ARMAND BOREL

Cohomologie des espaces homogènes

Séminaire N. Bourbaki, 1952, exp. nº 45, p. 371-378

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1948-1951__1__371_0>

Séminaire BOURBAKI
(Mai 1951)

COHOMOLOGIE DES ESPACES HOMOGÈNES

par Armand BOREL

1. L'anneau spectral des espaces fibrés.

Nous ne considèrerons que des espaces localement compacts et noterons $H(X , A)$ l'anneau de cohomologie de Čech à supports compacts de X pour l'anneau de coefficients A .

J. LERAY a attaché à la projection d'un espace fibré (E , B , F) sur sa base B (ou même plus généralement à toute application continue) un anneau spectral, c'est-à-dire une suite d'anneaux différentiels bigradués ... $H_1 , H_2 , \dots , H_{r+1}$ étant l'anneau de cohomologie de H_r pour une différentielle d_r ; si par exemple la fibre est de dimension finie, on a $H_r = H_{r+1}$ pour r assez grand, c'est l'anneau terminal qui est isomorphe à l'anneau gradué de $H(F , A)$ convenablement filtré ; cela veut dire que $H(E , A)$ possède une suite d'idéaux emboîtés J^p vérifiant $J^p . J^q \subset J^{p+q}$, telle que H_r soit la somme directe des groupes J^p/J^{p+1} , munie d'un produit évident ; 2 cas seulement nous intéresseront :

1) la fibre est un groupe de Lie compact connexe G opérant sur E , de façon simplement transitive sur chaque fibre, E est alors dit espace fibré principal de fibre G .

2) E est le quotient d'un tel espace par la relation d'équivalence définie par un sous-groupe fermé g , la fibre est donc l'espace homogène G/g . Dans ces deux cas $H_1 = H(B , H(F))$ est somme directe des groupes $H^p(B , H^q(F))$, p est le degré-base, q le degré-fibre, $(p + q)$ le degré total, d_r augmente le degré base de $r + 1$, diminue le degré-fibre de r . Si A est un corps

$$H_1 = H(B , A) \otimes H(F , A) ,$$

si de plus E est compact, les éléments de $H^0(B , A) \otimes H(F , A)$ qui sont cocycles pour tous les d_r forment l'image de $H(E , A)$ par la transposée i^* de l'injection $F \to E$; si en particulier i^* est sur (fibre totalement non homologue à zéro) toutes les différentielles sont nulles et H_1 est l'anneau terminal, et réciproquement

2. Espaces classifiants.

Soit G un groupe de Lie compact. On appelle espace universel pour G et pour la dimension n un espace fibré principal E de groupe G qui soit un polyèdre fini tel que $\pi_i(E) = 0$ pour $i \leq n$; on a en particulier $H^0(E,Z) = Z$, $H^i(E,Z) = 0$ pour $0 < i \leq n$; nous noterons cet espace $E(n, G)$ ou E_G. Il est trivial, mais utile, de remarquer que si g est un sous-groupe fermé de G, $E(n, G)$ est aussi universel pour g. Ainsi pour montrer qu'un groupe de Lie compact possède des espaces universels pour des dimensions arbitrairement grandes, il suffit de l'établir pour les groupes orthogonaux, pour lesquels on prend les variétés de Stiefel. Soit $B(n, G)$ ou B_G la base de $E(n, G)$, et (E, B, G) un espace fibré principal à base localement compacte, paracompacte de dimension $\leq n$, il existe alors un homomorphisme de E dans $E(n, G)$ et de plus les structures d'espaces fibrés principaux de base B et de groupe G sont en correspondance biunivoque avec les classes d'applications de B dans $B(n, G)$, nommé pour cela espace classifiant pour G et pour la dimension n ; on a un théorème analogue de classification pour les structures fibrées de base B, de fibre donnée F, admettant G comme groupe structural. Si f est une application $B \to B(n, G)$ l'image de $f^* : H(B_G, A) \to H(B, A)$ est un invariant de la structure fibrée, le sous-anneau caractéristique. (Si B est non compact, on prend pour $H(B, A)$ l'anneau de cohomologie à supports fermés quelconques) ; il peut a priori dépendre de $B(n, G)$, cependant il n'en est rien, on a le

THÉORÈME 1. – 2 espaces classifiants $B(n, G)$, $B'(n, G)$ ont des anneaux de cohomologie isomorphes jusqu'à n et si B est de dimension $\leq n$ (localement compact et paracompact) les sous-anneaux caractéristiques définis par $B(n, G)$ et $B'(n, G)$ coïncident.

Pour le voir, on montre (par considérations d'anneaux spectraux) que si g est une application de $E(n, G)$ dans $E(m, G)$, $(n \leq m)$, g^* est un isomorphisme de $H(B(m, G), A)$ sur $H(B(n, G), A)$ jusqu'à n.
Cela étant il suffit de remarquer que dans le schéma

$$\begin{tikzcd} & B(n, G) \arrow[dl, "g"'] & \\ B(m, G) & & B \arrow[ul, "f"'] \arrow[dl, "f'"] \\ & B'(n, G) \arrow[ul, "g'"] & \end{tikzcd}$$

$g \circ f$ et $g' \circ f'$ sont homotopes.

$H(B_G)$ étant ainsi déterminé (jusqu'à n) par G, on peut chercher à établir des relations entre la cohomologie de G et celle de B_G. A ce sujet on a le théorème 2, où K_p désigne un corps de caractéristique p.

THÉORÈME 2. – Supposons que $H(G, K_p)$ soit l'algèbre extérieure d'un espace

<u>admettant une base</u> $p_1, \dots, p_m$ <u>formée d'éléments de degrés impairs</u> $r_1, \dots, r_m$ <u>Alors jusqu'à</u> n : $H(B(n, G), K_p) = K_p[q_1, \dots, q_m]$ <u>où</u> q_i <u>est de degré</u> $r_i + 1$. <u>On a de même</u> $H(B(n, G), Z) = Z[q_1, \dots, q_m]$ <u>si</u> $H(G, Z)$ <u>est l'algèbre extérieure d'un groupe libre de base</u> $p_1, \dots, p_m$.

La démonstration repose sur une étude de l'anneau spectral de la projection de E_G sur B_G, elle fournit de plus des renseignements relatifs à la transgression qui seront indiqués plus loin. Rappelons que d'après le théorème de Hopf, $H(G, K_p)$ vérifie l'hypothèse du théorème si $p = 0$, ou, pour $p \neq 0$, si $H(G, Z)$ n'a pas d'élément d'ordre fini divisible par p ; $H(G, Z)$ la vérifie s'il n'a pas de torsion.

EXEMPLES. On peut prendre les grassmanniennes complexes et quaternionniennes comme espaces classifiants pour le groupe unitaire unimodulaire $SU(p)$ à p variables, resp. pour le groupe $Sp(p)$ unitaire de p variables quaternionniennes. D'autre part on a :

$$H(SU(p), Z) = H(S_3 \times S_5 \times \dots \times S_{2p-1}, Z), \quad H(Sp(p), Z) = H(S_3 \times S_7 \times \dots \times S_{4p-1}, Z)$$

le théorème 2 s'applique et fournit des renseignements sur la cohomologie des grassmanniennes complexes et quaternionniennes.

3. – <u>La trangression dans les espaces fibrés principaux.</u>

Les définitions et le théorème de ce numéro valent en cohomologie singulière ou de Čech. Soit (E, B, G) un espace fibré principal, l'injection i d'une fibre dans E et la projection p de E sur B induisent des applications i^*, p^* des cochaînes de E dans celles de G, resp. des cochaînes de B dans celles de E (la deuxième étant biunivoque) ; $h \in H(G, A)$ est <u>transgressif</u> s'il existe une cochaîne c de E telle que $i^*(c)$ soit un cocycle de la classe h, et que dc soit dans l'image de p^* ; cette notion a une traduction dans l'anneau spectral de Leray si E est compact ; h est transgressif si et seulement si son image dans H_r est un cocycle pour d_r lorsque $1 \leq r \subset$ degré h.

DÉFINITION. – $h \in H(G, A)$ est absolument transgressif s'il est transgressif (pour la cohomologie à coefficients dans A) dans tout espace fibré principal (E, B, G) à base B localement compacte, paracompacte et de dimension finie.

THÉORÈME 3. – <u>Supposons que</u> $H(G, K_p)$, <u>resp.</u> $H(G, Z)$, <u>vérifie les hypothèses du théorème 2. Alors on peut trouver une base</u> $p_1, \dots, p_m$ <u>de</u> $H(G, K_p)$, <u>resp.</u> $H(G, Z)$, <u>formée d'éléments absolument transgressifs. Tous les éléments</u>

absolument transgressifs de degrés positifs de $H(G)$ sont combinaisons linéaires des p_i. L'unité et les classes des cobords des cochaînes de transgression engendrent le sous-anneau caractéristique.

Il est clair que si $f : E \to E'$ est un homomorphisme d'espaces fibrés principaux et si h est transgressif dans E', il l'est aussi dans E. Il suffit donc de démontrer ce théorème dans les espaces universels, pour lesquels il s'obtient en même temps que le théorème 2. On tire la dernière assertion, du fait que l'on peut, dans le théorème 2, prendre q_i comme classe du cobord d'une cochaîne de transgression de p_i.

REMARQUES. – 1° Soit $SO(n)$ le groupe orthogonal unimodulaire à n variables réelles, on démontre que $H(SO(n), Z)$ a des éléments d'ordre 2 (mais pas d'autres ordres) ; de plus $H(SO(n), Z_2)$ n'est pas une algèbre extérieure et on ne peut directement lui appliquer le théorème précédent, néanmoins on peut voir qu'il possède un système unique de générateurs p_i absolument transgressifs de degrés $1, 2, \ldots, (n-1)$ et en déduire que l'algèbre de cohomologie mod 2 de la base d'un espace classifiant est jusqu'à n une algèbre de polynomes en $n-1$ variables de degrés $2, 3, \ldots, n$, images des p_i par la transgression. Cela rattache donc aussi à la transgression la cohomologie mod 2 des grassmanniennes réelles de plans orientés.

2° Dans le cas d'espaces fibrés différentiables et pour la cohomologie réelle, les théorèmes 2 et 3 sont essentiellement dûs à A. WEIL (cf. Exposé de KOSZUL [1] paragraphe 5). C'est du reste le formalisme de WEIL qui a suggéré l'idée d'utiliser les espaces classifiants pour étudier la transgression.

4. 2 anneaux spectraux relatifs aux espaces homogènes.

Soient G un groupe de Lie compact et g un sous-groupe fermé, E_G un espace universel pour une dimension assez grande, f l'application canonique $B_g = E_G/g$ sur $E/G = B_G$, et enfin $\tilde{E}$ l'espace fibré principal image réciproque de E pour f, c'est-à-dire l'espace de base E_G/g vérifiant le schéma

$$\begin{tikzcd} E_G & \tilde{E} \arrow[l, "f'"'] \arrow[d, "p'"] \\ E_G \arrow[u, leftarrow, "p"'] & E_G/g \arrow[l, "f"] \end{tikzcd}$$

f' fait de $\tilde{E}$ un espace fibré de fibre G/g et de base E_G, à cohomologie triviale, donc $H(\tilde{E}, A) = H(G/g, A)$, d'autre part p' en fait un espace fibré principal de fibre G et de base $E_G/g = B_g$, donc

THÉORÈME 4. - Il existe un anneau spectral pour lequel $H_1 = H(B_g , H(G , A))$ et dont l'anneau terminal gradué associé à $H(G/g , A)$ convenablement filtré.

Ici g n'est pas forcément connexe ; il peut en particulier être discret, $H(B_g , H(G , A))$ est alors l'anneau de cohomologie de g , opérant trivialement sur $H(G , A)$, au sens des groupes discrets. Si l'on est dans les conditions d'application du théorème 3, les propriétés de transgression permettent de préciser notablement la structure de l'anneau spectral.

En cohomologie réelle, on peut aller beaucoup plus loin ; en effet, H. CARTAN a montré que l'on pouvait munir $H(B_g , H(G , R)) = H(B_g , R) \otimes H(G , R)$ d'une différentielle telle que l'algèbre de cohomologie correspondante soit directement celle de G/g . On peut du reste retrouver ce résultat dans le cadre de la théorie de Leray, en utilisant les théorèmes 2 et 3 ; nous ne le ferons pas ici, nous contentant d'étudier dans la suite G/g quand G et g ont le même rang.

L'application f du schéma précédent fait de B_g un espace fibré de fibre G/g et de base B_G , donc

THÉORÈME 5. - Il existe un anneau spectral pour lequel $H_1 = H(B_G , H(G/g , A))$ et qui se termine par l'anneau gradué associé à $H(B_g , A)$ convenablement filtré.

5. Cohomologie réelle de G/g quand rang G = rang g .

Nous noterons $H(X)$ et $P(X)$ l'algèbre de cohomologie réelle de X et son polynome de Poincaré.

On sait que les tores maximaux d'un groupe de Lie compact sont conjugués les uns des autres par des automorphismes intérieurs, leur dimension commune définit le rang r de G (au sens global) ; on peut montrer que r est égal à la dimension de l'espace dont $H(G)$ est l'algèbre extérieure (nous n'utiliserons pas ce fait si ce n'est pour justifier nos notations) ; soient $N_1 - 1 , \ldots , N_r - 1$ les degrés des éléments d'une base de cet espace, les N_i sont pairs ; soit T un tore maximal de G ; d'après le théorème 2, $H(B_G)$ et $H(B_T)$ sont des algèbres de polynomes à r variables de degrés $N_1 , \ldots , N_r$, resp. de degré 2.

Nous verrons plus bas que les éléments non nuls de $H(G/T)$ sont de degrés pairs ; admettons-le pour l'instant et considérons l'anneau spectral du théorème 5 (avec $g = T$) ; dans H_1 , il n'y a que des éléments de degrés pairs, donc les différentielles d_r qui augmentent le degré total de 1 , sont toutes nulles,

H_1 est l'anneau terminal et

$$P(G/T) = (1 - t^{N_1}) \dots (1 - t^{N_r})/(1 - t^2)^r \tag{1}$$

de plus G/T est totalement non homologue à zéro dans B_T, $H(B_T)$ est appliqué <u>sur</u> $H(G/T)$ par la transposée de l'injection, $H(G/T)$ est donc engendré par ses éléments de degré 2 et égal à sa sous-algèbre caractéristique (en tant que base de G fibré par T).

Soit maintenant $g \subset G$ connexe de rang égal à celui de G, T un tore maximal de g, et i l'injection de g/T dans G/T. Prenons des cochaînes de transgression $c_1, \dots, c_r$ dans G pour une base $t_1, \dots, t_r$ de $H^1(T)$, évidemment les cochaînes $i^*(dc_i)$ sont cobords de cochaînes de transgression dans g pour les t_i, leurs classes de cohomologie sont donc dans l'image de $i^* : H(G/T) \to H(g/T)$ et comme elles engendrent $H(g/T)$ on voit que i^* est <u>sur</u>, c'est-à-dire que g/T est totalement non homologue à zéro dans G/T (cette remarque est due à LERAY) donc que $P(G/T) = P(G/g).P(g/T)$ ou, en tenant compte de (1),

$$P(G/g) = \frac{(1 - t^{N_1})(1 - t^{N_2}) \dots (1 - t^{N_r})}{(1 - t^{n_1})(1 - t^{n_2}) \dots (1 - t^{n_r})} \tag{2}$$

c'est la formule de Hirsch. Pour terminer, il nous reste à établir le

LEMME. - <u>Soient</u> T <u>un tore maximal de</u> G, <u>alors</u> $H^i(G/T) = 0$ <u>si</u> i <u>est impair</u>.

Esquisse de la démonstration : Procédant par récurrence on suppose le lemme vrai pour G' si dimension $G' < \dim G$ et rang $G' \leq$ rang G ; on voit tout d'abord qu'il suffit d'examiner le cas où G est semi-simple ; son centre C est donc discret et il existe $x \in G$ tel que $x \notin C$, $x^2 \in C$; soit G' la composante connexe du centralisateur de x dans G, on a $\dim G' < \dim G$ et, comme x est contenu dans un tore maximal, $x \in G'$ et rang G' = rang G. Soit encore P l'image de G' dans G/G', V l'espace tangent à G/G' en P ; l'automorphisme intérieur $y \to xyx^{-1}$ de G induit une transformation involutive S_x de G/G' et, comme on le voit facilement, la symétrie par rapport à P de V. On sait d'autre part que toute classe de cohomologie de G/G' peut être représentée par une forme multilinéaire alternée sur V invariante notamment par S_x, elle est donc forcément de degré pair et ainsi $H^i(G/G') = 0$ pour i impair. Dans l'anneau spectral de la fibration de G/T par G'/T, $H_1 = H(G/G') \otimes H(G'/T)$ n'a alors, vu l'hypothèse d'induction, que des éléments de degrés pairs donc H_1 est l'anneau terminal, ce qui démontre le lemme.

Complément. Soit $N(T)$ le normalisateur de T dans G, et $W(G) = N(T)/T$ c'est un groupe fini, le groupe de Weyl de G, qui joue un rôle fondamental dans la théorie des groupes compacts ; il opère de façon évidente sur G/T et LERAY a montré que la représentation induite dans $H(G/T)$ était isomorphe à la représentation régulière. $W(G)$ opère aussi sur la fibration de B_T par G/T, et trivialement sur B_G ; on en déduit que dans $H(B_T)$ qui est, au point de vue additif, égal à $H(B_G) \otimes H(G/T)$, $H(B_G)$ est isomorphe à l'anneau des polynomes invariants par $W(G)$. Ainsi la détermination des nombres N_i, c'est-à-dire en définitive des nombres de Betti de G se ramène à l'étude des invariants symétriques d'un groupe fini (ce qui a aussi été obtenu d'une autre façon par C. CHEVALLEY) ; de même en considérant la manière dont $W(g)$ opère sur la fibration de G/T par g/T, pour laquelle H_1 est aussi anneau terminal, on voit que $H(G/g)$ est isomorphe à l'anneau des invariants de $W(g)$ opérant sur $H(G/T)$. Ce résultat vaut même si g n'est pas connexe.

6. Remarques sur la cohomologie mod p de G/g quand rang G = rang g.

Les renseignements connus sont fragmentaires. Signalons tout d'abord que l'on peut vérifier qu'"en général" G/T est sans torsion, de façon précise, G/T est sans torsion si G est localement produit direct de groupes simples dont aucun n'est de l'un des types exceptionnels E_6, E_7, E_8. Pour ces 3 derniers, on ne sait rien. On peut donc espérer que les hypothèses relatives à la torsion de G/T dans les 2 théorèmes ci-dessous s'avèreront un jour superflues, elles le sont en tout cas si l'on exclut E_6, E_7, E_8.

Ainsi, $H(G/T, R)$ et $H(G/T, K_p)$ ont en général même polynome de Poincaré, mais par contre ils peuvent différer au point de vue multiplicatif, car ce dernier n'est pas toujours engendré par ses éléments de degré 2 ; ce fait paraît être lié à la torsion de G.

Disons que X est sans p-torsion si $H(X, Z)$ n'a pas d'élément d'ordre fini divisible par p ; on a le

THÉORÈME 6. - *Si G et G/T sont sans p-torsion, $H(G/T, K_p)$ est engendré par ses éléments de degré 2.*

Si maintenant $H(g/T, K_p)$ est engendré par ses éléments de degré 2, on voit comme au numéro 5 qu'il est totalement non homologue à zéro dans G/T, ce qui conduit au

THÉORÈME 7. - *Si g, G/T et g/T sont sans p-torsion, G/g est sans p-torsion.*

Cela permet en particulier de montrer que les "variétés de drapeaux" complexes considérées par EHRESMANN dans sa thèse sont sans torsion, résultat obtenu par EHRESMANN à l'aide de décompositions cellulaires, de même pour les variétés de drapeaux quaternionniennes.

"En général", on voit que si rang g = rang G , g sans p-torsion implique G/g sans p-torsion, la torsion de G n'intervient pas dans cet énoncé relatif à la structure additive, par contre elle se manifeste dans la structure multiplicative de $H(G/g , K_p)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] KOSZUL (Jean-Louis). - Cohomologie des espaces fibrés différentiables et connexions, Séminaire Bourbaki, t. 3, 1950/51.

ADDITIF

Pour les démonstrations détaillées des résultats exposés ici, voir :

BOREL (Armand). - Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts, Annals of Math., Series 2, t. 57, 1953, p. 115-207.

Pour une vue d'ensemble des résultats acquis jusqu'en 1955, la topologie des groupes de Lie, espaces homogènes, espaces fibrés principaux, voir :

SAMELSON (Hans). - Topology of Lie groups, Bull. Amer. math. Soc., t. 58, 1952, p. 2-37.

BOREL (Armand). - Topology of Lie groups and characteristic classes, Bull. Amer. math. Soc., t. 61, 1955, p. 397-432.

qui contiennent une bibliographie de la question, complète jusqu'à 1955. Depuis ont paru notamment :

BOTT (Raoul). - An application of the Morse theory to the topology of Lie-groups, Bull. Soc. math. France, t. 84, 1956, p. 251-281.

qui démontre entre autres que G/T et l'espace des lacets sur un groupe de Lie compact, connexe et simplement connexe, sont sans torsion, (cf. paragraphe 6), et :

ŠVARC (A. C.). - Gomologii spinornoj gruppy, Doklady Akad. Nauk SSSR, t. 104, 1955, p. 26-29.

qui complète des résultats de l'auteur de ces lignes sur l'homologie du groupe des spineurs.

[Juin 1957]