JEAN LERAY

La résolution des problèmes de Cauchy et de Dirichlet au moyen du calcul symbolique et des projections orthogonales et obliques

Séminaire N. Bourbaki, 1952, exp. nº 48, p. 407-417

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1948-1951__1__407_0>

Séminaire BOURBAKI
(Mai 1951)

LA RÉSOLUTION DES PROBLÈMES DE CAUCHY ET DE DIRICHLET AU MOYEN DU CALCUL SYMBOLIQUE ET DES PROJECTIONS ORTHOGONALES ET OBLIQUES

par Jean LERAY.

I. CALCUL SYMBOLIQUE ; PROJECTIONS.

SOMMAIRE du I. - Le n° 1 définit un anneau E et un sous-anneau F de fonctions réelles, un anneau A et un sous-anneau B de fonctions holomorphes ; il définit sur ces anneaux diverses normes. Au n° 2 la transformation de Laplace et le théorème de Plancherel montrent que E est une algèbre sur B et F une algèbre sur A , ce qui définit le calcul symbolique. Le n° 3 définit des projections, qui ne commutent ni entre elles, ni avec les opérateurs (qui commutent entre eux) de calcul symbolique.

HISTORIQUE. - M. RIESZ et L. GÅRDING ont utilisé quelques opérateurs du calcul symbolique, H. WEYL, VISCHIK, GÅRDING ont utilisé des projections orthogonales ; pour la théorie des projections, voir J. DIXMIER.

1. Définition de deux anneaux fonctionnels et de leur topologie.

Données. - Nous nous donnons un espace vectoriel X sur le corps des nombres réels ($\dim X = \ell < \infty$) , son dual Ξ et, dans Ξ , un domaine convexe Γ .

Définition de l'anneau E et de son sous-anneau F. - Les fonctions $f(x)$ définies sur X et mesurables possèdent les normes

$$\| f(x) \|_n = \left[\int_X \!\! \int |f(x)|^n \, dx_1 \dots dx_\ell \right]^{\frac{1}{n}} \quad ;$$

E sera l'ensemble des $f(x)$ telles que

$$\| e^{-\langle \xi , x \rangle} f(x) \|_2 < +\infty \qquad \text{pour tout } \xi \in \Gamma \quad ;$$

l'hypothèse que Γ est ouvert et l'inégalité de Schwarz montrent que

$$\| e^{-\langle \xi , x \rangle} f(x) \|_1 < +\infty \qquad \text{pour } f(x) \in E \; , \; \xi \in \Gamma \quad ;$$

donc, $*$ désignant le produit de composition,

$$f_1 * f_2 \in E \quad \text{si} \quad f_1 \quad \text{et} \quad f_2 \in E .$$

E , muni de ce produit, est donc un anneau. Les $f(x)$ dont les dérivées de tous ordres existent et appartiennent à E constituent un sous-anneau de E ; nous le notons F .

Nous utiliserons sur E la topologie borne supérieure des topologies définies sur les normes $\| e^{-\langle \xi, x\rangle} f(x) \|_2$, $\xi \in \Gamma$: relativement à cette topologie E est complet.

Définition de l'anneau A et de son sous-anneau B. - A est l'anneau que constituent les fonctions $a(\xi + i\eta)$ holomorphes dans le tube $(\xi, \eta) \in \Gamma \times \Xi$ et inférieures à certaines puissances de $\|\eta\|$ pour $\xi \in$ partie compacte de Γ, $\|\eta\| \longrightarrow \infty$. On pose

$$\| a(\xi + i\eta) \|_n = \Big[\int_{\Xi} \int |a(\xi + i\eta)|^n \, d\eta_1 \dots d\eta_n \Big]^{\frac{1}{n}}$$

$\| a(\xi + i\eta) \|_\infty = \underset{\eta \in \Xi}{\text{borne sup}} \, |a(\xi + i\eta)|$, pour ξ fixe.

B est le sous-anneau de A constitué par les $a(\xi + i\eta)$ tels que $\| a(\xi + i\eta) \|_\infty$ est borné sur toute partie compacte de Γ .

Nota. - Dans A la multiplication est la multiplication numérique et non le produit de composition.

2. Le calcul symbolique.

D'après le théorème de Plancherel, la transformation de Laplace

$$\mathcal{L} : f(x) \longrightarrow a(\xi + i\eta) = (2\pi)^{-\frac{\ell}{2}} \int \dots \int e^{-\langle \xi + i\eta, x\rangle} f(x) \, dx_1 \dots dx_\ell$$

est un isomorphisme de E sur l'anneau constitué par les $a(\xi + i\eta)$ holomorphes dans le tube $\Gamma \times \Xi$ et tels que $\| a(\xi + i\eta) \|_2$ soit borné sur toute partie compacte de Γ ; or cet anneau est un idéal de B ; donc,

$$\text{si} \quad f(x) \in E \quad \text{et} \quad b(\xi + i\eta) \in B \, , \quad \text{alors} \quad \mathcal{L}^{-1} (b . \mathcal{L} f) \in E \; ;$$

$\mathcal{L}^{-1}(b . \mathcal{L} f)$ sera noté $b(p) \, f(x)$ et nommé produit symbolique de $f(x)$ par $b(p)$. En vertu de cette définition E est une algèbre sur B : $b(p) \in B$ est un opérateur linéaire de E tel que

$$b(p) \, [f_1(x) * f_2(x)] = [b(p) \, f_1(x)] * f_2(x) = f_1(x) * [b(p) \, f_2(x)] .$$

$$[b_1(p).b_2(p)]\, f(x) = b_1(p)\,[b_2(p)\ f(x)] = b_2(p)\,[b_1(p)\ f(x)]\ ;$$

$b(p)$ est continu et, plus précisément

$$(1)\qquad \| e^{-\langle \xi ,x\rangle} b(p)\ f(x) \|_2 \leqslant \| b(\xi + i\eta) \|_\infty \ .\ \| e^{-\langle \xi ,x\rangle} f(x) \|_2$$

pour tout $\xi \in \Gamma$. On déduit de (1), ceci : si Γ n'est pas borné, la valeur de $b(p)\ f(x)$ au point x ne dépend que de la restriction de $f(x)$ à $x + C$, C étant l'adhérence de l'ensemble convexe [1] que constituent les points x tels que

$$\operatorname*{borne\,inf}_{\xi\in\Xi}\,[\log \| b(\xi + i\eta) \|_\infty - \langle \xi ,x\rangle] \quad -\infty\ .$$

A chaque $b(p)$ correspond une distribution k telle que

$$b(p)\ f(x) = k * f\ ;$$

si $b(\xi) = 0$ est un cône algébrique sans singularité, k s'exprime à l'aide d'intégrales abéliennes (HERGLOTZ, BUREAU, PETROWSKY) ;

si $\| b(\xi + i\eta) \|_2 < \infty$, k est la fonction

$$(2)\qquad k(x) = (2\pi)^{-\ell} \int_{\Xi} \cdots \int e^{\langle \xi + i\eta ,x\rangle} a(\xi + i\eta)\, d\eta_1 \cdots d\eta_\ell \quad .$$

REMARQUE 1. - Soit une fonction analytique $b(\xi)$; $\| b(\xi+i\eta) \|_n$ est une fonction convexe de ξ (HARDY), définie sur un ou plusieurs ensembles convexes disjoints : $\Gamma_1, \dots, \Gamma_\sigma$ (BOCHNER) ; notre hypothèse que Γ est convexe n'est donc pas restrictive ; mais, si $\sigma > 1$, le symbole $b(p)\ f(x)$ n'est défini sans ambiguité que si l'on précise le choix de Γ en écrivant : $b(p)\ f(x)$ pour $p \in \Gamma_\alpha$.

EXEMPLE 1. - Soient un point a de coordonnées $a_1,\dots,a_\ell$ et une fonction $f(x_1,\dots,x_\ell)$ de carré sommable, nulle hors d'un compact :

$$e^{a_1 p_1 + \dots + a_\ell p_\ell} f(x_1,\dots,x_\ell) = f(x_1 + a_1,\dots,x_\ell + a_\ell)\ ;$$

C est le point a .

EXEMPLE 2.

$$\frac{1}{p_1}\ f(x_1,\dots,x_\ell) = \int_{-\infty}^{x_1} f(t,x_2,\dots,x_\ell)\, dt \qquad \text{pour } p_1 > 0\ ;$$

---

[1] Cet ensemble est une réunion dénombrable d'ensembles fermés convexes.

$$= -\int_{x_1}^{+\infty} f(t,x_2,\dots,x_\ell)dt \quad \text{pour} \quad p_1 < 0 .$$

REMARQUE 2. - L'adjoint de $a(p)$, pour la norme $\| e^{-\langle \xi,x\rangle} f(x) \|_2$ est $\overline{a(2\xi - p)}$.

REMARQUE 3. - Si $f(x) \in F$, alors $\mathcal{L}^{-1}(a, \mathcal{L} f)$ F quel que soit $a(\xi + i\eta) \in A$; donc F <u>est une algèbre sur</u> A : le produit symbolique $a(p)\,f(x)$ a un sens. <u>Si</u> $a(p)$ <u>est un polynôme,</u>

(3) $$a(p_1,\dots,p_\ell)\, f(x) = a\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_\ell}\right) f(x) ;$$

en particulier, si $a(p) = \langle p,a\rangle$ et $f(x) = \langle f,x\rangle$ <u>sont linéaires et homogènes,</u> alors : $a(p)\, f(x) = \langle f,a\rangle$.

3. <u>Les projections</u>.

On utilise sur E d'autres opérateurs que ceux du calcul symbolique : les projections, qui en général ne commutent ni entre elles ni avec les opérateurs du calcul symbolique.

DÉFINITION. - Une application linéaire ϖ de E en lui-même telle que $\varpi = \varpi^2$ est nommée projection de E sur ϖE parallèlement à $\varpi^{-1}(0)$.

Soient V et W deux sous-espaces vectoriels de E ; pour qu'il existe une projection de E sur V parallèlement à W , il faut et il suffit que :

$$E = V \dotplus W \qquad \text{(somme directe)}.$$

EXISTENCE. - (cf. DIXMIER). Soit $\alpha_\xi(V,W)$ [soit $\alpha'_\xi(V,W)$] la borne inférieure des angles des droites de V et W [des droites orthogonales à V et à W] dans l'espace de Hilbert que constituent les fonctions $f(x)$ telles que $\| e^{-\langle \xi,x\rangle} f(x) \|_2 < \infty$; <u>si</u> V <u>et</u> W <u>sont fermés dans</u> E <u>et si</u> $\alpha_\xi(V,W)$ <u>et</u> $\alpha'_\xi(V,W)$ <u>ont des bornes inférieures positives quand</u> $\xi \in$ <u>partie compacte de</u> Γ, <u>alors la projection</u> ϖ <u>de</u> E <u>sur</u> V <u>parallèlement à</u> W <u>existe</u> ; elle est continue et plus précisément

(4) $$\alpha_\xi(V,W) = \alpha'_\xi(V,W) \; ; \; \| e^{-\langle \xi,x\rangle} \varpi f(x) \|_2 \leqslant \frac{1}{\sin\alpha_\xi(V,W)} \| e^{-\langle \xi,x\rangle} f(x) \|_2$$

si $\xi \in \Gamma$.

II. LES PROBLÈMES AUX LIMITES.

SOMMAIRE du II : HISTORIQUE. - Le n° 1 attache à une variété algébrique $a(\xi)=0$ divers domaines convexes de Ξ : les Γ_α, qui régissent le problème de Cauchy ; les Δ_β, qui régissent le problème de Dirichlet. Le n° 2 retrouve et précise la solution du problème de Cauchy donnée par GÅRDING : GÅRDING envisage les cônes directeurs γ_α des Γ_α sans utiliser les Γ_α ; il ne peut donc pas obtenir l'inégalité (6). Le n° 3 définit des opérateurs des Green du type

$$(8) \qquad a^{-\frac{1}{2}}(p)\,\varpi\, a^{-\frac{1}{2}}(p) \quad ,$$

où ϖ est une projection [non nécessairement orthogonale comme chez H. WEYL, VISCHIK, GÅRDING, qui ont résolu divers problèmes self-adjoints sans utiliser ni le calcul symbolique, ni d'opérateur du type (8)] ; enfin le n° 3 étend l'alternative de Fredholm, pour les équations totalement elliptiques, aux domaines bornés. Les équations à coefficients variables ne sont pas étudiées ici ; les problèmes aux limites du type mixte non plus.

4. Définition de divers ensembles convexes attachés à la variété algébrique $a(\xi)=0$

Soit $a(\xi)$, où $\xi\in\Xi$, un polynôme à coefficients réels ; soit m son degré ; soit $a_m(\xi)$ l'ensemble de ses termes de degré m.

Envisageons les points $\xi\in\Xi$ tels que $a(\xi+i\eta)=0$ pour au moins un $\eta\in\Xi$: ce sont les milieux des couples de points imaginaires conjugués de la variété algébrique $a(\xi+i\eta)=0$; soient Γ_α les composantes convexes du complémentaire de l'ensemble de ces points ; vu n° 1, remarque 1 (BOCHNER), les Γ_α sont des domaines convexes à l'intérieur desquels $\| a^{-1}(\xi+i\eta)\|_\infty$ est borné ; $\mathring{\gamma}_\alpha$ désignera l'intérieur du cône directeur γ_α de Γ_α. Soit

$$2\omega(\xi) = \underset{\eta\in\Xi}{\text{oscillation}} \arg a(\xi+i\eta) \quad ;$$

les points des Γ_α en lesquels $2\omega(\xi)<\pi$ constituent des domaines convexes, notés Δ_β ; ils ne peuvent exister que pour m pair.

REMARQUE 1. - Les points ξ tels que toute droite passant par ξ coupe la variété $a(\xi+i\eta)=0$ en des points tous réels constituent un ou plusieurs domaines Γ^*_α, dont les frontières font partie de cette variété et dans lesquels $\| a^{-1}(\xi+i\eta)\|_\infty = |a^{-1}(\xi)|$: chaque Γ^*_α est un Γ_α ; la réciproque est exacte quand $a(\xi)$ est homogène.

REMARQUE 2. – Tout $\mathring{\gamma}_\alpha$ associé à $a(\xi)$ est un Γ_α associé à $a_m(\xi)$; la réciproque est exacte, sauf si la variété $a(\xi + i\eta) = 0$ touche l'hyperplan de l'infini en un point réel.

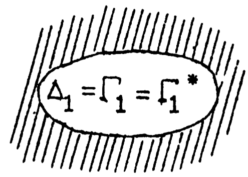
REMARQUE 3. – Si les singularités réelles de la variété $a(\xi) = 0$ ont une dimension $< \ell - 2$, alors le nombre des Γ^*_α est :

0, 1 ($\mathring{\gamma}^*_1$ vide) ou 2 ($\mathring{\gamma}^*_1$ et $\mathring{\gamma}^*_2$ opposés, non vides).

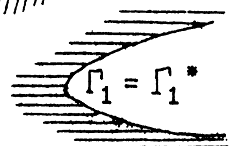
EXEMPLE. – Enumérons les Γ_α, Γ^*_α, Δ_β correspondant à diverses variétés $a(\xi) = 0$ pour $\ell = 2$ ou 3.

1°. Ellipsoïde ou ellipse imaginaires, paraboloïde hyperbolique : aucun.

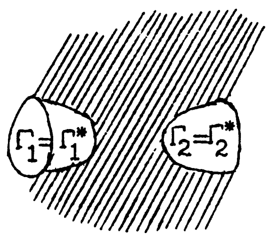
2°. Ellipsoïde ou ellipse réels :



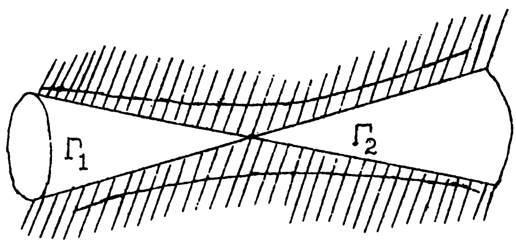
3°. Paraboloïde elliptique, parabole



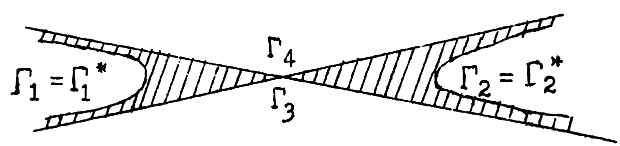
4°. Hyperboloïde à 2 nappes



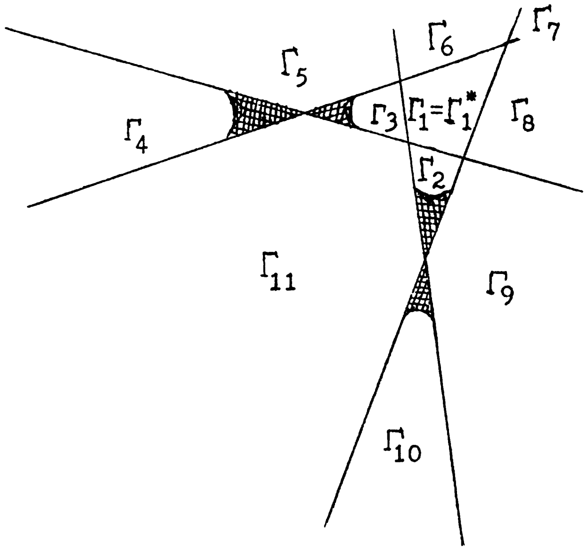
5°. Hyperboloïde à 1 nappe



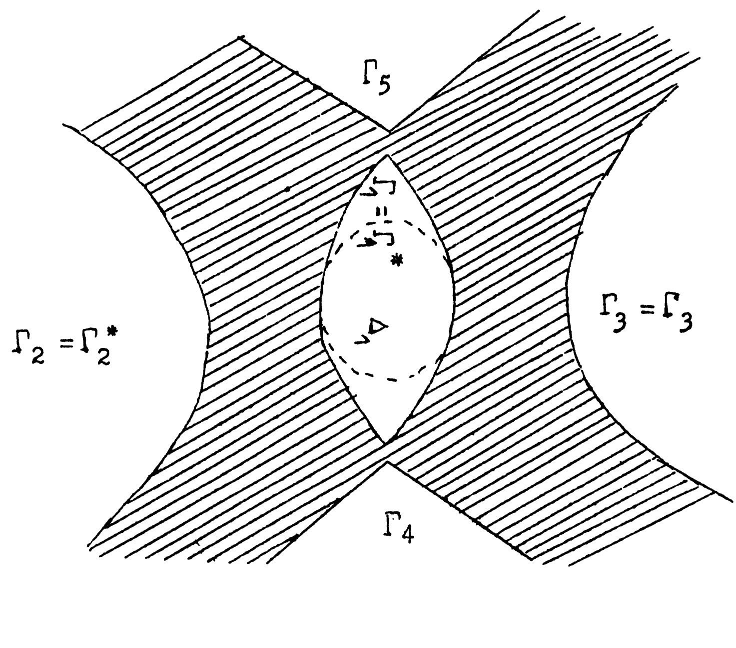
6° Hyperbole



7°. Deux hyperboles



8°. Deux hyperboles symétriques par rapport à O.



5. Le problème de Cauchy.

Si $f(x)$ est nul hors d'un compact, l'équation d'inconnue $u(x)$

(5) $$a(p)\,u(x) = f(x)$$

possède une solution vérifiant

(6) $$\| e^{-\langle \xi, x\rangle} u(x) \|_2 < +\infty \quad \text{pour } \xi \in \Gamma_\alpha \quad ;$$

c'est, d'après le n° 2,

(7) $$u(x) = a^{-1}(p)\,f(x) \quad \text{pour } p \in \Gamma_\alpha \,.$$

Si Γ_α n'est pas borné, la valeur au point x de $a^{-1}(p)\,f(x)$ pour $p \in \Gamma_\alpha$ ne dépend que des valeurs prises par $f(x)$ sur $x + C_\alpha$, C_α étant le cône dual de γ_α :

$$x \in C_\alpha \quad \text{signifie} \quad \langle \xi, x \rangle \leqslant 0 \quad \text{pour } \xi \in \gamma_\alpha \,.$$

Donc (7) est la solution d'un problème de Cauchy à données initiales nulles ; le cas de données initiales [2] non nulles s'y ramène aisément ; ainsi le nombre des problèmes de Cauchy toujours possibles est le nombre des Γ_α non bornés. L'unicité de la solution d'un de ces problèmes résulte, si $\mathring{\gamma}_\alpha$ n'est pas vide, de la résolution du problème de Cauchy pour l'équation adjointe. Rappelons que l'essentiel de ces résultats est dans L. GÅRDING [13] .

6. Problème de Dirichlet.

Choisissons pour Γ un domaine Δ_β ; posons $b = a^{-\frac{1}{2}}(p)$. Soit D un domaine de X ayant une frontière de mesure nulle ; soit L (et M) l'ensemble des $f(x) \in E$ nulles dans (hors de) D ; on peut déduire du n° 3 et de la définition de Δ_β qu'il existe une projection $\bar{\omega}$ de E sur $E \cap b^{-1}(L)$, parallèlement à l'adhérence de $b(M)$; posons

(8) $$g = b\,\bar{\omega}\,b \quad ;$$

g est continu et plus précisément

$$\| e^{-\langle \xi, x\rangle} g\, f(x) \|_2 \leqslant \frac{\| a^{-1}(\xi + i\eta) \|_\infty}{\sin \omega(\xi)} \| e^{-\langle \xi, x\rangle} f(x) \|_2 \quad \text{si } \xi \in \Delta_\beta \quad ;$$

---

[2] Ces données sont portées par une hypersurface dont les hyperplans tangents ont des directions $\in \mathring{\gamma}_\alpha$.

g sera nommé opérateur de Green relatif à D et $a(p)$; en effet, si $f(x) \in E$, alors $u(x) = g\, f(x) \in E$ vérifie :

$$(9) \qquad a^{\frac{1}{2}}(p)\, u(x) \in E \;,\; u(x) = 0 \text{ hors de } D, \quad a(p)\, u(x) = f(x) \text{ dans } D .$$

(Les deux premières conditions généralisent les conditions classiques : $u(x)$ et ses dérivées d'ordre $< \frac{m}{2}$ s'annulent sur la frontière de D). g résout donc un problème de Dirichlet : il existe autant de problèmes de Dirichlet toujours possibles que de domaines Δ_β. L'exemple 8 du n° 4, où $a_m(\xi) > 0$, est celui d'une équation pour laquelle un problème de Dirichlet et quatre problèmes de Cauchy sont toujours possibles ; chacun de ces problèmes a une solution unique.

Supposons D borné : g est complètement continu et indépendant du choix de Δ_β ; supposons $a_m(\xi) > 0$ pour $\xi \neq 0$: $a(\xi) + c$ possède un Δ_β quand la constante c est voisine de 1^m ; donc, vu l'extension due à F. RIESZ de la théorie des équations linéaires de Fredholm, il existe une fonction $u(x)$ vérifiant (9), sauf dans les cas exceptionnels où, pour $f(x) = 0$, (9) a une solution $u(x) \neq 0$.

Si $a(p)$ est self-adjoint, g l'est et $\bar{\omega}$ est une projection orthogonale, comme chez H. WEYL, VISCHIK et GÅRDING [12].

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOCHNER (Salomon). - Bounded analytic functions in several variables and multiple Laplace integrals, Amer. J. Math., t. 59, 1937, p. 732-738.

[2] BOCHNER (S.) and MARTIN (W.T.). - Several complex variables. - Princeton, Princeton University Press, 1948 (Princeton mathematical Series n° 10), Chap. V.

[3] BUREAU (Florent). - Le problème de Cauchy et la théorie de la propagation des ondes lumineuses dans les milieux cristallins homogènes et uniaxes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 225, 1947, p. 402-403.

[4] BUREAU (Florent). - Le problème de Cauchy pour une équation linéaire aux dérivées partielles totalement hyperboliques d'ordre 4 et à 4 variables indépendantes, Ac. royale Belg., Bull. Cl. Sc., t. 33, 1947, p. 379-402.

[5] BUREAU (Florent). - Sur la solution élémentaire d'une équation linéaire aux dérivées partielles d'ordre 4 et à 3 variables indépendantes, Ac. royale Belg., Bull. Cl. Sc., t. 33, 1947, p. 473-484.

[6] BUREAU (Florent). - Sur le problème de Cauchy pour les équations linéaires à un nombre impair de variables indépendantes, Ac. royale Belg., Bull. Cl. Sc., t. 33, 1947, p. 587-610.

[7] BUREAU (Florent). - Sur la solution élémentaire d'une équation linéaire aux dérivées partielles à 4 variables indépendantes, Ac. royale Belg., Bull. Cl. Sc., t. 33, 1947, p. 684-711 et 827-853.

[8] BUREAU (Florent). - Les solutions élémentaires des équations linéaires aux dérivées partielles totalement hyperboliques d'ordre plus grand que 2 et à 4 variables indépendantes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 226, 1948, p. 150-152.

[9] BUREAU (Florent). - Sur l'intégration des équations de propagation des ondes lumineuses dans les milieux cristallins uniaxes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 226, 1948, p. 1331-1333.

[10] BUREAU (Florent). - La solution élémentaire d'une équation linéaire aux dérivées partielles décomposables et totalement hyperboliques d'ordre 4 à 4 variables indépendantes, Ac. royale Belg., Bull. Cl. Sc., t. 34, 1948, p. 566-592.

[11] DIXMIER (Jacques). - Etude sur les variétés et les opérateurs de Julia, avec quelques applications, Bull. Soc. math. France, t. 77, 1949, p. 11-101.

[12] GÅRDING (Lars). - Le problème de Dirichlet pour les équations aux dérivées partielles elliptiques homogènes à coefficients constants, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 230, 1950, p. 1030-1032.

[13] GÅRDING (Lars). - Linear hyperbolic partial differential equations with constant coefficients, Acta Math., t. 85, 1951, p. 1-62.

[14] HARDY (G.H.). - The mean value of the modulus of an analytic function, Proc. London math. Soc., Series 2, t. 14, 1915, p. 269-277.

[15] HARDY (G.H.), INGHAM (A.E.) and POLYA (G.). - Notes on moduli and mean values, Proc. London math. Soc., Series 2, t. 27, 1927, p. 401-409.

[16] HERGLOTZ (G.). - Über die Integration linearer partieller Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, I, II, Berichte Leipzig, t. 78, 1926, p. 93-126 et 287-318.

[17] PETROWSKY (I.). - Über das Cauchysche Problem für Systeme von partiellen Differentialgleichungen, Mat. Sbornik, N.S., t. 2 (44), 1937, p. 815-868.

[18] PETROWSKY (I.). - On the diffusion of wawes and the lacunas for hyperbolic equations, Mat. Sbornik, N.S., t. 17 (32), 1945, p. 289-370.

[19] RIESZ (Friedrich). - Über lineare Funktionalgleichungen, Acta Math., t. 41, 1918, p. 71-98.

[20] RIESZ (Marcel). - L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy, Acta Math., t. 81, 1948, p. 1-223.

[21] VIŠIK (M. I.). - Metod ortogonal'nykh i prjamykh razloženij v teorii elliptičeskikh differencial'nykh uravnenij, Mat. Sbornik, N.S., t. 25 (67), 1949, p. 189-234.

[22] WEYL (Hermann). - The method of orthogonal projection in potential theory, Duke math. J., t. 7, 1940, p. 411-444.

ADDITIF

Publications postérieures à l'Exposé :

LERAY (Jean). - Hyperbolic differential equations. - [Princeton, Institute for advanced Study,] First part, p. 1-103.

SCHWARTZ (Laurent). - Transformation de Laplace des distributions, Communications du Séminaire mathématique de l'Université de Lund, tome supplémentaire dédié à Marcel Riesz. - Lund, Gleerup, 1952, p. 196-206.

[Juin 1957]