Robert Lattès

Application de la théorie des semi-groupes à l'intégration d'équations aux dérivées partielles

Séminaire N. Bourbaki, 1954, exp. n° 81, p. 295-303

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1951-1954__2__295_0>

Séminaire BOURBAKI
(Mai 1953)

APPLICATION DE LA THÉORIE DES SEMI-GROUPES À L'INTÉGRATION D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

par Robert LATTÈS.

INTRODUCTION. - Soit E un espace de Banach, $\mathcal{L}(E,E)$ l'espace des opérateurs linéaires continus, muni de la topologie de la convergence simple forte ; soit $t \to U(t)$ une représentation continue du semi-groupe R^+ dans $\mathcal{L}(E,E)$ avec $U(0) = I$ (identité) : on se propose d'étudier la différentiabilité de la représentation de ces opérateurs, qui vérifient

(1) $$U(t_1)U(t_2) = U(t_1+t_2) = U(t_2)U(t_1)$$

On supposera en outre que les opérateurs $U(t)$ sont de norme ≤ 1 .

1. $\mathcal{L}(E,E)$ est quasi-complet : on peut donc intégrer, et obtenir des opérateurs qui sont encore dans $\mathcal{L}(E,E)$. Soit μ une mesure à support compact appartenant à $\mathcal{D}'^{\,0}_{L^1}$; posons

(2) $$U(\mu) = \int U(t)d\mu(t)$$

Cette intégrale existe, et l'on a donc

(3) $$U(\mu).x = \int [U(t).x]\, d\mu(t) \quad .$$

Il faut noter que (2) donne

(4) $$U(\delta_t(s)) = U(s) \quad .$$

On a alors les deux résultats suivants :

(5) (a) $U(\mu) \circ U(\nu) = U(\mu * \nu) = \iint U(s+t)d\mu(s)d\nu(t)$

(b) Si μ converge faiblement, dans $\mathcal{D}'$, vers zéro, et si $\int_a^{+\infty} |d\mu(t)|$ reste bornée par $\varepsilon(a)$ qui tend vers zéro quand $a \to \infty$, alors $U(\mu) \to 0$.

DÉFINITION. - Lorsque μ tend ainsi vers zéro, on dira que l'on a la "bonne convergence" .

REMARQUE. - Si les normes des $U(t)$ ne sont pas bornées, on prend $\mu \in \mathcal{E}'^{0}$, on considère $\mathcal{E}'^{0}$ comme le dual de $\mathcal{E}^{0}$, et l'on modifie comme il faut les résultats précédents.

2. Définition de $U(T)$ pour une distribution T .

On note $\mathcal{D}^o$ le sous-espace de $\mathcal{D}$ des fonctions qui ont toutes leurs dérivées nulles pour $t = 0$; α sera un filtre de fonctions de $\mathcal{D}^o$ choisi, une fois pour toutes, avec $\alpha \to \delta$ pour la bonne convergence. Par définition, on notera $E(T)$ le domaine de définition de $U(T)$ c'est-à-dire que $x \in E(T)$ $\Longleftrightarrow \lim_{\alpha} U(T * \alpha).x$ existe, et l'on note cette limite par $U(T).x$.

On a alors les résultats suivants :

(I) Si $\mu \in \mathcal{D}'^o_{L^1}$, $x \in E(\mu * T)$ si et seulement si $U(\mu).x \in E(T)$. Alors $U(T)[U(\mu).x] = U(\mu * T).x$, et ces quantités sont égales à $U(\mu)[U(T).x]$ si $x \in E(T)$.

Il en résulte donc que $E(T)$ est stable par $U(\mu)$, et que sur $E(T)$, les $U(\mu)$ commutent avec $U(T)$.

(II) Si $\lim_{\alpha}$ faible $U(T * \alpha).x$ existe, alors $x \in E(T)$

(III) $U(T)$ est fermé : c'est-à-dire si $x_n \in E(T)$ et $x_n \to x$, et si $U(T).x_n \to y$, alors $x \in E(T)$, et $U(T).x = y$.

Tous ces résultats s'obtiennent en régularisant.

THÉORÈME. - La définition de $E(T)$ et de $U(T).x$ est indépendante de $\{\alpha\}$. Si donc $\mu \to \delta$ au sens de la "bonne convergence" et si $x \in E(T * \mu)$, alors si $x \in E(T)$, $\lim_{\mu} U(T * \mu).x = U(T).x$.

Si $\lim_{\mu} U(T * \mu).x = y$ existe, $x \in E(T)$ et $U(T).x = y$ (utiliser I et III).

3. L'opérateur infinitésimal A .

C'est par définition

$$A = U(-\delta') \tag{6}$$

On note par $E(A)$ son domaine de définition.

THÉORÈME. - $E(A)$ est l'ensemble des x tels que $t \to U(t).x$ soit faiblement dérivable pour $t = 0$, auquel cas elle est fortement continûment dérivable pour tout $t \geq 0$. Et l'on a :

$$A.x = \lim_{h \to 0} h^{-1}[U(h)-I].x \tag{7}$$

De plus, les opérateurs $U(t)$ et A commutent pour $x \in E(A)$.

THÉORÈME. - Si f parcourt l'espace des fonctions sommables sur $(0, +\infty)$ ayant pour dérivée une mesure μ sommable, c'est-à-dire si f est sommable et à variation bornée sur $(0, +\infty)$),

$E(A)$ est exactement l'ensemble des $U(f).\xi$, ξ parcourant E , tels que

$$A[U(f).\xi] = -U(\mu).\xi \tag{8}$$

Pour $\mathcal{R}(\lambda) > 0$, $e^{-\lambda t}$ et sa dérivée sont dans $\mathcal{D}'^{0}_{L^1}$. On a :

$$(\delta' + \lambda\delta) * e^{-\lambda t} = \delta$$

et donc, d'après (1), si $x \in E(A)$:

$$x = U(e^{-\lambda t}).[U(\delta' + \lambda\delta).x] = U(e^{-\lambda t}).\xi \tag{9}$$

Ainsi, $x \in E(A) \Longleftrightarrow x = U(e^{-\lambda t}).\xi$ avec $\xi \in E$.

Lorsque $t \to U(t).x$ est m fois continûment différentiable, $x \in E(T)$ pour toute distribution T , somme finie de dérivées d'ordre $\leqslant m$ de mesures sommables, et l'on a :

$$U(T).x = \int [U(t).x]\, dT_t \qquad \text{(Généralisation de I-(3)).}$$

THÉORÈME. - L'intersection des $E(T)$ est l'ensemble E^{∞} des x tels que $t \to U(t).x$ soit indéfiniment dérivable et $U(T).x = \int [U(t).x]\, dT_t$; E^{∞} contient le sous-espace dense engendré par les $U(\varphi).\xi$ avec $\varphi \in \mathcal{D}^{0}$.

Il convient de remarquer qu'en généralisant la première partie de (I), on a : si $x \in E(T)$, $x \in E(S * T) \Longleftrightarrow U(T).x \in E(S)$, et $U(S * T).x = U(S).[U(T).x]$.

4. L'opérateur $\lambda I - A$ et la résolvante.

THÉORÈME. - Pour $\mathcal{R}(\lambda) > 0$, $\lambda I - A$ est exactement l'inverse de l'opérateur continu $U(e^{-\lambda t})$. Il n'est que de se reporter à la formule (9). Les opérateurs $U(e^{-\lambda t})$ de E sur $E(A)$, et $\lambda I - A$ de $E(A)$ sur E sont réciproques. Et pour $x \in E(A)$:

$$\| -A.x + \lambda x \| \geqslant \mathcal{R}(\lambda)\, \|x\| \tag{10}$$

Par définition, la résolvante sera l'opérateur continu :

$$R(\lambda ; A) = (\lambda I - A)^{-1} = U(e^{-\lambda t}) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\, U(t)\, dt \tag{11}$$

Image de Laplace de $t \to U(t)$, c'est une fonction holomorphe de λ , définie pour $\mathcal{R}(\lambda) > 0$, à valeurs dans $\mathcal{L}(E,E)$, bornée pour $\mathcal{R}(\lambda) \geqslant \varepsilon > 0$. On est maintenant en mesure d'énoncer :

THÉORÈME DE HILLE-YOSIDA. - Si A est le générateur infinitésimal de $t \to U(t)$, représentation de R^+ dans $\mathcal{L}(E,E)$ muni de la topologie de la convergence simple forte, et si les $U(t)$ sont de norme bornée par 1, alors A est fermé, $E(A)$ est dense dans E ; pour $x \in E(A)$ et $\lambda \geqslant 0$, on a

$$(12) \qquad \| -A\,x + \lambda x \| \geqslant \lambda \|x\|$$

et $\lambda I - A$ est l'inverse d'un opérateur continu.

PROBLÈME. - A quelle condition, étant donné un opérateur A avec <u>un</u> domaine de définition $E(A)$, A est-il le générateur infinitésimal d'un semi-groupe, et d'un seul, d'applications $t \to U(t)$, continues de $t \geqslant 0$ dans $\mathcal{L}(E,E)$ (Topologie simple forte) avec $U(0) = I$ et $\|U(t)\| \leqq 1$?

On est alors amené à démontrer la <u>réciproque</u> (fondamentale) du théorème précédent.

PRINCIPE DE LA DÉMONSTRATION. - Appelons J_λ l'opérateur continu $\lambda(\lambda I-A)^{-1}$. $AJ_\lambda .x$ est défini pour tout x, et l'application $x \to AJ_\lambda .x$ est continue ; on peut donc définir $\exp(tAJ_\lambda) = U_\lambda(t)$; l'application $t \to U_\lambda(t)$ est continue de $t \geqslant 0$ dans $\mathcal{L}(E,E)$, et $U_\lambda(t)$ satisfait à la loi de semi-groupe et est borné par I (utilisation en particulier du fait que $AJ_\lambda = \lambda[J_\lambda - I]$.

Pour $x \in E(A)$, $AJ_\lambda .x$ converge vers $A.x$ lorsque $\lambda \to +\infty$. Et quand $\lambda \to \infty$, $\exp(tAJ_\lambda).x$ tend vers une limite $K(t).x$. L'application $t \to K(t)$ est continue de $t \geqslant 0$ dans $\mathcal{L}(E,E)$; la loi de semi-groupe est conservée, $K(t)$ est donc un semi-groupe et l'on a $K(0) = I$ et $\|K(t)\| \leqslant 1$: alors $t \to K(t)$ est un semi-groupe dont le générateur infinitésimal est A, et ce semi-groupe est unique.

5. <u>Les problèmes d'intégration.</u>

Soit E un espace de Banach, de fonctions ou distributions, soit

$$(13) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = A[u]$$

une équation aux dérivées partielles ; A est un opérateur différentiel qui <u>ne dépend pas</u> de t. Soit $E(A)$ <u>un</u> domaine de définition de A : existe-t-il un semi-groupe $U(t)$, et un seul, qui admette A pour générateur infinitésimal dans $E(A)$?

Lorsque ce problème est possible, c'est-à-dire lorsque l'opérateur A vérifie les conditions de la réciproque du théorème de Hille-Yosida, on dira que l'on a <u>résolu</u> l'équation (13) <u>au sens des</u> semi-groupes (on aura des solutions de (13) en faisant opérer $U(t)$ sur les éléments de $E(A)$).

REMARQUE. - Rappelons le problème de Cauchy naturel que l'on se pose pour l'équation (13) : On cherche une solution $u(s,t)$ qui tende vers une fonction donnée $u(s,0) = x(s)$ lorsque $t \to 0$. Ce n'est pas ce problème que l'on s'est posé ici.

Si toutefois il se trouve, étant donné un problème de Cauchy :

1°) que l'équation soit résoluble au sens des semi-groupes ,

2°) que $x(s)$ doit dans $E(A)$,

alors $U(t).x(s)$ sera une solution du problème de Cauchy au sens classique.

EXEMPLE. - L'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \qquad (u = u(s,t)) \tag{14}$$

On cherche $u(s,t)$ dans L^p .

Ici nous avons $A = \frac{d^2}{ds^2}$, et nous allons étudier

$$-\frac{d^2 u}{ds^2} + \lambda u = x(s) \tag{15}$$

Nous prenons comme domaine de définition de A , $L^p(A)$ tel que $u(s)$ et $\frac{d^2u}{ds^2}$ soient dans L^p (donc $\frac{du}{ds}$ est aussi dans L^p) , on suppose $x(s) \in L^p$, et l'on rappelle que $\lambda > 0$, $1 \leqslant p < +\infty$.

Aucune des solutions de l'équation homogène

$$-\frac{d^2 u}{ds^2} + \lambda u = 0 \tag{16}$$

n'est dans L^p : par conséquent, s'il y a une solution de (15) qui corresponde au problème envisagé, elle est unique.

La solution élémentaire de (15) qui est dans L^1 est

$$E = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} e^{-\sqrt{\lambda}\,|s|}$$

Et $u(s) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} e^{-\sqrt{\lambda}\,|s|} \underset{(s)}{*} x \Longrightarrow u(s) \in L^p$

On a :

$$||E||_{L^1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \; e^{-\sqrt{\lambda}\,|s|} ds = \frac{1}{\lambda}$$

Comme $\left(-\frac{d^2}{ds^2} + \lambda\right) * \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} e^{-\sqrt{\lambda}|s|} \underset{(s)}{*} x = x$, alors $-\frac{d^2u}{ds^2} + \lambda u \in L^p$,

donc $\frac{d^2u}{ds^2} \in L^p$.

Comme $||u||_{L^p} \leqslant \frac{1}{\lambda} ||x||_{L^p} = \frac{1}{\lambda} ||-A.u + \lambda u||_{L^p}$, alors :

$$||-Au + \lambda u||_{L^p} \geqslant \lambda ||u||_{L^p}$$

$L^p(A)$ est dense dans L^p , A est fermé ; $A+\lambda$ applique $L^p(A)$ sur L^p . On est donc dans les conditions d'application du théorème de Hille-Yosida: à A correspond un semi-groupe $U(t)$ et un seul. Comme $t \rightarrow U(t).x(s)$ est continûment différentiable de $t \geqslant 0$ dans L^p pour $x \in L^p(A)$, on retrouve par dérivation que $u(t,s) = U(t)x(s)$ vérifie l'équation de la chaleur.

REMARQUE. - Soit la solution de

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} : u(s,t) = 2^{-1}(\pi t)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{s^2}{4t}} \underset{(s)}{*} x$$

qui est de la forme $U(t).x(s)$.

On a

$$U'(t).x = \frac{\partial}{\partial t} U(t).x = \frac{\partial^2}{\partial s^2} U(t).x = \frac{\partial^2}{\partial s^2} 2^{-1}(\pi t)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{s^2}{4t}} \underset{(s)}{*} x =$$

$$= 2^{-1}(\pi t)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{s^2}{4t}} \underset{(s)}{*} x'' = U(t).x''$$

Ce qui montre qu'à partir d'une solution connue mise sous la forme $U(t).x(s)$, on retrouve bien l'opérateur dérivée seconde pour générateur infinitésimal de $U(t)$. Ces formules sont valables si x est une distribution appartenant à $\mathcal{D}'_{L^p}$. Elles montrent bien que $U'(0).x$ est dans L^p si et seulement si x et $x'' \in L^p$; le domaine $E(A)$ est donc bien celui dont nous sommes partis.

6. Les travaux de Yosida.

YOSIDA a utilisé cette méthode pour intégrer les équations de diffusion dans des variétés riemanniennes compactes. On considère un domaine connexe Ω d'un espace de Riemann orientable et indéfiniment différentiable à m dimensions $(m \geqslant 2)$ muni de la métrique $ds^2 = g_{ij}(x)dx^i dx^j$. On montre que sous une condition du type de Lindberg, le processus stochastique homogène par rapport au temps est déterminé par les équations

$$(17) \qquad \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = b^{ij}(x) \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^i \partial x^j} + a^i(x) \frac{\partial f(x,t)}{\partial x^i} \qquad t \geqslant 0$$

$$(18) \qquad \frac{\partial h(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{g(x)}} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} [\sqrt{g(x)}\, b^{ij}(x) h(x,t)] +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{g(x)}} \frac{\partial}{\partial x^i} [\sqrt{g(x)}\, a^i(x) h(x,t)] \qquad \text{avec} \quad t \geqslant 0 \; ;$$

$g(x) = \det(g_{ij}(x))$ et $b^{ij}(x)$, tenseur contravariant symétrique, est supposé tel que $b^{ij}(x)\xi_i\xi_j$ soit > 0 pour $\sum_i \xi_i^2 > 0$; $a^i(x)$ est supposé tel que les opérateurs différentiels elliptiques des deuxièmes membres de (17) et (18) soient formellement adjoints et ne dépendent pas des coordonnées locales ; on suppose également que $a^i(x)$, $b^{ij}(x)$, $g_{ij}(x)$ sont des fonctions indéfiniment différentiables des coordonnées locales. Alors :

1°) A $f(x)$ indéfiniment différentiable dans Ω, il correspond une solution unique $f(x,t)$ de (17) telle que

$\lim_{t \to 0} f(x,t) \to f(x)$ uniformément en x et

$\min_x f(x) \leqslant f(x,t) \leqslant \max_x f(x)$ $\quad (\max_x f(x,t) = \max_x f(x)$ si $f(x) \geqslant 0$

2°) A $h(x)$ indéfiniment différentiable dans Ω, il correspond une solution unique $h(x,t)$ de (18) telle que

$\lim_{t \to 0} \int_\Omega |h(x,t) - h(x)|dx = 0$ $\quad (dx = g(x)dx^1 \ldots dx^m$; $g(x) = \det_{ij}(x)$.) et

$\int_\Omega |h(x,t)|dx \leqslant \int_\Omega |h(x)|dx$ $\quad$ (où $h(x,t) \geqslant 0$ et $\int_\Omega h(x,t)dx = \int_\Omega h(x)dx$ si $h(x) \geqslant 0$).

3°) On peut sous certaines conditions résoudre (18) avec une condition aux limites.

Pour démontrer ces résultats, il faut utiliser une paramétrix de

$$A = A_x = b^{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + a^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} + e(x)$$

où $e(x)$ est une fonction indéfiniment différentiable.

Si A' est l'opérateur adjoint à A, on peut dès lors montrer, en appliquant le théorème de Hille-Yosida qu'à A (resp. A') il correspond un semi-groupe et un seul $U(t)$ (resp. $V(t)$) de $C(\Omega) \to C(\Omega)$ (resp. $L'(\Omega) \to L'(\Omega)$). Les solutions, lorsqu'elles existent au sens des semi-groupes, pour (17) et (18) s'obtiennent donc en faisant opérer sur $f(x)$ (resp. $h(x)$) les opérateurs $U(t)$ (resp. $V(t)$) dont on démontre qu'ils sont opérateurs de transition.

7. Les travaux de Feller.

FELLER a étudié sur la droite les équations aux dérivées partielles qui sont de type parabolique :

$$u_t = a(x)u_{x^2} + b(x)u_x + c(x)u \tag{19}$$

$$v_t = \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial}{\partial y}[a(y)v] - b(y)v\right\} + c(y)v \; . \tag{20}$$

Les opérateurs différentiels intervenant dans les deuxièmes membres de ces équations sont formellement adjoints l'un de l'autre. Il est alors naturel de résoudre ces équations dans des espaces conjugués. On prendra respectivement C et L^1.

Résolvant alors ces équations au sens des semi-groupes, FELLER pose en fait le problème suivant : Etant donné les opérateurs A (et A'), trouver tous les semi-groupes (ou les semi-groupes ayant une propriété donnée, par exemple celle d'être des semi-groupes d'opérateurs de transition) dont le générateur infinitésimal soit une restriction de A : c'est-à-dire si $E(A)$ est un domaine de définition de A, trouver un semi-groupe dont l'opérateur infinitésimal ait pour domaine un sous-espace de $E(A)$ où il coïncide avec A. FELLER est alors amené à caractériser les divers semi-groupes ainsi attachés à un opérateur donné ; et il précise en particulier le genre de problème que l'on résout lorsque l'on revient à l'équation initiale en considérant ces divers semi-groupes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] HILLE (Einar). - Functionnal analysis and semi-groups, - New York, Amer. math. Soc., 1948 (Amer. math. Soc. Coll. Publ., vol. 31).

[2] HILLE (Einar).- Integration problem for Fokker-Planck's equation in the theory of stochastic processes. - Congrès des Mathématiciens scandinaves [11. 1949. Trondheim], Oslo, 1952, p. -

[3] YOSIDA (Kosaku). - On the differentiability and the representation of one-parameter semi-group of linear operators, J. math. Soc. Japan, t. 1, 1949, p. 15-21.

[4] YOSIDA (Kosaku). - An operator-theoretical treatment of temporally homogeneous Markoff process, J. math. Soc. Japan, t. 1, 1949, p. 244-253.

[5] YOSIDA (Kosaku). - Integration of Fokker-Planck's equation in a compact Riemannian space, Ark. för Mat., t. 1, 1949, p. 71-75.

[6] YOSIDA (Kosaku). - On the existence of the resolvent kernel for elliptic differential operator in a compact Riemann space, Nagoya math. J., t. 4, 1952, p. 63-72.

[7] YOSIDA (Kosaku). - On the fundamental solution of the parabolic equation in a Riemannian space, Osaka math. J., t. 5, 1953, p. 65-74.

[8] YOSIDA (Kosaku). - On the integration of diffusion equations in Riemannian spaces, Proc. Amer. math. Soc., t. 3, 1952, p. 864-873.

[9] FELLER (William). - The parabolic differential equations and the associated semi-groups of transformations, Ann. of Math., t. 55, 1952, p. 468-519.

[10] BOURBAKI (Nicolas). - Livre VI, Intégration, chapitre III, paragraphe 4, Intégrales de fonctions vectorielles continues. - Paris, Hermann, 1952 (Eléments de Mathématiques, fascicule 13).