

# SÉMINAIRE N. BOURBAKI

ROGER GODEMENT

## Travaux de Hecke, IV

*Séminaire N. Bourbaki*, 1954, exp. n° 80, p. 287-293

[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1951-1954\\_\\_2\\_\\_287\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1951-1954__2__287_0)

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

TRAVAUX DE HECKE, IV,  
par Roger GODEMENT

1. Matrice de transformation.

On désigne par  $M_n$  l'ensemble des matrices  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  à coefficients entiers vérifiant  $ad - bc = n$ . L'ensemble  $M_n$  est un groupe (groupe modulaire "homogène") dont le groupe modulaire  $\Gamma$  est un quotient évident.

On peut faire opérer  $M_n$  à gauche sur  $M_n$  par multiplication ; on dira donc que  $A, B \in M_n$  sont équivalentes si  $A = CB$  avec  $C \in M_n$ , d'où un partage de  $M_n$  en classes d'équivalence.

Dans  $M_n$ , toute classe contient une matrice et une seule de la forme

$$(1) \quad \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \text{ avec } d|n, d > 0, ad = n, 0 \leq b < d;$$

la démonstration de ce fait fort élémentaire est laissée au lecteur bénévole, ainsi que celle de l'assertion suivante, qui en résulte trivialement : le nombre de classes est fini, et égal à  $\sigma_1(n) = \sum_{d|n} d$ .

Si  $n = p$  premier, on peut donc représenter les classes de  $M_p$  par les  $p + 1$  matrices

$$(2) \quad \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & p \end{pmatrix} \quad (0 \leq b < p).$$

2. Opérateurs  $T_k(n)$ .

Soit  $f(z)$  une forme modulaire de dimension  $-k$  <sup>(1)</sup>; comme dans la théorie des fonctions elliptiques posons  $z = \omega_1/\omega_2$   $\omega = (\omega_1, \omega_2)$  et  $F(\omega) = \omega_2^{-k} f(\omega_1/\omega_2)$ ; alors  $F$  devient une fonction de  $\omega$ , homogène et de degré  $-k$ ; la propriété fonctionnelle des formes modulaires de dim  $-k$  revient alors à dire que  $F(\omega)$  est invariable par les substitutions  $\omega \rightarrow M\omega$  pour  $M \in M_n$ .

Si maintenant  $M \in M_n$  il est clair d'après ce qui précède que la fonction  $F(M\omega)$  ne dépend que de la classe de  $M$  au sens du n° 1; vu qu'il n'y a qu'un

---

<sup>(1)</sup> GODEMENT (Roger). - Travaux de Hecke, III, Séminaire BOURBAKI, t. 5, 1952/53.

nombre fini de classes on peut donc former la fonction  $T(n)F$  donnée par

$$T(n)F(\omega) = \sum_{M \in \mathbb{M}_n} F(M\omega)$$

où la sommation est étendue aux classes dans  $\mathbb{M}_n$ . Si  $A \in \mathbb{M}_1$ , et si  $M$  parcourt un système de représentants des classes, il en est évidemment de même de  $MA$ ; on en conclut que la fonction  $T(n)F$  est encore invariante par  $\mathbb{M}_1$ .

Si l'on revient à la forme "non homogène" et si l'on utilise la représentation (1) des classes, on a donc le résultat suivant : soit  $f(z)$  une forme modulaire de dimension  $-k$ ; pour  $n$  entier  $> 0$ , posons

$$(3) \quad T_k(n)f(z) = n^{k-1} \sum_{\substack{ad = n \\ d > 0 \\ b \text{ mod } d}} d^{-k} f\left(\frac{az+b}{d}\right)$$

alors la fonction  $T_k(n)f$  vérifie encore l'identité qui définit les formes modulaires de dimension  $-k$ .

(Le facteur  $n^{k-1}$  figurent dans (3) est là pour simplifier les formules ultérieures).

Il est immédiat de voir qu'en fait  $T_k(n)f$  est encore une forme modulaire "entière", i.e. bornée dans le domaine fondamental, i.e. régulière à l'infini. Pour ce faire, on peut, c'est du reste utile pour la suite, calculer la série de Fourier de  $T_k(n)f$  en fonction de celle de  $f$ . Si  $f(z) = \sum a_p e^{2\pi ipz}$ .

Il vient en utilisant (3) et par des calculs évidents

$$(4) \quad T_k(n)f(z) = \sum b_p e^{2\pi ipz}$$

avec

$$(5) \quad b_m = b(m) = \sum_{d|m, n} d^{k-1} \cdot a\left(\frac{mn}{d^2}\right),$$

somme étendue aux diviseurs communs à  $m$  et  $n$ .

Ceci met en évidence que, si  $a_m = 0$  pour  $m > 0$ , alors  $b_m = 0$  pour  $m > 0$ . En conséquence, les  $T_k(n)$  opèrent dans le vectoriel  $\mathcal{S}_k$  des formes modulaires de dimension  $-k$ .

### 3. Formule de multiplication.

La principale propriété des opérateurs  $T_k(n)$  est de vérifier

$$(6) \quad T_k(m)T_k(n) = \sum_{d|m, n} T_k\left(\frac{mn}{d^2}\right) d^{k-1}.$$

Pour démontrer (6) on peut, comme HECKE, utiliser (3), mais on est alors conduit à des calculs relativement pénibles. Il est beaucoup plus simple d'utiliser (5) en considérant que les  $T_k(n)$  opèrent sur les coefficients de Fourier.

La formule (6) montre évidemment qu'on a la propriété de "multiplicativité restreinte", à savoir

$$(7) \quad T_k(m)T_k(n) = T_k(mn) \quad \text{pour } (m, n) = 1.$$

D'autre part, pour  $p$  premier, on déduit de (6)

$$(8) \quad T_k(p)T_k(p^r) = T_k(p^{r+1}) + p^{k-1}T_k(p^{r-1}).$$

Bien entendu, (6) montre aussi que les combinaisons linéaires des  $T_k(n)$  forment, dans  $\mathfrak{F}_k$ , une algèbre commutative; on montrera plus loin qu'elle est semi-simple.

Considérons maintenant (pour le moment au point de vue purement formel) la série de Dirichlet

$$(9) \quad \Phi(s) = \sum_1^{\infty} T_k(n) \cdot n^{-s};$$

vu (7) on a trivialement

$$\Phi(s) = \prod_p \Phi_p(s) \quad (p \text{ premier})$$

où

$$\Phi_p(s) = \sum_{r=0}^{r=\infty} T_k(p^r) p^{-rs};$$

utilisant (8) on a

$$\begin{aligned} T_k(p)p^{-s} \Phi_p(s) &= \sum T_k(p)T_k(p^r) p^{-(r+1)s} = \sum T_k(p^{r+1}) p^{-(r+1)s} \\ &+ p^{k-1-2s} \sum T_k(p^{r-1}) p^{-(r-1)s} = \Phi_p(s) - 1 + p^{k-1-2s} \Phi_p(s) \end{aligned}$$

d'où résulte que

$$\Phi_p(s) = [1 - T_k(p)p^{-s} + p^{k-1-2s}]^{-1};$$

en conséquence on a l'identité

$$(10) \quad \sum T_k(n)n^{-s} = \prod [1 - T_k(p)p^{-s} + p^{k-1-2s}]^{-1}.$$

#### 4. Série de Dirichlet associée à une forme modulaire.

A toute forme modulaire de dimension  $-k$

$$f(z) = \sum_0^{\infty} a_n \cdot e^{2\pi i n z}$$

associons la série de Dirichlet

$$\varphi(s) = \sum_1^{\infty} a_n \cdot n^{-s} \quad ;$$

cette série possède une abscisse de convergence finie. Tout d'abord, si  $f$  est la série d'Eisenstein

$$G_k(z) = 2 \zeta(k) + 2 \frac{(2\pi i)^k}{\Gamma(k)} \sum \sigma_{k-1}(n) e^{2\pi i n z}$$

(voir le 3e exposé sur les travaux de Hecke) la série de Dirichlet correspondante est, à un facteur constant près,

$$\sum \sigma_{k-1}(n) n^{-s} = \zeta(s) \zeta(s - k + 1)$$

d'où notre assertion dans ce cas. Dans le cas général, et posant  $f(\infty) = a_0$  on peut écrire  $f(z) = a_0 G_k(z)/2 \zeta(k) + g(z)$  où la forme modulaire  $g$  est nulle à l'infini (on dit alors que  $g$  est une "Spitzenform"). Mais les coefficients de Fourier  $a_n$  d'une Spitzenform  $f(z)$  vérifient une relation

$$a_n = O(n^{k/2}) \quad ;$$

en effet, le développement de  $f$  en série entière par rapport à  $e^{2\pi i z}$  contient  $e^{2\pi i z}$  en facteur ; on a donc une relation  $f(z) = O(e^{2\pi i z}) = O(e^{-2\pi y})$  ; comme de plus  $|f(z)| y^{k/2}$  est absolument invariante par  $\Gamma$  on en déduit une relation de la forme  $|f(z)| \leq M \cdot y^{-k/2}$  dans tout le demi-plan. Ecrivant alors que

$$a_n = \int_0^1 f(x + \frac{i}{n}) e^{-2\pi i n(x+i/n)} dx$$

on trouve immédiatement la relation cherchée.

On voit donc que la série de Dirichlet associée à une Spitzenform converge au minimum pour  $\Re(s) > 1 + k/2$ .

Il est facile de calculer  $\varphi(s)$  à l'aide d'une intégrale portant sur  $f(z)$  (de même qu'on passe de la fonction dzêta usuelle à la fonction thêta non moins usuelle ...); pour cela on écrit

$$\Gamma(s) = (2\pi n)^s \int_0^{+\infty} e^{-2\pi n y} y^{s-1} dy$$

d'où

$$(2\pi)^{-s} \Gamma(s) \varphi(s) = \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \int_0^{+\infty} e^{-2\pi n y} y^{s-1} dy$$

et finalement

$$(11) \quad R(s) = (2\pi)^{-s} \Gamma(s) \varphi(s) = \int_0^{+\infty} [f(iy) - f(\infty)] y^{s-1} dy$$

formule valable pour  $\Re(s)$  assez .

Toutes les séries de Dirichlet  $\varphi(s)$  vérifient une équation fonctionnelle analogue à celle de la fonction zêta de Riemann. Pour le voir on écrit, comme d'habitude, (11) sous la forme

$$(12) \quad R(s) = \int_1^{\infty} [f(iy) - f(\infty)] y^{s-1} dy + \int_1^{\infty} [(iy)^k f(iy) - f(\infty)] y^{-s-1} dy$$

(on a utilisé la relation  $f(i/y) = (iy)^k f(iy)$  pour ramener l'intégration de 0 à 1 à une intégrale de 1 à  $\infty$ ) ; posant  $f(iy) = f(\infty) + g(y)$ , on a vu que  $g(y) = O(e^{-2\pi y})$  de sorte que la formule

$$\Psi(s) = \int_1^{\infty} g(y) y^{s-1} dy$$

représente une fonction entière de  $s$  ; de plus (12) s'écrit par des calculs évidents

$$R(s) = \Psi(s) + i^k \Psi(k - s) + f(\infty) \left[ \frac{i^k}{s-k} - \frac{1}{s} \right] ;$$

vu que  $\Gamma(s)$  possède un pôle simple pour  $s = 0$  , on en déduit :

1° que la fonction  $(s - k) \varphi(s)$  est entière, et même que  $\varphi(s)$  est entière si  $f$  est une Spitzenform ;

2° qu'on a l'équation fonctionnelle

$$i^k R(k - s) = R(s) .$$

### 5. Produit scalaire de Petersson.

Pour établir la semi-simplicité des  $T_k(n)$  , que HECKE n'avait pu démontrer, on va utiliser une astuce due à PETERSSON. Soient  $f$  et  $g$  deux formes modulaires de dimension  $-k$  ; il est clair qu'alors la forme différentielle  $f(z) \overline{g(\bar{z})} y^{k-2} dx dy$  est absolument invariante par  $\Gamma$  . Si de plus  $f$  (ou  $g$ ) est une Spitzenform, il est immédiat de vérifier que l'intégrale de cette forme étendue au domaine fondamental usuel est convergente ; vu la propriété d'invariance, cette intégrale ne change d'ailleurs pas quand on le remplace par tout autre domaine fondamental de  $\Gamma$ .

On est donc conduit à introduire, sur le sous-espace  $\mathcal{F}_k^0$  des Spitzenformen (lequel est de codimension 1 dans  $\mathcal{F}_k$  , et évidemment stable par les opérateurs  $T_k(n)$ ) le produit scalaire

$$(f, g) = \iint f(z) \overline{g(\bar{z})} y^{k-2} dx dy ,$$

l'intégrale étant étendue à l'un quelconque des domaines fondamentaux de  $\Gamma$ . Le résultat fondamental est que, relativement à ce produit scalaire, les opérateurs  $T_k(n)$  sont hermitiens, Il suffit d'ailleurs, d'après (7) et (8), de le vérifier pour  $n = p$  premier ; on utilise pour cela des raisonnements très élémentaires (mais assez astucieux) et entre autres le fait suivant : dans l'ensemble  $M_p$  des matrices entières de déterminant  $p$ , on peut faire opérer le groupe modulaire homogène  $M_1$  aussi bien à droite qu'à gauche, d'où deux relations d'équivalence dans  $M_p$  ; cela dit, on peut choisir un système de représentants commun pour ces deux relations.

6. Applications aux séries de Dirichlet.

Les  $T_k(n)$  étant hermitiens engendrent dans  $\mathfrak{G}_k^0$  une algèbre semi-simple ; donc on peut trouver une base de  $\mathfrak{G}_k^0$  formée de fonctions propres des opérateurs  $T_k(n)$ . Or soit  $f(z) = \sum a_n e^{2\pi i n z}$  une telle fonction propre :

$$T_k(n)f = \lambda(n)f \quad \text{pour tout } n ;$$

vu (5) on a donc  $\lambda(n)a(m) = \sum d^{k-1} a(mn/d^2)$  et en particulier

$$a_n = \lambda(n)a_1 ;$$

supposons  $a_1 = 1$ , ce qui est permis ; alors on voit que la série de Dirichlet  $\varphi$  associée à  $f$  n'est autre que

$$\varphi(s) = \sum \lambda(n) \cdot n^{-s} ;$$

comme les  $\lambda(n)$  vérifient évidemment les mêmes formules de multiplication que les  $T_k(n)$  le raisonnement qui nous a conduit à l'identité formelle (10) donne ici pour  $\varphi(s)$  le développement en produit infini

$$\varphi(s) = \prod [1 - \lambda(p)p^{-s} + p^{k-1-2s} p^{-1}].$$

On voit donc que les séries de Dirichlet définies par les formes modulaires de dimension  $-k$ , outre qu'elles vérifient toutes la même équation fonctionnelle, sont des combinaisons linéaires de fonctions possédant un développement en produit infini.

Exemple (Ramanujan) : prenons la fonction

$$\Delta(z) = e^{2\pi i z} \prod (1 - e^{2\pi i n z})^{24} = \sum \tau(n) \cdot e^{2\pi i n z} ;$$

c'est à un facteur constant près la seule forme modulaire de dimension  $-12$  nulle à l'infini ; donc elle doit être fonction propre des  $T_{12}(n)$ , les valeurs propres, vu  $\lambda(n) = a_n/a_1$ , étant nécessairement les  $\tau(n)$ .

En conséquence on a les propriétés suivantes de la série

$$\varphi(s) = \sum \tau(n) \cdot n^{-s} :$$

1° elle vérifie l'équation fonctionnelle disant que

$$(2\pi)^{-s} \Gamma(s) \varphi(s) \quad \text{est invariante par} \quad s \rightarrow 12 - s$$

2° elle admet le développement

$$\varphi(s) = \pi [1 - \tau(p)p^{-s} + p^{11-2s}]^{-1} .$$

Il y a bien entendu pour toutes ces fonctions de nombreuses hypothèses de Riemann à démontrer ...

---