JACQUES DIXMIER

Fonction sphériques

Séminaire N. Bourbaki, 1954, exp. nº 79, p. 279-286
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1951-1954__2__279_0>

Séminaire BOURBAKI
(Mai 1953)

FONCTIONS SPHÉRIQUES

par Jacques DIXMIER

[d'après R. GODEMENT (1)]

1. Notations.

G : <u>groupe localement compact unimodulaire</u> ; $M(G)$ (resp. $L(G)$) : algèbre des mesures (resp. fonctions continues) complexes à support compact (le produit de composition de α et β est noté $\alpha\beta$) ; représentation continue de G dans un espace de Banach H = représentation fortement continue de G par des opérateurs continus de H ; H^* : dual de H . Toute représentation $g \to T_g$ de G se prolonge en une représentation $\alpha \to T_\alpha$ de $M(G)$ par $T_\alpha = \int T_g \, d\alpha(g)$.

<u>L'irréductibilité</u> de $g \to T_g$ signifie classiquement : pas de sous-espace fermé stable pour les T_g (sauf 0 et H). Ici, il faut une définition plus stricte (équivalente en dimension finie et pour les représentations unitaires dans les espaces hilbertiens) : tout opérateur continu sur H est limite forte de combinaisons linéaires des T_g .

dg : mesure de Haar sur G . Toute fonction continue $\theta(g)$ sur G est identifiée à la mesure $\theta(g)dg$. Si f est une fonction continue à support compact sur G , $\theta(f)$ désigne donc $\int \theta(g)f(g)dg$.

K : <u>sous-groupe compact de</u> G . L'injection de K dans G définit une injection de $M(K)$ dans $M(G)$ par laquelle on identifie $M(K)$ à une sous-algèbre de $M(G)$. Toute fonction continue sur K s'identifie à une mesure sur K donc sur G . Un élément variable de K sera toujours désigné par k .

2. Définition des fonctions sphériques.

Soit $g \to T_g$ une représentation irréductible de G dans H . Soit d une classe de représentations irréductibles de K , χ_d son caractère (normalisé de façon que $\chi_d \chi_d = \chi_d$). Soit $H(d)$ le sous-espace des $x \in H$ qui, par $k \to T_k$, se transforment suivant d ($x \in H(d) \Leftrightarrow$ les $T_k x$ engendrent un

---

(1) GODEMENT (Roger). - A theory of spherical functions, I, Trans. Amer. math. Soc., t. 73, 1952, p. 496-556.

sous-espace de dimension finie dans lequel $k \to T_k$ induit une représentation dont toutes les composantes irréductibles sont de classe d).

$H(d)$ est fermé dans H, et même il existe un projecteur continu de H sur $H(d)$, à savoir $E(d) = T_{\overline{\chi_d}}$. Les $E(d)$ s'annulent 2 à 2. Si $\dim H(d) = p \dim(d)$, on dit que d est contenue p fois dans $g \to T_g$.

Si $H(d)$ est de dimension finie, $E(d)T_g$ est de rang fini, donc on peut former $\varphi_d(g) = \mathrm{Tr}(E(d)T_g)$. Alors, φ_d s'appelle la fonction sphérique de type d de la représentation. On dit qu'elle est de hauteur p.

Une fonction sphérique est continue, et "quasi-bornée" (i.e. $|\varphi_\alpha(g)| \leqslant a\,\rho(g)$, où ρ est une fonction $\geqslant 0$ semi-continue inférieurement sur G, bornée sur tout compact, telle que $\rho(gg') \leqslant \rho(g)\,\rho(g')$) ; en effet, $|\varphi_d(g)| \leqslant a\|T_g\|$.

3. Exemples de fonctions sphériques.

a. Prenons $K = e$. Il n'y a qu'une classe d, et $H(d) = H$. En général, pas de fonction sphérique. Mais, si G est compact, les fonctions sphériques existent et ne sont autres que les caractères de G. De même, si G est abélien, les caractères de G apparaissent comme fonctions sphériques (de hauteur 1).

b. Si G est compact, et si $K = G$, les caractères de G apparaissent encore comme fonctions sphériques, cette fois de hauteur 1.

c. Soient G le groupe des déplacements du plan $R^2 = C$, K le sous-groupe compact des rotations autour de 0, N le sous-groupe abélien des translations, qu'on peut identifier à C. Tout élément de G est de la forme $z' \to e^{i\theta} z' + z$, ce qui permet de l'identifier à un couple (θ, z), $0 < \theta < 2\pi$, $z \in C$. Soit χ un caractère de N, qu'on peut identifier à un nombre complexe ζ. Soit $g \to T_g$ la représentation unitaire de G induite par χ qui opère dans $L^2(K)$. Elle est irréductible si $\zeta \neq 0$. Restreinte à K, cette représentation s'identifie à la représentation régulière de K. Pour tout caractère $e^{in\theta}$ de K (n entier rationnel), il existe donc une fonction sphérique correspondante, de hauteur 1.

Elle vaut, à un facteur constant près : $e^{in\theta} J_0(|\zeta z|)$.

d. Soient G le groupe hyperbolique, ensemble des matrices

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a, \ldots, d \text{ réels}, \quad ad - bc = 1,$$

et K le sous-groupe compact (maximal et abélien) des

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

En vertu du théorème 1 ci-dessous, les fonctions sphériques sont toutes de hauteur 1; si d est la représentation $\theta \longrightarrow e^{in\theta}$ de K les fonctions sphériques de type d vérifient donc

(1) $$\varphi_d(kgk') = \chi_d(k)\,\varphi_d(g)\,\chi_d(k'),$$

parce que d est de dimension 1. En outre elles vérifient (théorème 3 ci-dessous) l'équation fonctionnelle

(2) $$\varphi_d(e)\int \varphi_d(kgk^{-1}g')\,dk = \varphi_d(g)\,\varphi_d(g').$$

et aussi (théorème 5) des équations différentielles. La propriété (1) montre qu'il suffit de les déterminer sur les matrices

$$\delta = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix};$$

prenant $x = \frac{1}{2}(\lambda^2 + \lambda^{-2})$ comme paramètre, on trouve comme solution générale de (2) les fonctions

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (x + \cos\theta\sqrt{x^2-1})^{\rho}\ \mathrm{Am}^n\Big(1 + e^{i\theta}\sqrt{\tfrac{x-1}{x+1}}\Big)\,d\theta$$

où ρ est un paramètre ∞ complexe arbitraire.

Pour $n = 0$ on obtient donc toutes les <u>fonctions de Legendre</u> $P_\rho(x)$. L'équation fonctionnelle (2) est une partie du "théorème d'addition" pour ces fonctions.

Ces formules intégrales ont été généralisées comme suit par HARISH-CHANDRA. Soient G de Lie semi-simple connexe et $K \subset G$ compact maximal ; si le centre de G est fini on a (IWASAWA) $G = K.N$ où N est un sous-groupe <u>résoluble</u> de G ; soit alors $n \longrightarrow \alpha(n)$ une représentation de dimension 1 de N ; posons

$$\alpha(kn) = \alpha(n), \qquad \text{d'où} \quad \alpha(g) \quad \text{sur} \quad G$$

et

$$\varphi_\alpha(g) = \int \alpha(gk)\,dk$$

alors φ_α <u>est la fonction sphérique la plus générale de type</u> d_o (représentation $k \longrightarrow 1$ de K).

4. Existence des fonctions sphériques.

THÉORÈME 1. - Soit G un groupe de Lie semi-simple connexe admettant une représentation linéaire fidèle. Soient K un sous-groupe compact maximal de G, d une représentation irréductible de K. Alors, d est contenu au plus $\dim(d)$ fois dans chaque représentation irréductible $g \to T_g$ de G.

a. Construction de certaines représentations induites : d'après IWASAWA, il existe un sous-groupe N connexe résoluble de G tel que tout $g \in G$ ait une représentation unique $g = nk$, $n \in N$, $k \in K$, n et k dépendant continuement de g (ce qu'on écrit $G = N.K$). Soit $n \to \alpha(n)$ une représentation continue de dimension 1 de N. Soit H l'espace des fonctions continues $\theta(g)$ satisfaisant à $\theta(ng) = \alpha(n)\,\theta(g)$. Soit θ' la restriction de θ à K. Alors, $\theta \to \theta'$ est une application linéaire biunivoque de H sur $L(K)$, espace de Banach des fonctions continues sur K, de sorte qu'on peut identifier H et $L(K)$. Définissons une représentation (non irréductible) $g \to V_g$ de G sur H par $V_g\theta(g') = \theta(g'g)$. Sa restriction à K est la représentation régulière droite de K sur $L(K)$, donc contient d exactement $\dim(d)$ fois.

b. Toute représentation irréductible de dimension finie $g \to U_g$ de G dans un espace H_1 est contenue dans une des représentations précédentes (donc le théorème est vrai pour une telle représentation) : soit $g \to U'_g$ la représentation contragrédiente dans l'espace dual H_1^*. Il existe un $a' \in H_1^*$, $a' \neq 0$, tel que $U'_n a' = \alpha(n)^{-1} a'$ pour $n \in N$ (théorème de Lie). Pour $a \in H_1$, posons $\theta_a(g) = (U_g a, a')$. On a $\theta_a(ng) = \alpha(n)\,\theta_a(g)$, et $a \to \theta_a$ est une application linéaire biunivoque de H_1 dans H. Enfin, $\theta_{U_g a}(g') = \theta_a(g'g)$.

c. Les représentations irréductibles de dimension finie $g \to U_g$ de G forment un système complet de représentations de $L(G)$, i.e. $U_f = 0$ pour toute $g \to U_g$ entraîne $f = 0$. On pense alors à un lemme dû en partie à KAPLANSKY : soit A une algèbre associative sur le corps complexe, ayant suffisamment de représentations de dimension $\leq n$; alors, toute représentation irréductible de A sur un espace de Banach est de dimension $\leq n$ (on utilise l'existence d'un polynôme non commutatif $P(x_1, \ldots, x_r)$ linéaire en chaque x_i, tel que $P(A_1, \ldots, A_r) = 0$ quels que soient $A_1, \ldots, A_r \in M_n$ (algèbre des matrices carrés de degré n), et tel que $P(A_1, \ldots, A_r) \neq 0$ pour certains $A_1, \ldots, A_r \in M_{n+1}$).

d. Le lemme s'applique à la situation du théorème de la manière suivante : soit $L(d)$ la sous-algèbre de $L(G)$ formée des $f \in L(G)$ telles que $\overline{\chi}_d f = f\,\overline{\chi}_d = f$. Pour $f \in L(d)$, on a $E(d)T_f = T_f E(d) = T_f$, donc, si $\tilde{T}_f$ désigne l'opérateur induit par T_f dans $H(d)$, $T_f = 0 \Leftrightarrow \tilde{T}_f = 0$. D'autre part, $g \rightarrow T_g$ irréductible $\Rightarrow f \rightarrow \tilde{T}_f$ irréductible $(f \in L(d))$. Alors, $L(d)$ admet suffisamment de représentations irréductibles de dimension $\leqslant \dim(d)$ d'après b., donc toute représentation irréductible de $L(d)$ est de dimension $\leqslant \dim(d)$, d'où le théorème.

Une légère modification de la démonstration montre que le théorème reste valable si G est localement compact, K sous-groupe compact, et s'il existe un sous-groupe abélien N tel que $G = N.K$.

5. Caractérisation d'une représentation par ses fonctions sphériques.

THÉORÈME 2. – Deux représentations unitaires irréductibles $g \rightarrow T_g$ et $g \rightarrow T'$ de G sont unitairement équivalentes si, pour une d , leurs fonctions sphériques de type d sont égales (et $\neq 0$).

L'hypothèse entraîne que les représentations irréductibles $f \rightarrow \tilde{T}_f$ et $f \rightarrow \tilde{T}'_f$ de $L(d)$ ont même caractère, donc sont algébriquement équivalentes : il existe un isomorphisme de $H(d)$ sur $H'(d)$ qui transforme $\tilde{T}_f$ en $\tilde{T}'_f$. Comme ici il s'agit de représentations unitaires, la correspondance $\tilde{T}_f \leftrightarrow \tilde{T}'_f$ est compatible avec l'opération d'adjonction, de sorte que l'isomorphisme de $H(d)$ sur $H'(d)$ est unitaire. Il existe donc $a \in H(d)$, $a' \in (H(d)$, $a \neq 0$, $a' \neq 0$, avec $(\tilde{T}_f a , a) = (\tilde{T}'_f a' , a')$ pour $f \in L(d)$. Soient $\theta(g) = (T_g a , a)$, $\theta'(g) = T'_g a', a')$.
Pour $f \in L(G)$, on a :

$$\theta(f) = (T_f a , a) = (T_f E(d)a , E(d)a) = (T_{\overline{\chi}_d} T_f T_{\overline{\chi}_d} a , a) = (T_{\overline{\chi}_d f \overline{\chi}_d} a , a) = \theta(f)$$

parce que $\overline{\chi}_d f \overline{\chi}_d \in L(d)$. Donc $\theta = \theta'$, ce qui achève la démonstration.

6. Equation fonctionnelle des fonctions sphériques.

THÉORÈME 3. – Soit $\varphi \neq 0$ une fonction continue quasi-bornée. Alors, φ est proportionnelle à une fonction sphérique de hauteur 1 si et seulement si

$$(*) \qquad \varphi(e) \int \varphi(kg\, k^{-1} g')dk = \varphi(g)\varphi(g')$$

a. L'opération $^\circ$: soit μ une mesure sur G . On pose : $\mu^\circ = \int \varepsilon_k \mu\, \varepsilon_{k^{-1}} dk$; μ° permute avec les ε_k , donc avec toute mesure portée par K . Une opération analogue se définit sur les fonctions continues, les mesures à support compact, etc.

b. $(*)$ signifie (pour $\varphi(e) = 1$) que $\varphi(\varepsilon_g^\circ\, \varepsilon_{g'}) = \varphi(\varepsilon_g)\, \varphi(\varepsilon_{g'})$, donc équivaut à $\varphi(\alpha^\circ \beta) = \varphi(\alpha)\, \varphi(\beta)$ pour $\alpha, \beta \in M(G)$, ou encore à $\varphi(f^\circ f') = \varphi(f)\, \varphi(f')$ pour f , $f' \in L(G)$.

LEMME. – (1) $\varphi(f^o f) = \varphi(f)\,\varphi(f')$ pour f, $f' \in L(G)$ équivaut à l'ensemble des conditions suivantes : (2) $\varphi = \varphi^o$; (3) $\chi_d \varphi = \varphi$ pour une d ; (4) $\varphi(ff') = \varphi(f)\,\varphi(f')$ pour f, $f' \in L^o(d)$.

(1) $\Longrightarrow$ (2) parce que $(^*) \Rightarrow \varphi(f)\,\varphi(e) = \varphi(e)\int \varphi(kgk^{-1})dk = \varphi(e)\,\varphi^o(g)$;

(1) $\Longrightarrow$ (4) est clair ;

(1) $\Longrightarrow$ (3) : soit d telle que $\chi_d \varphi = 0$; comme $\chi_d \in M^o(G)$, on a $\varphi(\overline{\chi}_d \alpha) = \varphi(\overline{\chi}_d)\,\varphi(\alpha)$ pour $\alpha \in M(G)$, donc $\chi_d \varphi = \varphi(\overline{\chi}_d)\,\varphi$; comme $\chi_d \chi_d = \chi_d$, on en déduit $\varphi(\overline{\chi}_d)^2 = \varphi(\overline{\chi}_d)$, d'où $\varphi(\overline{\chi}_d) = 1$, et $\chi_d \varphi = \varphi$.

(2) et (3) et (4) $\Rightarrow$ (1) : pour f, $f' \in L(G)$, on a

$$\varphi(f^o f') = (\chi_d \overset{o}{\varphi} \chi_d)(f^o f') = \varphi(\overline{\chi}_d f^o f'^o \overline{\chi}_d) = \varphi(\overline{\chi}_d f^o \overline{\chi}_d f'^o) = \varphi(\overline{\chi}_d f^o)\varphi(\overline{\chi}_d f'^o) = \varphi(f)\varphi(f').$$

c. Si φ est une fonction sphérique de type d et de poids 1, on a (2), (3), (4) :

$$\varphi(kg\,k^{-1}) = \mathrm{Tr}(E(d)T_k T_g T_k^{-1}) = \mathrm{Tr}(E(d)T_g) = \varphi(g)$$

d'où $\varphi = \varphi^o$. Puis :

$$\chi_d \varphi(g) = \mathrm{Tr}(E(d)T_{\overline{\chi}_d} T_g) = \mathrm{Tr}(E(d)T_g) = \varphi(g),$$

d'où $\varphi = \chi_d \varphi$. Enfin

$$\varphi(ff') = \mathrm{Tr}(E(d)\;T_f\;T_{f'}) ;$$

mais, si $f \in L^o(G)$, $\tilde{T}_f$ est un scalaire, d'où $\varphi(ff') = \varphi(f)\,\varphi(f')$.

d. Si $\varphi = \varphi^o$, $\chi_d \varphi = \varphi$, $\varphi(ff') = \varphi(f)\,\varphi(f')$ pour f, $f' \in L^o(d)$, φ est fonction sphérique de type d et de hauteur 1 : la démonstration, trop longue, ne peut être donnée ici. (Lorsque φ est bornée, on prend la représentation régulière de $L^1(G)$ sur $L^1(G)/m$, m désignant un idéal à gauche maximal de $L^1(G)$ construit à partir de φ ; cette représentation est algébriquement irréductible, et définit une représentation irréductible de G).

7. Propriétés différentielles des fonctions sphériques.

Pour pouvoir en parler, on suppose que G est un groupe de Lie connexe, et on démontre le théorème suivant :

THÉORÈME 4. – Toute fonction sphérique est analytique. (Il s'agit de structures analytiques réelles).

Il suffit de montrer que si $\dim H(d) < +\infty$, $a \in H(d)$, $b \in H^*$, alors $g \longrightarrow (T_g a , b)$ est analytique, autrement dit que a est un "vecteur analytique" pour $g \longrightarrow T_g$. Pour cela, on considère les distributions à support compact sur G , qui forment une algèbre $D(G)$ pour le produit de composition. Soit $U(G)$ la sous-algèbre de $D(G)$ formée des $\alpha \in D(G)$ dont le support est e . Si $(x_1 , x_2 , \dots , x_n)$ est un système de coordonnées au voisinage de e , toute $\alpha \in U(G)$ est combinaison linéaire finie de distributions

$$f \longrightarrow \frac{\partial^{p_1 + \dots + p_n} f}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_n^{p_n}}(e) \quad .$$

Soit $\alpha \in U(G)$; si f est une fonction indéfiniment différentiable sur G , αf l'est aussi, et $f \longrightarrow \alpha f$ est un "opérateur différentiel" X_α , au sens classique, permutable aux translations à droite ; et $\alpha \longrightarrow X_\alpha$ est un isomorphisme de $U(G)$ sur l'algèbre des opérateurs différentiels permutables aux translations à droite. L'opération $\alpha \longrightarrow \alpha^0$ existe dans $D(G)$ et dans $U(G)$.

On peut définir T_α , pour $\alpha \in D(G)$, mais c'est un peu plus délicat que pour $\alpha \in M(G)$. On pose $(T_\alpha a , b) = \int (T_g a , b)\, d\alpha(g)$ pour $a \in H$, $b \in H^*$. Mais il faut que $(T_\alpha a , b)$ soit indéfiniment différentiable, autrement dit que a soit un "vecteur différentiable". Le sous-espace H_∞ de ces a est partout dense dans H d'après GÅRDING. On obtient ainsi une représentation $\alpha \longrightarrow T_\alpha$ de $D(G)$ dans H_∞ . Alors, $E(d)(H_\infty) = T_{\overline{\chi}_d}(H_\infty) \subset H_\infty$ est partout dense dans $H(d)$, donc égal à $H(d)$ si $H(d)$ est de dimension finie. Soit $\alpha \in D^0(G)$; T_α est permutable aux T_k , donc à $E(d)$, donc T_α conserve $H(d)$, donc tout a d'une base de $H(d)$ vérifie une équation $(T_\alpha - \lambda)^n a = 0$. Posant $\theta(g) = (T_g a , b)$, ceci se traduit, si $\alpha \in U^0(G)$, par $(X_\alpha - \lambda)^n \theta = 0$. Si X_α est elliptique, un théorème de Bernstein entraîne que θ est analytique. Pour obtenir un tel α , on part d'un $\alpha \in U(G)$ elliptique, et on forme α^0 qui est encore elliptique.

THÉORÈME 5. - Soit φ une fonction analytique quasi-bornée sur G , telle que $\varphi = \varphi^0$. Alors, φ est proportionnelle à une fonction sphérique de hauteur 1 si et seulement si φ est fonction propre de tout opérateur différentiel X_α , $\alpha \in U^0(G)$.

Si φ est une fonction sphérique de poids 1 , on voit comme pour le théorème 3 que $\varphi(\alpha\beta) = \varphi(\alpha)\varphi(\beta)$ pour $\alpha \in D^0(G)$, $\beta \in D^0(G)$. Fixons $\alpha \in U^0(G)$.

On a $\alpha'\varphi(\beta) = C\,\varphi(\beta)$ pour $\beta \in D^{o}(G)$ (on pose $d\alpha(g^{-1}) = d\alpha'(g)$), donc aussi pour $\beta \in D(G)$ puisque $(\alpha'\varphi)^{o} = \alpha'\varphi$ et $\varphi^{o} = \varphi$. D'où $\alpha'\varphi = C\,\varphi$, ce qui montre que φ est fonction propre de $X_{\alpha'}$.

Réciproquement, supposons $\alpha\varphi = \lambda(\alpha)\varphi$ pour $\alpha \in U^{o}(G)$. Fixons $g' \in G$, et posons $\theta(g) = \int \varphi(gkg'k^{-1})dk$. On a : $\alpha\,\theta(g) = \int \alpha\,\varphi(gkg'k^{-1})dk = \lambda(\alpha)\theta(g)$ pour $\alpha \in U^{o}(G)$. Donc $\theta(\alpha) = \alpha'\theta(e) = \lambda(\alpha')\theta(e)$. De même $\varphi(\alpha) = \lambda(\alpha')\,\varphi(e)$, d'où $\theta(\alpha) = C\,\varphi(\alpha)$ pour toute $\alpha \in U^{o}(G)$, donc pour toute $\alpha \in U(G)$ puisque $\varphi = \varphi^{o}$ et $\theta = \theta^{o}$. Donc $\theta = C\,\varphi$ <u>puisque</u> φ <u>et</u> θ <u>sont analytiques</u>. Alors, $C\,\varphi(g) = \int \varphi(gkg'k^{-1})dk$, et, faisant $g = e$, on trouve $C\,\varphi(e) = \varphi(g')$; d'où $\varphi(g)\,\varphi(g') = \varphi(e)\int \varphi(gkg'k^{-1})dk$, ce qui est l'équation fonctionnelle des fonctions sphériques de hauteur 1 .