LAURENT SCHWARTZ

Les travaux de L. Gårding sur les équations aux dérivées partielles elliptiques

Séminaire N. Bourbaki, 1954, exp. n° 67, p. 175-182

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1951-1954__2__175_0>

Séminaire BOURBAKI
(Mai 1952)

LES TRAVAUX DE L. GÅRDING SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES ELLIPTIQUES

par Laurent SCHWARTZ

1. Les espaces de distributions liés à un ouvert Ω de R^n.

1° $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ espace des fonctions sur Ω, dont les dérivées (au sens distributions) d'ordre $\leq m$ sont dans $L^2(\Omega)$: topologie évidente.

Si $m \leq [\frac{n}{2}]$, les fonctions de $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ ne sont pas nécessairement continues.

2° $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$: adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$.

PROPOSITION 1. - Si $f \in \mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$, la fonction $\tilde{f}$, égale à f dans Ω et à 0 ailleurs, appartient à $\mathcal{D}^m_{L^2}(R^n) = \mathcal{E}^m_{L^2}(R^n)$, et pour $|p| \leq m$, $(D^p f)^{\sim} = D^p \tilde{f}$ (évident).

En appliquant alors aux dérivées d'ordre $\leq m - 1$ de $\tilde{f}$, $f \in \mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$, les résultats de Deny :

PROPOSITION 2. - Il est possible de modifier sur un ensemble de mesure nulle les dérivées d'ordre $\leq m - 1$ de $f \in \mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$ de façon qu'elles aient la pseudo-limite 0 en tous les points de $\dot{\Omega}$, sauf peut-être ceux d'un ensemble de capacité nulle.

REMARQUE. - Si $\dot{\Omega}$ est de capacité nulle, $\mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega) = \mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$.

3° $\mathcal{D}'^m_{L^2}(\Omega)$ dual fort de $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$. C'est un espace de distributions sur Ω. $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$ est réflexif.

PROPOSITION 3. - Pour que $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ soit dans $\mathcal{D}'^m_{L^2}(\Omega)$, il faut et il suffit qu'elle soit une somme de dérivées d'ordre $\leq m$ de fonctions $\in L^2(\Omega)$.

COROLLAIRE. - $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{D}'^{m}_{L^2}(\Omega)$.

REMARQUE. - $\mathcal{D}(\Omega)$ n'est pas dense dans $\mathcal{E}^{m}_{L^2}(\Omega)$ donc on ne peut pas identifier $\mathcal{E}'^{m}_{L^2}(\Omega)$ a un espace de distributions.

4° $\mathcal{E}^{m}_{L^2}(\Omega)$ a, d'une infinité de manières, une structure hilbertienne. Nous poserons

$$\begin{cases} \text{pour } \ell \leq m \,, \; \|\varphi\|_\ell^2 = \sum_{|p|=\ell} \int_\Omega |D^p\varphi|^2 \, dx \\ |||\varphi|||^2 = \sum_{\ell \leq m} \|\varphi\|_\ell^2 \end{cases}$$

PROPOSITION 4. - Si Ω est borné et $\varphi \in \mathcal{D}^{m}_{L^2}(\Omega)$, $|||\varphi||| \leq C(m\,,\Omega)\,\|\varphi\|_m$.

DÉMONSTRATION. - Evident, car pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$\tilde{\varphi}(x) = \int_{-\infty}^{x_1} \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\xi_1}(\xi_1\,, x_2\,, \ldots\,, x_n)\, d\xi_1 \;.$$

PROPOSITION 5. - Si Ω est borné, l'immersion de $\mathcal{D}^{m}_{L^2}(\Omega)$ dans $\mathcal{D}^{m-1}_{L^2}(\Omega)$ et de $\mathcal{D}'^{m-1}_{L^2}(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'^{m}_{L^2}(\Omega)$ sont complètement continues.

DÉMONSTRATION. - Un ouvert borné de $\mathcal{D}^{m}_{L^2}(\Omega)$ est relativement compact dans $\mathcal{D}^{m-1}_{L^2}(\Omega)$ (ASCOLI) d'où la première conclusion ; la deuxième par transposition.

2. Opérateurs différentiels à coefficients constants.

Soit E un Banach muni d'une involution $\varphi \to \bar{\varphi}$. Une application linéaire continue D de E dans E' est dite hermitienne si $\langle D\varphi\,, \bar{\Psi}\rangle = \langle \varphi\,, D\bar{\Psi}\rangle$; il suffit pour cela que $\langle D\varphi\,, \bar{\varphi}\rangle$ soit réel. Le lemme fondamental de la théorie des Hilberts dit que si $\langle D\varphi\,, \bar{\varphi}\rangle$ est une norme sur E , équivalente à sa norme initiale, D est un isomorphisme de E sur E'. Il suffit pour cela que l'on ait

$\langle D\varphi, \bar{\varphi}\rangle \geqslant C\,\|\varphi\|^2$ sur un sous-espace dense de E.

Soit alors D un opérateur différentiel à coefficients constants homogène d'ordre $2m$.

$$D = \sum_{\substack{|p|=m\\|q|=m}} g_{p,q}\, D^{p+q} \tag{1}$$

D sera dit elliptique si la forme

$$(-1)^m \sum_{p,q} g_{p,q}\,(2\pi\xi)^{p+q} = \hat{D}(\xi) = \mathcal{F}(D\delta)$$

est définie $\geqslant 0$. <u>Exemple</u> : $-\Delta$.

PROPOSITION 6. - Si D est elliptique, c'est un isomorphisme de $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$ sur $\mathcal{D}'^m_{L^2}(\Omega)$, si Ω est borné.

DÉMONSTRATION. - Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ (d'où par passage à la limite pour $\varphi \in \mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$) :

$$\langle D\varphi, \bar{\varphi}\rangle = \int_{R^n} \hat{D}(\xi)\,|\hat{\varphi}(\xi)|^2\, d\xi \geqslant A \int_{R^n} \sum_{|p|=m} (2\pi\xi)^{2p}\,|\hat{\varphi}(\xi)|^2\, d\xi = \tag{2}$$

$$= A\,\|\varphi\|^2_m \geqslant C\,|||\varphi|||^2 \quad \text{(proposition 4)}.$$

REMARQUES. -

1° Si D n'est pas homogène, mais si l'ensemble des termes d'ordre $2m$ est elliptique, et si $\hat{D}(\xi) = \mathcal{F}(D\delta)$ est $\geqslant 0$, la conclusion subsiste ; elle subsiste même pour Ω non borné si $\hat{D}(\xi) > 0$. <u>Exemple</u> : $-\Delta + k^2$.

2° Pour $\varphi \in \mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$, on peut avoir $\langle D\varphi, \hat{\varphi}\rangle < 0$.

3. <u>Etude d'un opérateur différentiel particulier à coefficients variables.</u>

Nous étudierons D défini par

$$D\varphi = \sum_{\substack{|p|=m\\|q|=m}} D^q(g_{p,q}(x)\, D^p\varphi(x)) + \lambda\varphi, \tag{3}$$

$g_{p,q}$ réels, $g_{p,q} = g_{q,p}$, $\lambda > 0$.

1° D envoie $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'^m_{L^2}(\Omega)$ si $g_{p,q} \in L^\infty(\Omega)$; nous supposerons les $g_{p,q}$ uniformément continus dans Ω.

2° D est hermitien sur $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$:

$$(4)\quad \langle D\varphi , \bar{\Psi}\rangle = \langle \varphi , D\bar{\Psi}\rangle = (-1)^m \int_\Omega [\sum_{p,q} g_{p,q}(D^p\varphi)(D^q\bar{\Psi}) + \lambda\varphi\bar{\Psi}]\, dx$$

3° Nous supposerons D uniformément elliptique :

$$(5)\quad D(x , \xi) = (-1)^m \sum_{p,q} g_{p,q}(x)(2\pi\xi)^{p+q} \geqslant A \sum_{|p|=m} (2\pi\xi)^{2p} , \quad x\in\Omega, \quad \xi\in R^n .$$

PROPOSITION 7. - L'opérateur D ainsi défini est un isomorphisme de $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$ sur $\mathcal{D}'^m_{L^2}(\Omega)$, si Ω est borné et λ assez grand.

DÉMONSTRATION. -

1° Soit $a\in\Omega$, $D_{(a)}$ l'opérateur à coefficient constant obtenu en remplaçant les $g_{p,q}(x)$ par $g_{p,q}(a)$; si φ a son support assez petit pour que les $g_{p,q}$ oscillent d'au plus ε, on a, en calculant

$$\langle D_a\varphi , \bar{\varphi}\rangle \text{(proposition 6) et } \langle (D - D_{(a)})\varphi , \bar{\varphi}\rangle \quad :$$

$$(6)\qquad \langle D\varphi , \bar{\varphi}\rangle \geqslant C_1 \|\varphi\|^2_m + \lambda\|\varphi\|^2_o \quad \text{si } \varepsilon \text{ assez petit.}$$

2° Recouvrons Ω par un nombre fini d'ouverts Ω_i assez petits pour que $g_{p,q}$ y oscille d'au plus ε, et soit α_i^2 une partition de l'unité subordonnée, $\sum_i \alpha_i^2 \equiv 1$ (si β_i est la partition usuelle, $\alpha_i = \beta_i/\sqrt{\sum_\nu \beta_\nu^2}$).

$$(7)\qquad \langle D\varphi , \bar{\varphi}\rangle = \sum_\nu \langle D(\alpha_\nu\varphi) , \overline{\alpha_\nu\varphi}\rangle + \langle D_1\varphi , \bar{\varphi}\rangle$$

où D_1 est d'ordre $\leqslant 2m - 1$, donc $|\langle D_1\varphi , \bar{\varphi}\rangle| \leqslant C_2 \|\varphi\|_m \|\varphi\|_{m-1}$.

On applique alors (6), et comme $\sum_\nu \|\alpha_\nu\varphi\|^2_m$ est lui-même $\geqslant \|\varphi\|^2_m - C_3\|\varphi\|_m \|\varphi\|_{m-1}$, il vient

$$(8)\qquad \langle D\varphi , \bar{\varphi}\rangle \geqslant a\|\varphi\|^2_m - b\|\varphi\|_m\|\varphi\|_{m-1} + \lambda\|\varphi\|^2_o$$

Mais, pour c assez grand, $b\|\varphi\|_m\|\varphi\|_{m-1} \leqslant \frac{a}{2}\|\varphi\|^2_m + c\|\varphi\|^2_{m-1}$

$$(9) \quad \langle D\varphi , \bar{\varphi} \rangle \geqslant \frac{a}{2} \|\varphi\|_m^2 - c \|\varphi\|_{m-1}^2 + \lambda \|\varphi\|_o^2$$

$$= \int_{R^n} \Big(\frac{a}{2} \sum_{|p|=m} (2\pi \hat{x})^{2p} - c \sum_{|q|=m-1} (2\pi \hat{x})^{2q} + \lambda \Big) |\hat{\varphi}(\hat{x})|^2 \, d\hat{x}$$

$$\geqslant \frac{a}{4} \int_{R^n} \sum_{|p|=m} (2\pi \hat{x})^{2p} |\hat{\varphi}(\hat{x})|^2 \, d\hat{x} \quad \text{(si } \lambda \text{ assez grand)} \quad = \frac{a}{4} \|\varphi\|_m^2 ,$$

C.Q.F.D.

REMARQUE. - Si les $g_{p,q}$ sont constants, on peut prendre $\lambda = 0$. Impossible autrement (contre-exemple).

4. Opérateurs elliptiques quelconques.

Soit D un opérateur différentiel quelconque d'ordre $2m$, dont les coefficients ont des dérivées d'ordre $\leq m$ continues bornées sur Ω supposé borné. D sera dit uniformément elliptique si les parties réelles $g_{p,q}$ des coefficients des termes d'ordre $2m$ sont symétriques, uniformément continues et vérifient (5). Alors

$$(10) \qquad D = D_o + i\, D_1 + D_2$$

D_o est l'opérateur hermitien $\geqslant 0$ inversible du paragraphe 3, D_1 un opérateur hermitien (non nécessairement elliptique), de sorte que $A = D_o + iD_1$ est inversible. D_2 est un opérateur différentiel d'ordre $\leq 2m - 1$, donc continu de $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'^{m-1}_{L^2}(\Omega)$, donc (proposition 5) complètement continu de $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'^m_{L^2}(\Omega)$. Alors

$$(11) \qquad D = A(I + A^{-1} D_2) ,$$

$A^{-1} D_2$ complètement continu dans $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$. D'après la théorie classique :

THÉORÈME fondamental. - Si D est l'opérateur différentiel (10) et si Ω est borné :

1° Si D opère biunivoquement sur $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$, c'est un isomorphisme de $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$ sur $\mathcal{D}'^m_{L^2}(\Omega)$.

2° Si D n'opère pas biunivoquement, son noyau $D^{-1}\{0\}$ est de dimension finie N, et D est un homomorphisme de $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$ sur un sous-espace fermé de $\mathcal{D}'^m_{L^2}(\Omega)$, de codimension N .

REMARQUES. -

1° On peut montrer que $D + \mu$ est un isomorphisme, sauf pour un ensemble discret de valeurs de μ .

2° On peut remplacer D_0 par n'importe quel isomorphisme hermitien $\geqslant 0$ de $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$ sur $\mathcal{D}'^m_{L^2}(\Omega)$, D_1 par n'importe quel opérateur hermitien de $D^m_{L^2}(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'^m_{L^2}(\Omega)$, D_2 par n'importe quel opérateur de $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'^{m-1}_{L^2}(\Omega)$, non nécessairement du type différentiel.

5. Le problème de Dirichlet.

Soit D un opérateur elliptique (formule (10)) dans Ω borné. Le problème de Dirichlet usuel consiste à trouver une fonction f , solution de Df = g dans Ω , et dont les dérivées d'ordre $\leqslant m - 1$ ont des limites données sur $\dot{\Omega}$. Soit f_1 une fonction quelconque dont les dérivées ont les mêmes limites sur $\dot{\Omega}$, alors $X = f - f_1$ vérifie $DX = g - Df_1 = B$, et ses dérivées d'ordre $\leqslant m - 1$ tendent vers 0 sur $\dot{\Omega}$.

Nous modifierons ce problème comme suit :

1° On imposera $f \in \mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$, on supposera donnée $f_1 \in \mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$, et on remplacera alors les conditions au bord relatives à f par $X \in \mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$, ou

$f \doteq f_1 \mod \mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$.

2° On supposera $g \in \mathcal{D}'^m_{L^2}(\Omega)$, alors $B \in \mathcal{D}'^m_{L^2}(\Omega)$, et le problème de Dirichlet se ramène à l'équation du premier degré à une inconnue (programme de 3e de l'enseignement secondaire)

$$DX = B , \quad X \in \mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega) , \quad B \in \mathcal{D}'^m_{L^2}(\Omega) . \tag{13}$$

PROPOSITION 8. - Si D est biunivoque dans $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$, le problème de Dirichlet a une solution et une seule

$$\begin{cases} X = GB \\ f = (f_1 - GD f_1) + Gg \end{cases} \tag{14}$$

Sinon, $D^{-1}\{0\}$ est de dimension finie N, il y a N conditions de compatibilité indépendantes pour f_1 et g et la solution f est déterminée à une combinaison près de N solutions indépendantes de l'équation homogène.

REMARQUES. -

1° $f_1 - GDf_1 \neq 0$ parce $f_1 \notin \mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$. Mais $f_1 - GDf_1$ ne dépend évidemment que de la classe de $f_1 \bmod \mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$.

2° GD est un projecteur de $\mathcal{E}^m_{L^2}$ sur $\mathcal{D}^m_{L^2}$. $(I - GD)\mathcal{E}^m_{L^2}$, supplémentaire de $\mathcal{D}^m_{L^2}$ dans $\mathcal{E}^m_{L^2}$, est l'espace des solutions de l'équation homogène c'est-à-dire le noyau $D^{-1}(0)$; $(I - GD)f_1$ est donc la projection de f_1 sur l'espace de ces solutions.

6. Pour les lecteurs sérieux : le noyau de Green.

Soit $G = D^{-1}$ dans le cas d'isomorphisme. G peut être défini par un noyau $G_{x,\xi}$, noyau de Green.

En utilisant le caractère hypoelliptique de D (voir, par exemple, MALGRANGE [5]), on peut montrer que G est très régulier : il envoie $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathcal{E}(\Omega)$, $\mathcal{E}'(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$; (de plus si T est $\mathcal{D}'^m_{L^2}(\Omega)$ "au voisinage de $\dot{\Omega}$", GT est $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$ au voisinage de $\dot{\Omega}$). Les singularités de GT sont celles de T, et G est une fonction indéfiniment différentiable pour $x \neq \xi$.

On peut donc poser le problème de Dirichlet avec un 2e membre g, qui soit $\mathcal{D}'^m_{L^2}(\Omega)$ au voisinage de $\dot{\Omega}$, alors f est $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$ au voisinage de $\dot{\Omega}$; là où g est une fonction indéfiniment différentiable il en est de même de f, et f est alors une solution au sens usuel de $Df = g$. $G_{x,\xi}$ peut s'écrire $G_x(\xi)$ ou $(G(x))_\xi$. $G_x(\xi)$ n'est autre que $G \cdot \delta_x(\xi)$, c'est, pour ξ fixé, une ditribution qui est, en dehors de ξ, une fonction indéfiniment différentiable et $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$ au voisinage de Ω.

Si $m > \frac{n}{2}$, les fonctions de $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$ sont continues, $\delta_x(\xi)$ est dans $\mathcal{D}'^m_{L^2}(\Omega)$, donc $G(x, \xi)$ est une fonction continue en x, ξ. Dans ce cas, et en supposant $D_1 = 0$, GÅRDING donne [2] la valeur asymptotique de $G_\lambda(x , \xi)$, noyau de Green de $D + \lambda$ (qui existe toujours pour $\lambda > 0$ assez grand) pour $\lambda \to +\infty$:

$$(15) \qquad \lim_{\lambda \to \infty} \lambda^{1-\frac{n}{2m}} G_\lambda(x , \xi) = \begin{Bmatrix} 0 & \text{pour} & x \neq \xi \\ 1 & \text{pour} & x = \xi \end{Bmatrix} \int_{R^n} \frac{d\hat{x}}{D_0(x , \hat{x}) + 1} .$$

Si on suppose en outre D_2 , donc D lui-même, hermitien, les λ pour lesquels $D + \lambda$ n'est pas inversible sont réels et tendent vers $-\infty$, et le nombre $N(\Lambda)$ de ceux dont le module est $\leq \Lambda$ est donné par

$$(16) \qquad N(\Lambda) \underset{\Lambda \to \infty}{\sim} \left(\int\int_{\substack{x \in \Omega \\ D_0(x,\hat{x}) < 1}} dx\, d\hat{x} \right) \Lambda^{\frac{n}{2m}}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] GÅRDING (Lars). - Le problème de Dirichlet pour les équations aux dérivées partielles elliptiques linéaires dans des domaines bornés, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 233, 1951, p. 1554-1556.

[2] GÅRDING (Lars). - The asymptotic distribution of the eigenvalues and eigenfunctions of a general vibration problem, Kungl. Fysiogr. Sällskap. Lund Forhandl., t. 21, 1951, 10 p.

[3] GÅRDING (Lars). - Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations, Math. Scand., t. 1, 1953, p. 55-72.

Les résultats de GÅRDING sont à l'origine de nombreux et importants travaux de J.-L. LIONS. Voir notamment :

[4] LIONS (J.-L.). - Problèmes aux limites en théorie des distributions, Acta Math., t. 94, 1955, p. 13-153 (Thèse Sc. math. Paris. 1954).

Additif à la bibliographie :

[5] MALGRANGE (Bernard). - Sur une classe d'opérateurs différentiels hypoelliptiques, Bull. Soc. math. France, t. 85, 1957, p. 283- 306.

[Avril 1959]