les relations

(T" 1) : $\theta_{\alpha\beta,\gamma}(\zeta) = \theta_{\beta,\alpha^*\gamma}(\zeta) \qquad (\alpha \in \mathfrak{M} \ ; \beta, \gamma \in \mathfrak{A}_0 \ ; \zeta \in Z)$

(T" 2) : $\theta_{\beta,\gamma}(\zeta) = \theta_{\gamma^*,\beta^*}(\zeta) \qquad (\beta, \gamma \in \mathfrak{A}_0 \ ; \zeta \in Z)$.

Donc, pour $\zeta \in Z$ donné, l'expression $\theta_{\beta,\gamma}(\zeta)$ est une forme hermitienne positive sur l'algèbre de groupe $\mathfrak{A}_0$, et y vérifie les deux premiers axiomes des traces.

Il ne faudrait pas croire que le troisième axiome le soit aussi (ce serait trop beau). Pour s'en tirer (c'est le seul point délicat) on remarque ceci. D'abord, on a

(9) $$\operatorname{tr}(U_\beta U_\alpha U_\gamma U_\alpha^*) = \int \theta_{\beta\alpha\gamma,\alpha}(\zeta)\,dm(\zeta) \quad (\beta,\gamma \in \underset{\sim}{M}\ ;\ \alpha \in \mathfrak{A}_0)\ ;$$

d'autre part

(10) $$\operatorname{tr}(U_\beta U_\alpha U_\gamma U_\alpha^*) = \iint \operatorname{tr}(U_s U_\alpha U_t U_\alpha^*)\,d\beta(s)\,d\gamma(t)\ ;$$

donc en comparant il vient

(11) $$\iint d\beta(s)\,d\gamma(t) \int \theta_{\varepsilon_s\alpha\,\varepsilon_t,\alpha}(\zeta)\,dm(\zeta) = \int \theta_{\beta\alpha\gamma,\alpha}(\zeta)\,dm(\zeta)\ ;$$

appliquant Lebesgue-Fubini avec les précautions d'usage, on trouve que : <u>pour</u> $\alpha \in \mathfrak{A}_0$ <u>donné, il existe un ensemble négligeable</u> $N(\alpha) \subset Z$ <u>tel que, pour</u> $\zeta \notin N(\alpha)$ <u>la fonc-</u> $\theta_{\varepsilon_s\alpha\,\varepsilon_t,\alpha}(\zeta)$ <u>soit continue sur</u> $G \times G$ <u>et qu'on ait</u>

(12) $$\theta_{\beta\alpha\gamma,\alpha}(\zeta) = \iint \theta_{\varepsilon_s\alpha\,\varepsilon_t,\alpha}(\zeta)\,d\beta(s)\,d\gamma(t)$$

<u>quelles que soient</u> $\beta, \gamma \in \underset{\sim}{M}$.

Désignons maintenant par $\mathfrak{A}_0$ non plus l'algèbre de groupe précédente, mais l'algèbre de groupe (i.e. l'idéal bilatère autoadjoint) engendré par les α_n ; elle est contenue dans $\mathfrak{A}$, et (12) montre facilement que, <u>sur</u> $\mathfrak{A}_0$, le troisième axiome des traces est vérifié, pourvu qu'on élimine de Z les ensembles négligeables $N(\alpha_n)$, dont la réunion N est encore de mesure nulle.

Finalement, à tout $\zeta \in Z-N$ est attaché une trace sur G , savoir $\theta_{\alpha,\beta}(\zeta)$ définie a priori sur $\mathfrak{A}_0$; on désignera par $\zeta(\alpha\ ,\beta)$ la trace <u>achevée</u> qui la prolonge ; il est facile de voir que la trace achevée ζ ne dépend pas (à un facteur près, et à des ensembles négligeables près) du choix des α_n ou de m .

9. <u>Théorème d'existence et de décomposition</u>. - D'après les propriétés de Z , l'ensemble négligeable Z peut être supposé fermé $Z-N = Z'$ est alors localement compact.

Considérons la trace achevée ζ associée au point $\zeta \in Z'$; elle définit un Hilbert $\mathcal{H}(\zeta)$, une application canonique $\alpha \longrightarrow \hat{\alpha}(\zeta)$ de $\mathfrak{A}_0$ (entre autres) dans $\mathcal{H}(\zeta)$, deux représentations $U_\alpha(\zeta)$ et $V_\alpha(\zeta)$ de $\underset{\sim}{M}$ dans $\mathcal{H}(\zeta)$, une trace canonique tr sur l'anneau $\underset{\sim}{R}^s(\zeta)$ engendré par les $U_\alpha(\zeta)$; et on a

(13) $$\langle \hat{\alpha}(\zeta)\ ,\ \hat{\beta}(\zeta) \rangle = \zeta(\alpha\ ,\beta) = \theta_{\alpha,\beta}(\zeta)$$

pour $\alpha, \beta \in \mathfrak{A}_0$. Si l'on associe à $\alpha \in \mathfrak{A}_0$ le <u>champ de vecteurs</u> $\hat{\alpha}(\zeta)$, la famille (Λ) de ces champs de vecteurs vérifie <u>trivialement</u> les axiomes des sommes continues (voir [2]) ; et on a