Séminaire N. Bourbaki

René Thom

Sous-variétés et classes d'homologie des variétés différentiables

Séminaire N. Bourbaki, 1954, exp. nº 78, p. 271-277
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1951-1954__2__271_0>

Séminaire BOURBAKI
(Février 1953)

SOUS-VARIÉTÉS ET CLASSES D'HOMOLOGIE DES VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES

par René THOM

Soit W^p une variété compacte de dimension p, orientable. A toute orientation de W^p correspond une classe du groupe d'homologie $H_p(W^p ; Z)$, appelée <u>classe fondamentale</u> de la variété W^p ; si les coefficients sont pris dans Z_2, la classe fondamentale de $H_p(W^p ; Z_2)$ est définie de façon unique, même si W^p n'est pas orientable. Supposons que W^p soit une sous-variété d'une variété compacte V^n $(n > p)$; l'application identique i de W^p dans V^n induit alors un homomorphisme i_* du groupe d'homologie $H_p(W^p)$ dans le groupe $H_p(V^n)$; soit $z \in H_p(V^n)$ l'image par i_* de la classe fondamentale de W^p ; on dira qu'alors la classe z est <u>réalisée</u> par la sous-variété W^p. Le problème ici considéré est le suivant :

Donner des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une classe d'homologie $z \in H_p(V^n)$ donnée d'avance soit réalisable par une sous-variété.

On ne considèrera ici que les variétés paracompactes, différentiables de classe C^∞ ; les sous-variétés sont supposées différentiablement plongées de classe C^∞ (l'indice supérieur porté derrière le symbole d'une variété, tel que V^n, désigne la dimension de la variété). Les coefficients sont pris dans le groupe Z_2, ou dans le groupe Z ; en ce dernier cas variété et sous-variété seront supposées orientables.

1. <u>Théorèmes généraux</u>.

A. <u>Un théorème sur les applications différentiables</u>. - Nous aurons besoin pour la suite du théorème :

THÉORÈME 1. - <u>Soit f une application de V^n dans M^p, et soit N^{p-q} une sous-variété compacte de M^p $(n > q)$; il existe alors une application F voisine de f (on peut même supposer que $F = f$ à l'extérieur d'un voisinage de $f^{-1}(N^{p-q})$), telle que</u> :

1° <u>L'image réciproque $F^{-1}(N^{p-q})$ est une sous-variété W^{n-q} de V^n</u>.

2° <u>L'espace fibré des vecteurs normaux à W^{n-q} dans V^n est induit de l'espace fibré des vecteurs normaux à N^{p-q} par l'application F</u>.

Nous ne pouvons donner ici la démonstration relativement longue de ce théorème ; disons seulement qu'elle se fonde sur le résultat suivant :

l'ensemble des valeurs critiques d'une application différentiable de classe C^n, $f : V^n \longrightarrow R^q$ est un sous-ensemble <u>maigre</u> de R^q $(n > q)$

Soit G un groupe de Lie, sous-groupe du groupe orthogonal $O(k)$. On sait que tout espace E, fibré en sphères S^{k-1}, qui admet G pour groupe de structure, est induit d'un espace fibré universel E_G, de base B_G. Si l'on suppose de plus que l'espace E est de dimension finie N, alors il existe un espace universel E_G dont la base B_G est une variété compacte. Désignons par A_G l'espace fibré en k-boules associé à l'espace E_G, obtenu en "remplissant" les sphères fibres S^{k-1}. On appellera complexe associé à $G \angle O(k)$ l'espace (noté $M(G(K))$) obtenu à partir de A_G par identification en un point a de son bord E_G.

La cohomologie de l'espace $M(G(k))$ est aisée à déterminer, grâce aux isomorphismes :

$$\varphi_G^* : H^{r-k}(B_G) \longrightarrow H^r(A_G , E_G) \longrightarrow H^r(M(G(k))) \qquad r > 0$$

où l'isomorphisme φ_G^* de la théorie des espaces fibrés en k-boules est défini en coefficients entiers si l'espace E_G est orientable (G connexe à coefficients dans Z_2, en général. En particulier, le premier groupe $H^r(M(G(k)))$ $(r > 0)$ non nul est $H^k(M(G(k)))$; il est engendré par la classe $U = \varphi^*(\omega_G)$, où ω_G désigne la classe-unité de $H^0(B_G)$. La classe U, classe fondamentale du complexe $M(G(k))$, est à coefficients dans Z si G est connexe, dans Z_2 si G est non connexe.

THÉORÈME 2. - <u>Soit</u> $z \in H_{n-k}(V^n)$, $k > 0$, <u>une classe d'homologie de la variété compacte</u> V^n <u>et</u> $u \in H^k(V^n)$ <u>la classe de cohomologie qui lui correspond par la dualité de Poincaré</u>. <u>Pour que</u> z <u>soit réalisable par une sous-variété</u> W^{n-k} <u>dont l'espace fibré des vecteurs normaux admette</u> G <u>pour groupe de structure, il faut et il suffit qu'il existe une application</u> $f : V^n \longrightarrow M(G(k))$, <u>telle que si</u> f^* <u>désigne l'homomorphisme induit par</u> f <u>sur les cohomologies, on ait</u> : $u = f^*(U)$.

<u>La condition est nécessaire</u>. - Supposons la classe z réalisée par une sous-variété W^{n-k} ; munissons V^n d'une métrique riemannienne ; l'ensemble N des points de V^n, dont la distance à W^{n-k} est inférieure à ε, est, pour ε assez petit, fibré sur W^{n-k} en k-boules géodésiques normales. Soit T la variété-bord de N : c'est aussi le bord du complémentaire $\complement N$; l'espace fibré N, isomorphe à l'espace des vecteurs normaux à W^{n-k}, admet par hypothèse G pour groupe de structure ; c'est dire qu'il existe une application g de N dans

l'espace universel A_G , qui applique fibre sur fibre ; en particulier, g applique le bord T de N dans le bord E_G de A_G ; l'application composée :

$$N \longrightarrow A_G \longrightarrow M(G(k))$$

se prolonge donc au complémentaire $\complement N$, il suffit de poser $f : \complement N \longrightarrow a$; si on désigne par $\overset{*}{\varphi}$ l'isomorphisme $\overset{*}{\varphi}$ relatif à l'espace fibré N , on a :

$$f^*(U) = g^*(\varphi_G^*(\omega_G)) = \overset{*}{\varphi}(\omega) = u$$

car, on peut montrer que la classe $\overset{*}{\varphi}(\omega)$ est duale du cycle fondamental porté par la sous-variété W^{n-k} .

La condition est suffisante. - Supposons qu'il existe $f : V^n \longrightarrow M(G(k))$ telle que $f^*(U) = u$; la restriction de f à l'ouvert $V^n - f^{-1}(a)$ applique cet ouvert dans $M(G(k)) - a$, qui est une variété contenant B_G comme sous-variété dont l'espace des vecteurs normaux admet G pour groupe de structure. Par application du théorème 1 , on trouvera une application F voisine de f , telle que $W^{n-k} = F^{-1}(B_G)$ soit une sous-variété dont l'espace fibré des vecteurs normaux admette G pour groupe de structure ; on aura ici encore $u = f^*(U) = F^*(U) = \overset{*}{\varphi}(\omega)$, ce qui montre que la classe u est duale du cycle fondamental porté par W^{n-k} .

Le théorème 2 ramène ainsi notre problème à un problème classique en topologie : prolongement d'une application d'un espace dans un autre. Il n'est pas question ici d'exposer la théorie des obstructions consacrée à la résolution de ce problème. Par contre, rappelons quelques résultats relatifs aux complexes d'Eilenberg-MacLane.

Pour tout groupe abélien de type fini π , il existe un espace $K(\pi , k)$ dont tous les groupes d'homotopie sont nuls à l'exception de $\pi_k(K(\pi , k) \simeq \pi$; $H_k(K(\pi , k) ; Z) \simeq \pi$, et le groupe de cohomologie $H^k(K(\pi , k) ; \pi) = \mathrm{Hom}(\pi,\pi)$ possède une classe fondamentale j ; pour toute classe de cohomologie $u \in H^k(A ; \pi)$ d'un espace arbitraire A , il existe une application $g : A \rightarrow K(\pi , k)$, telle que $g^*(j) = u$. Si donc on cherche à appliquer A dans $M(G(k))$, on pourra chercher à trouver une application $h : K(\pi , k)$ dans $M(G(k))$, telle que $h^*(U) = j$; si une telle application h existe, alors l'application $f = h \circ g$. est telle que $f^*(U) = u$ et elle est définie pour un espace arbitraire A (en particulier, pour toute variété V^n) ; en général, une telle application h n'existe pas ; le prolongement de h au r^0-squelette de $K(\pi , k)$ est en général interdit par une obstruction, classe de $H^r(K(\pi , k))$ qu'on sait en général déterminer par la théorie des obstructions.

2. Résultats.

1° Supposons G réduit à l'élément neutre e. - Alors B_G se réduit à un point A_G à une k-boule, et $M(e(k))$ est une sphère S^k. Soit E un espace, $u \in H^k(E, Z)$ une classe de cohomologie entière de E. On dit que u est une classe sphérique s'il existe une application $f : E \longrightarrow S^k$, telle que $u = f^*(s^k)$ où s^k désigne un générateur du groupe cyclique $H^k(S^k ; Z)$. La théorème 2 donne alors :

THÉORÈME 3. - Pour qu'une classe d'homologie $z \in H_{n-k}(V^n ; Z)$ soit réalisable par une sous-variété W^{n-k} dont l'espace fibré des vecteurs normaux soit trivial, il faut et il suffit que la classe de cohomologie $u \in H^k(V^n)$ duale de z soit sphérique.

On ne connait pas, en général, les conditions suffisantes pour qu'une classe de cohomologie donnée soit sphérique ; néanmoins, J.-P. SERRE a démontré le théorème suivant :

Pour toute classe $x \in H^k(A ; Z)$ d'un espace A de dimension finie n, il existe, si k est impair, ou $n < 2k$, un entier non nul N (ne dépendant que de k et n) tel que la classe multiple $N.x$ soit une classe sphérique.

De là résulte :

THÉORÈME 4. - Pour toute classe d'homologie $z \in H_{n-k}(V^n ; Z)$, avec k impair ou $n < 2k$, il existe un entier non nul N (ne dépendant que de k et n) tel que la classe multiple $N.x$ soit réalisable par une sous-variété W^{n-k} dont l'espace fibré des vecteurs normaux soit trivial.

2° G est le groupe orthogonal $O(k)$ (non connexe).

La classe fondamentale $U \in H^k(M(O(k))$ est alors à coefficients dans Z_2 ; une étude détaillée de la cohomologie de $M(O(k))$ donne les résultats suivants :

L'application $h : K(Z_2, k) \rightarrow M(O(k))$ peut être définie pour $k = 1$; pour $k > 1$, elle n'existe pas ; cependant h peut être définie, pour tout k sur le 2k-squelette de $K(Z_2 ; 2)$; et ce résultat ne peut être amélioré, car, pour $k = 2$, on a une obstruction en dimension 5, classe de $H^5(K(Z_2, 2) ; Z)$, qu'on peut écrire comme $\frac{1}{2}\delta p(j)$, où $p(j)$ désigne le carré de Pontrjagin de la classe fondamentale j. De là on tire :

THÉORÈME 5. - Toutes les classes des groupes d'homologie mod 2 suivants sont réalisables par des sous-variétés :

$H_{n-1}(V^n ; Z_2)$ pour tout n ; $H_{n-2}(V^n ; Z_2)$ pour $n < 6$; $H_i(V^n ; Z_2)$ pour n, si $i < [n/2]$.

3° G est le groupe des rotations (connexe) $SO(k)$.
La classe fondamentale $U \in H^k(M(SO(k)))$ est alors à coefficients entiers. On essaiera par suite de former une application $h : K(Z , k) \longrightarrow M(SO(k))$, telle que $h^*(U) = j$. Une telle application h existe pour $k = 1$ et 2. Par contre, pour $k > 3$, h ne peut être définie sur le $(k + 5)$-squelette à cause d'une obstruction, classe de $H^{k+5}(K(Z , k) ; Z)$ qui n'est autre que le cube de Steenrod $St_3^5(j)$ de la classe fondamentale j. Donc :

THÉORÈME 6. - Les classes des groupes d'homologie suivants sont réalisables par des sous-variétés (orientables dans V^n orientable) :

$H_{n-1}(V^n ; Z)$; $H_{n-2}(V^n ; Z)$ pour tout n

$H_{n-k}(V^n ; Z)$ pour $n < k + 6$ ($H_i(V^n ; Z)$ pour $i \leq 5$).

En particulier, toutes les classes des variétés de dimension < 9 sont réalisables.

Notons en passant la condition nécessaire suivante :

THÉORÈME 7. - Pour qu'une classe d'homologie $z \in H_{n-k}(V^n ; Z)$ soit réalisable, il faut que la classe de cohomologie $u \in H^k(V^n ; Z)$ duale de z satisfasse à $St_p^{2m(p-1)+1}(u) = 0$ pour tout entier m et tout premier p impair.

Les résultats obtenus en ce cas sont donc bien moins complets que ceux obtenus dans le cas Z_2 ; cependant, si l'on s'intéresse seulement à la réalisation d'une classe à un coefficient près, on peut donner au théorème 4 une généralisation, qui repose sur le lemme que voici :

LEMME. - Soit Y un espace tel que la composante libre du groupe d'homotopie $\pi_k(Y)$ soit isomorphe à Z de générateur t. Supposons de plus que tous les groupes de cohomologie $H^{q+1}(K(Z , k) ; \pi_q(Y))$ soient finis, les $\pi_q(Y)$ pour $q \geq k$ étant eux-mêmes de type fini. Il existe alors un entier non nul N_q et une application g_q du q-squelette de $K(Z , k)$ dans Y telle que g_q applique un générateur du groupe $\pi_k(K(Z , k)) \simeq Z$ sur $N_q.t$.

Ce lemme s'applique à la grassmannienne G_k des k-plans orientés, qui forme le sous-espace A_G de $M(SO(k))$, tout au moins pour k pair.

On obtient ainsi :

THÉORÈME 8. – Pour toute classe $z \in H_{n-k}(V, Z)$ avec k pair, il existe un entier non nul N ne dépendant que de k et n tel que la classe multiple $N.z$ soit réalisable par une sous-variété.

Les théorèmes 4 et 8 montrent qu'ainsi, du point de vue de l'homologie à coefficients réels (qui est celui des géomètres différentiels) toute classe d'homologie entière peut être réalisée par une sous-variété ; en homologie mod 2 , cette affirmation n'est valable que pour les classes dont la dimension est inférieure à la moitié de la dimension de la variété.

3. Variétés associées à polyèdre fini. Problème de Steenrod.

Soit K un polyèdre fini, de dimension r ; K peut être rectilinéairement plongé dans un R^m , si $m \geqslant 2r+1$; il est alors possible de définir (par exemple comme solution d'un problème de Dirichlet) une fonction F , nulle sur K , différentiable de classe C^∞ et >0 sur le complémentaire de K , soit c une valeur (non critique) de F , assez petite ; l'image réciproque $F^{-1}[0, c]$ est une variété à bord M , dont on peut former la variété "dédoublement" V^m , qui est compacte ; supposons que c a été prise assez petite pour que M soit tout entier contenu dans un voisinage ouvert de U de K , dont K est un rétracte ; il est aisé de montrer que l'anneau de cohomologie $H^*(V^m)$ contient un sous-anneau isomorphe à $H^*(K)$ (et cet isomorphisme est compatible avec toutes les opérations définies en cohomologie) .

On conçoit qu'il soit ainsi possible de construire des variétés pour lesquelles les obstructions mises plus haut en évidence ne sont pas nulles ; si, par exemple, on prend pour K le 5-squelette de $K(Z_2, 2)$, ou le 8-squelette de $K(Z, 3)$, on obtient des variétés V^{11} et V^{17} respectivement, pour lesquelles une classe de $H_9(V^{11}; Z_2)$ (ou $H_{14}(V^{17}; Z)$ respectivement, n'est pas réalisable (les obstructions $\frac{1}{2}\delta p(j)$ et $St_3^5(j)$ n'étant pas nulles). Ce sont là des exemples, les plus simples que je connaisse, de classes non réalisables ; il n'est pas exclu qu'il s'en trouve dans des variétés de dimension moins élevée , ou de construction moins artificielle. Par exemple dans le groupe exceptionnel F_4, il existe des classes entières pour lesquelles St_3^5 n'est pas nul (résultat de A. BOREL), et les classes d'homologie correspondantes ne sont pas réalisables.

Problème de Steenrod. – Etant donnée une classe d'homologie $z \in H_p(K)$ d'un polyèdre fini K , existe-t-il une variété W^p et une application $f : W^p \to K$, telles que z soit l'image par f de la classe fondamentale de W^p ? La construction précédente peut quelquefois résoudre la question ; soient V^m

une variété associée à K et z' l'image de la classe z par l'injection $K \to M \to V$; supposons que z' dans V^m soit réalisable par une sous-variété W^p ; alors les applications inverses $V \to M \to K$ (où $M \to K$ est une rétraction) définissent la classe z comme image de la classe fondamentale de la variété W^p. On obtient ainsi :

Toute classe d'homologie mod 2 d'un polyèdre fini est l'image de la classe fondamentale d'une variété différentiable compacte.

Toute classe d'homologie entière de dimension < 5 d'un polyèdre fini est l'image de la classe fondamentale d'une variété orientable différentiable compacte.

Pour toute classe z d'homologie entière de dim p d'un polyèdre fini, il existe un entier N non nul, ne dépendant que de p, tel que la classe multiple $N.z$ soit l'image de la classe fondamentale d'une variété orientable différentiable compacte.

ADDITIF

Pour une démonstration des résultats ici présentés, se reporter à :

[1] THOM (René). - Quelques propriétés globales des variétés différentiables, Comment. Math. Helv., t. 28, 1954, p. 17-86.

[Février 1958]