SÉMINAIRE N. BOURBAKI

ANDRÉ WEIL

Variété de Picard et variétés jacobiennes

Séminaire N. Bourbaki, 1954, exp. nº 72, p. 219-226

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1951-1954__2__219_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
(Décembre 1952)

VARIÉTÉ DE PICARD ET VARIÉTÉS JACOBIENNES ([1])

par André WEIL

Par un <u>tore complexe</u> on entend un tore muni d'une structure analytique complexe invariante par les translations ; la dimension (réelle) du tore est alors un nombre pair $2q$, q étant la dimension complexe. Si Θ est un tel tore, son revêtement universel est, en tant que groupe topologique, isomorphe à R^{2q} , et est muni de plus d'une structure analytique complexe invariante par translation ; on voit immédiatement que ce revêtement est alors isomorphe à C^q , donc Θ à C^q/Δ , où Δ est sous-groupe discret de rang $2q$ de C^q . Réciproquement, si A est un vectoriel de dimension q sur C , et Δ un sous-groupe discret de A de rang $2q$, A/Δ est un tore complexe. Si A_0 est l'espace vectoriel sur R , de dimension $2q$, sous-jacent à A , on peut considérer A comme défini par la donnée de A_0 et de l'automorphisme J de A_0 déterminé par la multiplication scalaire par i dans A ; on a $J^2 = -I$ si I est l'automorphisme identique, et réciproquement tout endomorphisme J de A_0 tel que $J^2 = -I$ détermine sur A_0 une structure de vectoriel sur C . On peut donc définir tout tore complexe par la donnée :

a. d'un vectoriel A_0 de dimension paire $2q$ sur R ;
b. d'un endomorphisme J de A_0 tel que $J^2 = -I$;
c. d'un sous-groupe discret Δ de A_0 de rang $2q$;

désignant par A le vectoriel sur C déterminé sur A_0 par la donnée de J , le tore en question sera $\Theta = A/\Delta$. Soit A'_0 l'espace vectoriel dual de A_0 ; soit Δ' le sous-groupe de A'_0 dual de Δ (sous-groupe des $r' \in A'_0$ tels que $\langle r , r'\rangle \equiv 0 \bmod 1$ quel que soit $r \in \Delta$, où $\langle x , x'\rangle$ est la forme bilinéaire qui met A_0 et A'_0 en dualité) ; soit $J' = {}^tJ^{-1} = -{}^tJ$ (contragrédient de J) ; comme $J'^2 = -I'$, A'_0 , J' et Δ' définissent un <u>tore complexe</u> Θ' dit <u>dual de</u> Θ . On notera que le vectoriel A' sur C défini par J' sur A'_0 <u>n'est pas</u> le dual de A (On peut l'appeler l'antidual de A ; il y a une forme sesquilinéaire $B(x , x')$, $x \in A$, $x' \in A'$, telle que $x \to B(x , x')$ (resp. $x' \to \overline{B(x,x')}$) soit linéaire sur A (resp. sur A') quel que soit x' (resp. x), que $B(x,x')\equiv 0$

([1]) d'après [5]

quel que soit x' (resp. x) entraîne $x = 0$ (resp. $x' = 0$)).

On rappelle (cf. [4]) que, pour qu'il existe q fonctions méromorphes algébriquement indépendantes sur le tore complexe $\Theta = A/\Delta$ considéré ci-dessus, il faut et il suffit qu'il existe une <u>forme de Riemann</u> E pour Θ ; on entend par là une forme bilinéaire alternée $E(x, y)$ sur $A_0 \times A_0$ à valeurs dans R, telle que $R(r, s) \equiv 0 \bmod 1$ quels que soient $r \in \Delta$, $s \in \Delta$, et que la forme bilinéaire $F(x, y) = E(Jx, y)$ soit symétrique et définie positive. On dit alors que Θ est une <u>variété abélienne</u> ; s'il en est ainsi, il en est de même du dual de Θ.

On rappelle d'autre part que, sur toute variété analytique complexe, on définit un opérateur C, opérant sur les formes différentielles à valeurs complexes ; si une forme ω est donnée, en fonction de coordonnées complexes locales $z_1, \dots, z_n$ au voisinage d'un point, par

$$\omega = \sum f_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_q}\, dz_{i_1} \dots dz_{i_p}\, d\bar{z}_{j_1} \dots d\bar{z}_{j_q}$$

on aura

$$C\omega = \sum i^{p-q} f_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_q}\, dz_{i_1} \dots dz_{i_p}\, d\bar{z}_{j_1} \dots d\bar{z}_{j_q}$$

Autrement dit, si $P_{p,q}$ est le projecteur qui, à toute forme ω, associe la composante de ω de "type" (p, q), on a $C = \sum_{p,q} i^{p-q} P_{p,q}$. Sur une variété kählérienne, les $P_{p,q}$ et C commutent avec Δ ; on peut donc les considérer comme opérant sur l'espace vectoriel des formes harmoniques de degré e, quel que soit e ; cet espace s'identifiant sur une variété kählérienne compacte V avec la cohomologie de V à coefficients réels, on peut donc considérer les $P_{p,q}$ et C comme opérant sur celle-ci. Mais les opérateurs ainsi obtenus sont indépendants de la structure kählérienne (pourvu qu'il en existe au moins une, compatible avec la structure analytique complexe de V supposée donnée). En effet, il existe, pour toute classe de cohomologie à coefficients réels, un représentant qui est une forme différentielle ω satisfaisant à $d\omega = dC\omega = 0$ (il n'y a qu'à choisir comme représentant la forme appartenant à la classe considérée qui est harmonique pour une structure kählérienne de V) ; de plus, si $\omega \sim 0$ et $dC\omega = 0$, on a $C\omega \sim 0$ et $P_{p,q}\omega \sim 0$ quels que soient p, q (en effet, si H est l'opérateur de de Rham, composante harmonique d'une forme pour une structure kählérienne sur V, on aura $H\omega = 0$, donc, puisque H commute avec C, $H(C\omega) = 0$, ce qui, joint à $dC\omega = 0$, entraîne $C\omega \sim 0$; de même, $d\omega = dC\omega = C$ entraîne $dP_{p,q}\omega = 0$, puis comme précédemment $P_{p,q}\omega \sim 0$ puisque H commute avec $P_{p,q}$) . Autrement dit, si on se restreint à ne considérer que les formes satisfaisant à $d\omega = dC\omega = 0$, la classe de cohomologie de $C\omega$, et celle de $P_{p,q}\omega$ pour chaque choix de p , q ne dépendent que de celle de ω .

Comme on a $C^2\omega = \pm\ \omega$ suivant que ω est de degré pair ou impair, on voit donc que C détermine sur le groupe de cohomologie de V de degré e à coefficients réels (considéré comme espace vectoriel sur R) un automorphisme de carré égal à $(-1)^e I$; en particulier, pour e impair, on peut utiliser, soit C , soit $-C$, pour définir une structure d'espace vectoriel complexe sur l'espace de cohomologie de degré e de V (ce qui implique que la dimension réelle de celui-ci est paire). En fait, nous conviendrons toujours de définir une telle structure au moyen de $J = -C$.

D'autre part, dans l'espace de cohomologie de V de degré e , à coefficients réels, on a un sous-groupe discret de rang maximal, image canonique du groupe de cohomologie de V de degré e à coefficients entiers ; en d'autres termes, c'est là le sous-groupe formé des classes de formes différentielles fermées dont toutes les périodes sont des entiers. Pour e impair, on a ainsi tout ce qu'il faut pour définir un tore complexe associé d'une manière invariante à la structure analytique complexe de V (et indépendant de la structure kählérienne de V , bien qu'il soit indispensable, pour parvenir à la définition de ce tore, de supposer qu'il existe sur V au moins une telle structure). Au moyen de la dualité de Poincaré sur V , on vérifie facilement que les tores associés à V , relatifs à des valeurs complémentaires de e (c'est-à-dire à $e = 2p + 1$ et à $e = 2n - 2p - 1$, n étant la dimension complexe de V) sont <u>duaux</u> l'un de l'autre.

Il y a lieu de se demander quand les tores complexes ainsi associés à une variété V sont des variétés abéliennes (auquel cas on les appellera les <u>variétés jacobiennes</u> de V). Une condition suffisante pour qu'il en soit ainsi est contenue (implicitement tout au moins) dans le livre de HODGE [1] : c'est qu'il existe sur V une structure kählérienne (compatible, comme toujours, avec la structure complexe) pour laquelle la forme différentielle fondamentale Ω de degré 2 soit <u>à périodes entières</u> ; une variété satisfaisant à cette condition sera dite une <u>variété de Hodge</u>. Si V est une telle variété, il en est de même de toute sous-variété de V (au sens analytique complexe) ; comme il est immédiat que l'espace projectif complexe est une variété de Hodge, il en est donc de même de toute variété plongeable sans singularité dans un tel espace ; d'après le théorème de

Chow, une telle variété est nécessairement algébrique. De là on conclut à la possibilité d'appliquer les présents résultats aux "modèles projectifs sans singularités".

Pour démontrer que les tores complexes associés à une variété de Hodge sont des variétés abéliennes, on a à se servir des identités de Hodge sur les formes harmoniques et de la classification de ces formes sur une variété kählérienne au moyen des "formes effectives" (au sens de Hodge : il vaudrait mieux dire "formes primitives"). Le principe en sera mis en évidence par la démonstration suivante, relative au cas $e = 1$. L'opérateur C et la forme Ω étant comme ci-dessus, et * étant l'opérateur habituel (défini par la structure riemannienne) qui transforme toute forme en une forme de degré complémentaire, on vérifie aisément qu'on a, quelle que soit la forme θ de degré 1 :

$$(C\theta)\Omega^{n-1} = -(n-1)\,!\,{}^*\theta\,.$$

Identifiant alors l'espace des formes harmoniques réelles de degré 1 avec l'espace de cohomologie de V de degré 1 , on pose

$$E(\theta\,,\eta) = -\int_V \theta\eta\Omega^{n-1}$$

pour $\theta\,,\eta$ harmoniques. C'est là une forme de Riemann pour le tore complexe associé à V et à $e = 1$; en effet :

a. elle est bilinéaire alternée en $\theta\,,\eta$;

b. si $\theta\,,\eta$ sont des formes à périodes entières, $E(\theta\,,\eta)$ est entier en vertu des théorèmes de de Rham et de l'hypothèse faite sur Ω (Ω est à périodes entières) ;

c. on a

$$E(J\theta\,,\eta) = (n-1)\,!\int_V \eta({}^*\theta)$$

puisqu'on a pris $J = -C$; c'est là une forme bilinéaire sysmétrique et définie positive en η, θ d'après les propriétés connues de * .

Soit V riemannienne ; soient A_0 , A'_0 les espaces de cohomologie de V à coefficients réels, de degrés respectifs $2n-1$ et 1 ; soient Δ , Δ' leurs sous-groupes discrets formés des classes de formes à périodes entières ; soit (a_h) un système de générateurs de Δ : c'est en même temps une base de A_0 , et la base (a'_h) de A'_0 duale de (a_h) est un système de générateurs de Δ' . Soit θ_h la forme harmonique de degré 1 sur V qui appartient à la classe a'_h . Soient $\widetilde{V}$ le revêtement universel de V , $\widetilde{P}$ un point de $\widetilde{V}$; pour $\widetilde{M} \in \widetilde{V}$ on pose

$$\tilde{F}(\tilde{M}) = \sum_h a_h \int_{\tilde{P}}^{\tilde{M}} \theta_h .$$

Pour $\tilde{P}$ fixe, $\tilde{F}$ est une application de $\tilde{V}$ dans A ; elle ne dépend pas du choix de la base (a_h). Si $\tilde{M}' \in \tilde{V}$ a même projection M que $\tilde{M}$ sur V, on a

$$\tilde{F}(\tilde{M}') - \tilde{F}(\tilde{M}) = \sum a_h p_h$$

où p_h est la période de θ_h relative au cycle projection sur V d'un chemin allant de $\tilde{M}$ à $\tilde{M}'$ sur $\tilde{V}$. Comme les θ_h sont à périodes entières, les p_h sont des entiers, donc $\sum a_h p_h \in \Delta$. Par suite l'image canonique de $\tilde{F}(\tilde{M})$ dans le tore A_0/Δ ne dépend que de M ; si on la désigne par $F(M)$, F est une application de V dans A_0/Δ, qui est canonique à une translation près (à cause du choix de $\tilde{F}$). Si V est kählérienne, on a défini plus haut, au moyen de $J = -C$, une structure complexe sur A_0, qui fait de A_0 un vectoriel A sur les complexes ; alors A/Δ est le premier tore complexe associé à V ; posons $\Theta = A/\Delta$; F est donc une application de V dans Θ. On va montrer que F est analytique complexe. En effet, pour $x \in A_0$, on a $x = \sum a_h . \langle x , a'_h \rangle$, donc

$$d \langle \tilde{F}(\tilde{M}) , a'_h \rangle = \theta_h(\tilde{M}) .$$

Si J et J' sont des endomorphismes de A_0 et A'_0 qui définissent respectivement leurs structures complexes, la forme harmonique de classe $J' a'_h$ est $-C\theta_h$ (par définition de J').

Posons :

$$L_h(x) = \langle x , a'_h \rangle - i \langle Jx , a'_h \rangle = \langle x , a'_h \rangle + i \langle x , J' a'_h \rangle ;$$

quel que soit h, L_h est la forme linéaire sur A (au sens de la structure de vectoriel <u>complexe</u>) ayant la partie réelle $\langle x , a'_h \rangle$, donc toutes les formes linéaires complexes sur A sont combinaisons linéaires des L_h. On a :

$$dL_h(\tilde{F}(\tilde{M})) = \theta_h(\tilde{M}) - iC\theta_h(\tilde{M}) .$$

Mais on sait que, sur V kählérienne, si θ est harmonique de degré 1, $\theta - iC\theta$ est une forme fermée partout holomorphe (une forme "de première espèce"). Donc $\tilde{F}$, et par suite F, sont analytiques complexes. On voit d'ailleurs facilement que F est "universelle" (en un sens facile à préciser) pour toutes les applications analytiques complexes de V dans des tores complexes.

Si $X = \sum m_\nu M_\nu$ est un cycle de dimension 0 homologue à 0 sur V, on a $\sum m_\nu = 0$, donc, en posant $F(X) = \sum_\nu m_\nu F(M_\nu)$, $F(X)$ est canoniquement déterminé (le choix de $\tilde{P}$ n'intervient plus). On peut de même, pour tout $e = 2p + 1$, définir une application canonique, dans le tore complexe associé à V pour la dimension $2n - e$, du groupe des cycles analytiques complexes homologues à 0 sur V, de dimension complexe p. On va désormais se borner au cas $e = 2n - 1$, V étant supposée variété de Hodge ; on notera Θ, Θ' les tores complexes (les "jacobiennes") associés à V pour les dimensions $2n - 1$, 1 ; ils seront dits respectivement <u>variétés d'Albanese</u> et <u>de Picard</u> de V ; ce qui précède définit une application de V dans sa variété d'Albanese. On se propose de faire correspondre à tout diviseur X (cycle analytique complexe de dimension complexe $n - 1$) homologue à 0 sur V un point de la variété de Picard Θ'.

Soit donc X un diviseur sur V, c'est-à-dire une combinaison linéaire à coefficients entiers de sous-variétés irréductibles de V de dimension complexe $n - 1$ (ces sous-variétés peuvent avoir des singularités algébroides ; au voisinage de chacun de leurs points, elles coïncident avec l'ensemble des zéros d'une fonction holomorphe) ; on suppose X homologue à 0 pour l'homologie à coefficients réels (ou ce qui revient au même rationnels). D'après le théorème principal de A. WEIL ([3], p. 110), il existe alors sur V une forme différentielle fermée ζ de degré 1, partout méromorphe, admettant le diviseur X ; cela signifie que si, au voisinage d'un point de V, X est le diviseur d'une fonction φ méromorphe dans ce voisinage, $\zeta - \frac{1}{2\pi i} d \log \varphi$ est holomorphe fermée dans un voisinage du même point. Dans ces conditions la formule

$$\Phi(\tilde{M}) = e^{2\pi i \int_{\tilde{P}}^{\tilde{M}} \zeta}$$

définit sur le revêtement universel $\tilde{V}$ de V une fonction méromorphe Φ ; cette fonction est "multiplicative" c'est-à-dire que tout automorphisme de $\tilde{V}$ (correspondant à un élément du groupe fondamental de V) multiplie Φ par un facteur constant ; on dit, par abus de langage, que Φ est une fonction méromorphe multiplicative sur V ; et on dit, en un sens évident, que X est le diviseur de Φ sur V. Dire que Φ est multiplicative implique que Φ définit une représentation du groupe fondamental de V dans le groupe C^*, donc (par passage au quotient) une représentation dans C^* du groupe d'homologie de V de dimension 1 à coefficients entiers. Soit H ce groupe ; soit Γ le groupe de ses représentations $h \to \mu(h)$ dans C^*, topologisé de manière évidente ; soit Γ_0 la composante connexe de l'élément neutre dans Γ ; sur Γ et Γ_0 on définit de manière évidente des structures complexes (en s'imposant que, quel que soit

$h \in H$, $\mu(h)$ soit fonction holomorphe de μ sur Γ, resp. sur Γ_0) ; Γ_0 est formé des $\mu \in \Gamma$ tels que $\mu(h) = 1$ pour tout élément h du groupe de torsion H_0 de H . Soit γ le sous-groupe de Γ formé des représentations (ou "systèmes de multiplicateurs") déterminées par les fonctions multiplicatives holomorphes sans zéro sur V ; une telle fonction est de la forme

$$\Phi_0(\widetilde{M}) = e^{2\pi i \int_{\widetilde{P}}^{\widetilde{M}} \zeta_0}$$

où ζ_0 est une différentielle "de première espèce" (partout holomorphe) sur V . Il est clair que $\gamma \in \Gamma_0$; si d'autre part Γ_1 est le sous-groupe de Γ_0 formé des représentations $\mu \in \Gamma_0$ telles que $|\mu(h)| = 1$ quel que soit $h \in H$, les théorèmes d'existence de Hodge montrent immédiatement que Γ_0 est produit direct de γ et de Γ_1 . D'ailleurs Γ_1 n'est pas autre chose que le tore dual de H/H_0 ; comme H/H_0 s'identifie canoniquement (par dualité de Poincaré) au groupe noté précédemment Δ (image, dans la cohomologie réelle de dimension $2n-1$ de V , de la cohomologie entière de V de même dimension), Γ_1 s'identifie au tore A'_0/Δ' ; comme $\Theta = A'/\Delta'$ est ce dernier tore muni d'une structure complexe, on peut transporter cette structure complexe à Γ_1 , donc aussi à Γ_0/γ qui est canoniquement isomorphe à Γ_1 . En définitive, on a ainsi établi un isomorphisme canonique entre Γ_0/γ (ainsi muni d'une structure complexe) et Θ' [N.B. – Il serait facile de montrer qu'alors l'homomorphisme canonique de Γ_0 sur Γ_0/γ est analytique complexe ; réciproquement, cette condition suffit à déterminer la structure complexe de Γ_0/γ] . Comme Γ_0 est d'indice fini dans Γ, on peut étendre d'une manière évidente la structure complexe de Γ_0/γ à une structure complexe dans Γ/γ .

Si alors X est un diviseur donné comme plus haut, et si Φ est, comme plus haut, une fonction méromorphe multiplicative de diviseur X , le système des multiplicateurs de Φ est un élément μ de Γ ; si Φ' est une autre fonction analogue, Φ'/Φ est une fonction multiplicative de diviseur 0, c'est-à-dire holomorphe sans zéro, donc son système de multiplicateurs est un élément de γ ; autrement dit, μ est bien défini modulo γ quand X est donné. Au diviseur X on a ainsi fait correspondre un élément bien déterminé $c(X)$ de Γ/γ . La dualité de Poincaré permet de voir de plus que, pour que $\mu \in \Gamma_0$, il faut et il suffit que X soit homologue à 0 à coefficients entiers.

En définitive, si $\mathcal{G}_a$ désigne le groupe additif des diviseurs sur V , homologues à 0 à coefficients entiers, on a défini un homomorphisme $X \to c(X)$ de $\mathcal{G}_a$ dans

Γ_0/γ c'est-à-dire dans Θ'. Le noyau de cet homomorphisme est formé des diviseurs X appartenant aux fonctions méromorphes multiplicatives dont le système de multiplicateurs est 1, donc aux diviseurs des fonctions méromorphes sur V (sans abus de langage) ; un tel diviseur est dit linéairement équivalent à 0 sur V ; si $\mathcal{G}_\ell$ est le groupe de ces diviseurs, c définit donc un isomorphisme de $\mathcal{G}_a/\mathcal{G}_\ell$ dans Θ.

Enfin, c est un isomorphisme de $\mathcal{G}_a/\mathcal{G}_\ell$ sur Θ ; autrement dit, à tout système de multiplicateurs $\mu \in \Gamma_0$ appartient au moins une fonction méromorphe multiplicative Φ. Cela se démontre aisément, tout d'abord sur une variété abélienne par construction explicite (au moyen des"fonctions thêta"), puis sur V au moyen de l'application canonique F définie plus haut de V dans sa variété d'Albanese Θ

[Le reste du mémoire est consacré principalement :

A. à la construction plus ou moins explicite (au moyen de fonctions thêta) d'un système de représentants du groupe quotient $\mathcal{G}_a/\mathcal{G}_\ell$ qui est une famille algébrique de diviseurs paramétrée par Θ' ;

B. à la démonstration du fait que l'isomorphisme c détermine, sur toute famille algébrique de diviseurs, une application algébrique de cette famille dans Θ'.

Pour une autre méthode de construction des variétés d'Albanese et de Picard et de l'isomorphisme c, restreinte au cas des variétés plongées sans singularités dans un espace projectif complexe, cf. [2].

BIBLIOGRAPHIE

[1] HODGE (W.V.D.). - The theory and applications of harmonic intégrals. - Cambridge, University Press, 1952.

[2] IGUSA (Jun-Ichi). - On the Picard varieties attached to algebraic varieties, Annals of math., t. 74, 1952, p. 1-22.

[3] WEIL (André). - Sur la théorie des formes différentielles attachées à une variété analytique complexe, Comm. Math. Helv., t. 20, 1947, p. 110-116.

[4] WEIL (André). - Théorèmes fondamentaux de la théorie des fonctions thêta, séminaire Bourbaki, t. 1, 1948/49.

[5] WEIL (André). - On Picard varieties, Annals of Math., t. 74, 1952, p. 865-894.