Jean-Pierre Serre

Cohomologie et fonctions de variables complexes

Séminaire N. Bourbaki, 1954, exp. n° 71, p. 213-218

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1951-1954__2__213_0>

Séminaire BOURBAKI
(Décembre 1952)

COHOMOLOGIE ET FONCTIONS DE VARIABLES COMPLEXES

par Jean-Pierre SERRE

On s'est aperçu récemment que les théorèmes principaux de la théorie des idéaux de fonctions analytiques de CARTAN-OKA pouvaient s'énoncer et se démontrer plus simplement dans le langage de la théorie des faisceaux ; du même coup, on a été conduit à les généraliser, ce qui a permis d'obtenir un assez grand nombre de résultats nouveaux. Nous allons donner ici un bref résumé de ces résultats, renvoyant pour plus de détails au Séminaire H. CARTAN [1] .

1. Théorèmes généraux.

Une variété analytique complexe X est dite variété de Stein si elle est paracompacte et si :

(α). Pour tout compact $K \subset X$, l'ensemble des $x \in X$ tels que l'on ait $|f(x)| \leq \sup_{y \in K} |f(y)|$ pour toute fonction f holomorphe sur X , est compact.

(β). Si x et y sont deux points distincts de X , il existe f , holomorphe sur X , telle que $f(x) \neq f(y)$.

(γ). Pour tout $x \in X$, il existe des fonctions $f_1 , \dots , f_n$ holomorphes sur X qui forment un système de coordonnées locales en x .

(En gros, il y a assez de fonctions holomorphes pour séparer les points, les points infiniment voisins et le point à l'infini).

EXEMPLE.- C^n et, plus généralement, tout domaine d'holomorphie de C^n à un nombre fini de feuillets ; une sous-variété sans singularités d'une variété de Stein (et en particulier toute variété algébrique affine) ; un produit, une intersection de variétés de Stein. Par contre, une variété compacte de dimension $n > 0$ n'est jamais une variété de Stein.

Rappelons d'autre part (cf. LERAY, ainsi que le Séminaire CARTAN [2]) qu'un faisceau $\mathcal{F}$ sur un espace X est la donnée pour tout $x \in X$ d'un groupe abélien $\mathcal{F}_x$ et d'une topologie sur la réunion des $\mathcal{F}_x$ telle que la projection $\mathcal{F} \longrightarrow X$ soit un homéomorphisme local et que la loi de groupe soit continue. Par exemple, si X est une variété analytique complexe, on peut prendre pour $\mathcal{F}_x$ les germes de fonctions holomorphes au point x ; soit $\underline{O}_X = \bigcup \underline{O}_x$ ce faisceau.

Rappelons également que la donnée d'un espace X et d'un faisceau $\mathcal{F}$ au-dessus de X définit sans ambiguité les groupes de cohomologie de X à coefficients dans

$\mathcal{F}$, notés $H^i(X, \mathcal{F})$, $i = 0, 1, \ldots$. Le groupe $H^0(X, \mathcal{F})$ est simplement le groupe des <u>sections</u> de $\mathcal{F}$ au-dessus de X tout entier ; par exemple, $H^0(X, 0_X)$ est le groupe de toutes les fonctions holomorphes définies sur X . Les groupes $H^i(X, \mathcal{F})$, i arbitraire, peuvent être définies par le procédé classique de Čech, avec des recouvrements ouverts localement finis (cf. [2]) .

On notera que nous ne faisons aucune restriction sur les <u>supports</u> ; autrement dit, il s'agit de groupes de cohomologie à supports fermés arbitraires.

Un faisceau $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_x\}$ est dit <u>analytique</u> sur X (X étant de nouveau une variété analytique complexe), si chaque $\mathcal{F}_x$ est muni d'une structure de 0_x module, compatible avec la structure de faisceau. Un faisceau analytique $\mathcal{F}$ est dit <u>cohérent</u> si tout $x \in X$ possède un voisinage U tel que la restriction de $\mathcal{F}$ à U soit analytiquement isomorphe à un faisceau de la forme $(0_U)^p/\mathcal{R}$, où $\mathcal{R}$ est un sous-faisceau analytique de $(0_U)^p$ engendré par un nombre fini de sections. C'est une notion locale.

EXEMPLES.- Le faisceau des germes de <u>formes différentielles</u> holomorphes est analytique cohérent. Il en est de même du faisceau des <u>relations</u> entre des fonctions holomorphes données, ainsi que du faisceau des germes de fonctions holomorphes nulles sur une <u>sous-variété</u> analytique donnée. (Vérification triviale pour le premier exemple, difficile pour les deux derniers).

Ces définitions étant posées, nous pouvons énoncer les deux théorèmes fondamentaux de la théorie :

THÉORÈME A.- <u>Soient</u> X <u>une variété de Stein</u>, $\mathcal{F}$ <u>un faisceau analytique cohérent sur</u> X . <u>Pour tout</u> $x \in X$, $H^0(X, \mathcal{F})$ <u>engendre</u> $\mathcal{F}_x$ <u>pour sa structure de</u> 0_x<u>-module</u>.

THÉORÈME B.- <u>Soient</u> X <u>une variété de Stein,</u> $\mathcal{F}$ <u>un faisceau analytique cohérent sur</u> X . <u>On a</u> $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ <u>pour tout</u> $i > 0$.

En utilisant les deux théorèmes précédents (avec $i = 1$ dans le théorème B) pour un sous-faisceau cohérent $\mathcal{F}$ de $(0_X)^p$, on retrouve les résultats de l'article de CARTAN [3] .

2. Applications.

(Dans tout ce numéro, X désigne une variété de Stein).

La plupart s'appuient uniquement sur <u>la suite exacte de cohomologie</u> qui dit que, si l'on a une suite exacte $0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$ de faisceaux on a une suite exacte :

$$\ldots \longrightarrow H^i(X\,,\mathcal{F}) \longrightarrow H^i(X\,,\mathcal{G}) \longrightarrow H^i(X\,,\mathcal{H}) \longrightarrow H^{i+1}(X\,,\mathcal{F}) \longrightarrow H^{i+1}(X\,,\mathcal{G}) \longrightarrow \ldots$$

En particulier, si $\mathcal{F}$ est analytique cohérent, on voit (en prenant $i = 0$) que $H^0(X\,,\mathcal{G}) \longrightarrow H^0(X\,,\mathcal{H}) \longrightarrow 0$ est une suite exacte, c'est-à-dire que toute section de $\mathcal{H}$ s'obtient par passage au quotient à partir d'une section de $\mathcal{G}$. Par exemple, prenant pour $\mathcal{G}$ (resp. $\mathcal{F}$) le faisceau des germes de fonctions méromorphes (resp. holomorphes), une section du faisceau $\mathcal{H} = \mathcal{G}/\mathcal{F}$ est une donnée de parties principales sur X (au sens de MITTAG-LEFFLER), et dire que c'est l'image d'une section de $\mathcal{G}$ (i.e. d'une fonction méromorphe), c'est dire que le 1er problème de Cousin est résoluble dans X. On trouve ainsi un résultat connu, dû à OKA (dans le cas où X est un domaine d'holomorphie).

On démontre par le même raisonnement que toute fonction holomorphe sur une sous-variété régulièrement plongée dans X est la trace d'une fonction holomorphe sur tout X (prendre pour $\mathcal{G}$ le faisceau de toutes les fonctions holomorphes, pour $\mathcal{F}$ le sous-faisceau des fonctions nulles sur la sous-variété). Idem pour les formes différentielles, et plus généralement tout champ de tenseurs holomorphe.

Les résultats qui précèdent n'utilisaient que la nullité de H^1 et, de ce fait étaient connus. En voici d'autres qui utilisent la nullité de H^i pour $i \geqslant 1$:

2.1. Théorème de de Rham.

Les formes différentielles extérieures holomorphes sur X ("formes de 1e espèce") forment, avec l'opération de différentiation extérieure, un complexe. Les groupes de cohomologie de ce complexe sont isomorphes aux groupes de cohomologie de X (à coefficients dans le corps C). En d'autres termes, il y a toujours une forme différentielle holomorphe fermée de périodes complexes données, et si une forme différentielle holomorphe fermée a toutes ses périodes nulles, c'est le cobord d'une forme holomorphe.

La démonstration procède comme celle du théorème de de Rham classique (relatif aux formes différentiables), le théorème B remplaçant les partitions de l'unité.

2.2. Espaces fibrés à groupe structural abélien.

Soit G un groupe de Lie complexe abélien. Soit $\mathcal{A}_G$ le faisceau des germes d'applications analytiques de X dans G. Les éléments du groupe $H^1(X\,,\mathcal{A}_G)$ correspondent biunivoquement, comme on le voit tout de suite, aux classes d'espaces fibrés principaux analytiques de base X et de groupe G. Supposons G connexe, soit H son revêtement universel, Π son groupe fondamental ; on a une suite exacte de faisceaux :

$$0 \longrightarrow \Pi \longrightarrow \mathcal{O}_H \longrightarrow \mathcal{O}_G \longrightarrow 0 ,$$

où Π désigne le faisceau constant égal à Π. En outre $\mathcal{O}_H$ est un faisceau analytique cohérent. D'où, en appliquant le théorème B et la suite exacte de cohomologie :

$$H^1(X , \mathcal{O}_G) \approx H^2(X , \Pi) .$$

On a ainsi obtenu la classification des espaces fibrés principaux analytiques de base X et de groupe G, et on voit qu'elle coïncide avec la classification topologique.

2.3. Diviseurs.

Rappelons qu'un diviseur est dit linéairement équivalent à 0 si c'est le diviseur d'une fonction méromorphe sur X. On démontre alors que le groupe des diviseurs modulo l'équivalence linéaire est isomorphe à $H^2(X , Z)$, et que tout diviseur est linéairement équivalent à un diviseur positif.

(On utilise 2.2 dans le cas particulier où $G = C^*$; tout revient alors à prouver qu'un espace fibré de fibre C^* est défini par un diviseur (au sens expliqué dans l'exposé de CARTAN [4], ce qui se voit en appliquant le théorème A au faisceau des germes de sections de l'espace fibré de fibre C associé canoniquement à l'espace fibré donné).

Des cas particuliers du résultat précédent avaient été démontrés par K. STEIN [5].

3. Compléments.

On peut certainement élargir le domaine de validité des théorèmes A et B ; il serait particulièrement désirable de les démontrer pour des faisceaux plus généraux que les faisceaux cohérents (par exemple, pour des faisceaux de fonctions holomorphes à valeurs dans certains espaces vectoriels topologiques) : ce serait très utile pour étudier les espaces fibrés.

On ignore si les théorèmes A et B sont vrais pour une variété analytique réelle X qui vérifie (α), (β), (γ) ; on sait le démontrer seulement lorsque la variété peut être plongée sans singularité dans R^n, donc en particulier lorsque la variété est compacte (et vérifie (β) et (γ)). Dans ce cas, le groupe des classes de diviseurs est isomorphe à $H^1(X , Z_2)$.

Dans tout ce qui précède, il n'a été question que de cohomologie à supports fermés arbitraires. Le seul résultat connu sur la cohomologie à supports compacts est le suivant (dû à plusieurs auteurs) :

Soient X une variété de Stein de dimension complexe n, Ω^p le faisceau des germes de formes différentielles holomorphes de degré p sur X. On a $\overset{*}{H}{}^i(X, \Omega^p) = 0$ pour $i \neq n$, p arbitraire, $\overset{*}{H}$ désignant la cohomologie à supports compacts.

EXEMPLE d'application du théorème précédent.- Soient B la boule unité de C^n, X l'intérieur de B, S la frontière de B, $\mathcal{F} = \Omega^0$ le faisceau des fonctions holomorphes. En appliquant alors la suite exacte de cohomologie :

$$\ldots \to \overset{*}{H}{}^i(X, \mathcal{F}) \to H^i(B, \mathcal{F}) \to H^i(S, \mathcal{F}) \to \overset{*}{H}{}^{i+1}(X, \mathcal{F}) \to H^{i+1}(B, \mathcal{F}) \to \ldots$$

avec $i = 0$, on voit que, si $n \geqslant 2$, $H^0(B, \mathcal{F})$ s'applique sur $H^0(S, \mathcal{F})$, c'est-à-dire que toute fonction holomorphe au voisinage de S se prolonge dans B (théorème de Hartogs) ; avec $i = 1$, et $n \geqslant 3$, on voit que $H^1(S, \mathcal{F}) = 0$, ce qui montre que le premier problème de Cousin (donc aussi le second) est résoluble sur S (théorème de Rothstein) ; on en conclut avec ROTHSTEIN que tout diviseur défini au voisinage de S se prolonge à l'intérieur de B.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Séminaire Henri Cartan, t. 4, 1951/52 (cf. notamment les exposés 18, 19, 20).

[2] Séminaire Henri Cartan, t. 3, 1950/51.

[3] CARTAN (Henri). - Idéaux et modules de fonctions analytiques de variables complexes, Bull. Soc. math. France, t. 78, 1950, p. 29-64.

[4] CARTAN (Henri). - Espaces fibrés analytiques complexes, Séminaire Bourbaki, t. 3, 1950/51.

[5] STEIN (Karl). - Topologische Bedingungen für die Existenz analytischer Funktionen komplexer Veränderlichen zu vorgegebenen Nullstellenflächen, Math. Annalen, t. 117, 1941, p. 727-757 ; Analytische Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen zu vorgegebenen Periodizitätzmoduln und das zweite Cousinsche Problem, Math. Annalen, t. 123, 1951, p. 201-222.

ADDITIF

Pour un exposé plus détaillé des résultats ci-dessus, voir le

Colloque sur les fonctions de plusieurs variables, Bruxelles 1953. - Liège, Thone, Paris, Masson, 1953.

Parmi les résultats plus récents sur les variétés de Stein, voir en particulier :

CARTAN (Henri). - Espaces fibrés analytiques [d'après H. Grauert], Séminaire Bourbaki, t. 9, 1956/57.

CARTAN (Henri). - Mémoire de H. Grauert : Zur Theorie der analytisch vollständigen Räume, Séminaire Bourbaki, t. 7, 1954/55.

GRAUERT (Hans). - Charakterisierung der holomorph vollständigen komplexen Räume, Math. Annalen, t. 129, 1955, p. 233-259.

GRAUERT (Hans). - Charakterisierung der Holomorphiegebiete durch die vollständige kählersche Metrik, Math. Annalen, t. 131, 1956, p. 38-75.

[Avril 1957]