JEAN-PIERRE SERRE

Espaces fibrés algébriques

Séminaire N. Bourbaki, 1954, exp. nº 82, p. 305-311
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1951-1954__2__305_0>

Séminaire BOURBAKI
(Mai 1953)

ESPACES FIBRÉS ALGÉBRIQUES

par Jean-Pierre SERRE

(d'après André WEIL [4] , [5]).

Dans ce qui suit, nous munirons toute variété algébrique V (sur un corps de caractéristique quelconque) de la topologie de Zariski : une partie F de V est fermée si elle est réunion finie de sous-variétés de V . Tout recouvrement de V sera supposé fini, et formé d'ensembles ouverts au sens de la topologie précédente.

Nous dirons "application" au lieu de "application rationnelle".

1. Définition des espaces fibrés.

Elle s'obtient en remplaçant dans la définition usuelle de la topologie les mots "application continue en un point x " par "application rationnelle définie en un point x " . Plus précisément :

Soient V une variété, (V_i) un recouvrement de V , G une variété de groupe (au sens de [3] , p. 17), et, pour tout couple (i , j), une application g_{ij} de V dans G , définie en tout point de $V_i \cap V_j$; supposons que les g_{ij} vérifient la relation $g_{ik} = g_{ij} \cdot g_{jk}$; soit d'autre part F une variété sur laquelle G opère à gauche (autrement dit, on se donne une application $(g , y) \longrightarrow gy$ de $G \times F$ dans F , partout définie, et telle que $ey = y$, $(gh)y = g(hy)$). Pour tout couple (i , j) considérons la correspondance entre $V_i \times F$ et $V_j \times F$ qui transforme (x , y) en $(x , g_{ji}(x)y)$; la variété X , obtenue à partir des $V_i \times F$ en identifiant les points correspondants, est dite espace fibré de fibre F, groupe G , base V , définie par les g_{ij} . On a une projection canonique p de X sur V , partout définie. On observera que X est birationnellement équivalent à $V \times F$ (mais pas birégulièrement, en général).

Prenons en particulier $F = G$, G opérant sur lui-même par translations à gauche ; l'espace fibré P ainsi obtenu est appelé principal ; G opère à droite sur P . Deux espaces principaux P_1 et P_2 sont dits isomorphes s'il existe entre eux une correspondance birégulière commutant aux opérations de G et compatible avec les projections sur V . Deux espaces fibrés sont dits isomorphes si les espaces principaux correspondants sont isomorphes.

Si (W_α) est un recouvrement plus fin que (V_i) , on voit tout de suite que les restrictions des g_{ij} aux $W_\alpha \cap W_\beta$ définissent un espace fibré principal isomorphe à l'espace initial. Ceci permet (en prenant l'intersection de deux recouvrements) de ne considérer que des g_{ij} relatifs au <u>même</u> recouvrement (V_i) ; alors, pour que (g_{ij}) et (g'_{ij}) définissent des espaces fibrés isomorphes, il faut et il suffit qu'il existe des applications h_i de V dans G , définies en tout point de V_i , et telles que $g'_{ij} = h_i^{-1}.g_{ij}.h_j$.

Nous noterons $A(V, G)$ l'ensemble des classes d'espaces fibrés de base V et groupe G ; cet ensemble possède un élément "neutre" correspondant à l'espace trivial $V \times G$. Si G est abélien, $A(V, G)$ est un groupe abélien. Nous déterminerons plus loin $A(V, G)$ dans certains cas particuliers.

Enfin, on a la notion de <u>quasi-section</u> : c'est une application f de V dans l'espace fibré X , telle que $p \circ f = 1$; l'image de V par f est une sous-variété W de X telle que la restriction de p à W soit une transformation birationnelle de W sur V . Par définition même des espaces fibrés, il existe une quasi-section définie en un point donné de V . Une quasi-section définie en <u>tout</u> point de V est appelée une <u>section</u>. Pour qu'un espace principal soit trivial, il faut et il suffit qu'il possède une section. Tout espace fibré de base une courbe sans singularités, et de fibre une variété <u>complète</u> possède une section (en effet, toute application de la courbe dans la fibre est évidemment définie en tout point). Pour la même raison, tout espace fibré de base une variété sans singularités, et de fibre une variété abélienne, possède une section (appliquer le théorème 6, p. 27, de [3]) ; en particulier, tout espace fibré principal de groupe une variété abélienne est trivial lorsque la base n'a pas de singularités.

2. <u>Classification de certains espaces fibrés</u>.

Il est commode de remplacer les g_{ij} par la notion suivante :

Soit P un espace principal de base V , groupe G , et choisissons une quasi-section s de P . Pour tout $x \in V$, soit s_x une quasi-section de P , définie au point x ; il existe une application g_x de V dans G telle que $s = s_x g_x$, ce que nous écrirons $g_x = s_x^{-1} s$. En outre nous pouvons supposer que seulement un nombre fini des s_x (donc des g_x) sont distincts. Les g_x vérifient la propriété suivante :

(1) <u>Pour tout</u> x , <u>il existe un ouvert</u> V_x , <u>avec</u> $x \in V_x$, <u>tel que</u> $g_x . g_y^{-1}$ <u>soit défini en tout point de</u> $V_x \cap V_y$.

(Prendre pour V_x l'ensemble des points où s_x est défini, et observer que $g_x . g_y^{-1} = s_x . s_y$).

Changer la quasi-section s revient à changer g_x en $g_x . g$, où g est une application de V dans G ; changer s_x revient à changer g_x en $h_x . g_x$, où h_x est une application de V dans G , définie en x . Comme les g_x déterminent évidemment P , on a ainsi mis en correspondance biunivoque l'ensemble $A(V , G)$ avec l'ensemble des classes d'équivalence de systèmes (g_x) vérifiant (1) , pour la relation d'équivalence : $g_x \sim h_x . g_x . g$, h_x défini en x .

REMARQUES. - 1) Si V est une courbe, la condition (1) est automatiquement vérifiée (prendre pour V_x la réunion de $\{ x \}$ et de l'ensemble des points où tous les g_y sont définis).

2) On peut supposer sans restreindre la généralité que $g_x = e$ pour tout x d'un ouvert non vide de V .

EXEMPLE 1. - $G = G_m$, groupe multiplicatif du corps, et V est une variété de dimension n , sans sous-variétés multiples de dimension $n-1$.

On peut parler du diviseur D des (g_x) (cela a un sens, grâce à la condition (1)) ; changer g_x en $h_x . g_x$ ne change pas D ; changer g_x en $g_x . g$ change D en $D + (g)$; enfin, D est localement le diviseur d'une fonction. On obtient ainsi un isomorphisme de $A(V , G_m)$ sur le groupe quotient du groupe des diviseurs localement linéairement équivalents à 0 par le sous-groupe des diviseurs linéairement équivalents à 0 . En particulier si V est sans points multiples tout diviseur est localement linéairement équivalent à 0 , et $A(V , G_m)$ est isomorphe au groupe des classes de diviseurs de V , au sens de l'équivalence linéaire.

La correspondance entre P et D peut aussi être définie comme suit : soit F la droite projective sur laquelle G_m opère par $x \longrightarrow cx$, et soit X l'espace fibré de fibre F , de base V , associé à P . L'espace X possède deux sections V_0 et V_∞ qui correspondent aux points 0 et ∞ de F , laissés fixes pour G_m . Soit Z une quasi-section distincte de V_0 et de V_∞ ; on pose alors $D = pr(V_0 . Z - V_\infty . Z)$.

EXEMPLE 2. - $G = G_a$, groupe additif du corps, et V est une courbe complète sans singularités.

Soit ω une forme de première espèce sur V , et posons, pour tout système g_x :

$\langle \omega , g_x \rangle = \sum_{x \in V} \mathrm{Res}_x (g_x \omega)$, où Res_x désigne le résidu au point x . La formule des résidus montre que $\langle \omega , g_x \rangle = \langle \omega , g'_x \rangle$ si g'_x est équivalent à g_x ; ceci définit une forme bilinéaire sur le produit de $A(V , G_a)$ par l'espace $\Omega(V)$ des formes de première espèce sur V , et il est classique (cf. [1] , par exemple) que cette forme bilinéaire met en dualité les deux espaces précédents. Donc $A(V , G_a)$ <u>est un espace vectoriel de dimension égale au genre de la courbe</u> V .

EXEMPLE 3. - G <u>est le groupe affine</u> $x \longrightarrow ax + b$, <u>et</u> V <u>est une courbe complète sans singularités</u>.

Les éléments de G sont les couples (a , b) , avec la loi de multiplication $(a , b).(a' , b') = (aa' , b + ab')$. L'homomorphisme $G \longrightarrow G_m$ applique $A(V , G)$ sur $A(V , G_m)$; nous allons chercher quelle est l'image réciproque d'un élément donné de $A(V , G_m)$, c'est-à-dire d'une classe de diviseurs. Cela revient à examiner les systèmes (g_x) , où $g_x = (a_x , b_x)$, les (a_x) étant donnés. On constate alors que b_x et b'_x sont équivalents si l'on peut passer de l'un à l'autre par les opérations : $b'_x = \lambda . b_x$ (λ constant) , $b'_x = b_x + a_x . b$, $b'_x = b_x + h_x$, où h_x est défini en x . Si l'on ne tient compte que des deux dernières opérations, on obtient un espace vectoriel isomorphe à $\mathfrak{X} / (\mathfrak{X}(- \mathfrak{A}) + R)$, avec les notations de [1] , p. 26 , $\mathfrak{A}$ désignant le diviseur des (a_x) ; cet espace est en dualité avec l'espace des différentielles $> \mathfrak{A}$; soit $i(\mathfrak{A})$ sa dimension. On obtient ainsi :

<u>Soit</u> $\mathfrak{A}$ <u>un diviseur de</u> V . <u>L'image réciproque de la classe de</u> $\mathfrak{A}$ <u>dans</u> $A(V , G)$ <u>est formée de la réunion d'un élément "nul" (qui correspond à</u> $b_x = 0$ <u>pour tout</u> x) <u>et d'un espace projectif de dimension</u> $i(\mathfrak{A}) - 1$.

EXEMPLE 4. - G <u>est un groupe de matrices, et</u> V <u>est une courbe complète sans singularités</u>.

Les éléments de $A(V , G)$ correspondent biunivoquement aux classes de "diviseurs matriciels" sur V , définies et étudiées dans [2] .

3. <u>Quelques exemples d'espaces fibrés</u>.

Les plus importants sont les espaces fibrés à <u>fibre vectorielle</u>. Lorsque V est complète, leurs sections forment un espace vectoriel de dimension finie (sur lequel on sait du reste fort peu de choses, mis à part le cas des courbes).

On peut effectuer sur les fibres de ces espaces toutes les opérations tensorielles : on obtient encore des espaces fibrés algébriques.

EXEMPLE 1. - Soit D un diviseur de V, supposée sans sous-variétés multiples de dimension $n-1$; D définit comme on l'a vu une classe d'espaces fibrés de groupe G_m, donc une classe d'espaces fibrés à fibre vectorielle de dimension 1 ; soit X l'un de ces espaces. On voit immédiatement que les sections de X correspondent biunivoquement aux fonctions f sur V telles que $(f) \succ -D$, donc la dimension de l'espace de ces sections est égale à $1 + \dim |D|$, en notant $|D|$ la série linéaire complète contenant D.

Si l'on a deux diviseurs D_1 et D_2, correspondants aux espaces X_1 et X_2, le diviseur $D_1 + D_2$ correspond à l'espace fibré dont la fibre est le produit tensoriel des fibres de X_1 et X_2 ; de même l'opération $D \longrightarrow -D$ correspond au passage au dual.

EXEMPLE 2. - Si V est sans points multiples, on peut définir l'espace fibré des vecteurs tangents à V, d'où l'espace des différentielles de degré p. Les sections de ce dernier espace sont les formes de première espèce sur V, de degré p. Ces espaces conduisent à la définition des classes canoniques de V, introduites par EGER-TODD (cf. un mémoire de S.S. CHERN [6]).

4. Quelques questions.

1) Comment peut-on classer les espaces fibrés de fibre une droite projective (autrement dit, les variétés réglées) ? Même lorsque la base est une courbe, la réponse n'est pas connue.

2) Que donne la classification des espaces fibrés de groupe $ax + b$ lorsque la base est une surface ? L'analogie avec le cas "analytique" semble indiquer que $i(\mathfrak{a})$ doit alors être remplacé par la "superabondance" du diviseur $\mathfrak{a}$.

3) Si la caractéristique est 0 et si V est sans singularités, on peut supposer que le domaine universel est le corps C des complexes, et V devient une variété analytique complexe. Soit $H(V, G)$ l'ensemble des classes d'espaces fibrés analytiques de base V et groupe G, et soit φ l'application canonique de $A(V, G)$ dans $H(V, G)$. Il paraît très probable que φ est biunivoque ; par contre lorsque G est une variété abélienne, φ n'applique pas $A(V, G)$ sur $H(V, G)$ même lorsque V est une courbe. L'application φ est-elle un isomorphisme lorsque $G = G_m$ ou G_a ?

4) Lorsque G est abélien, $A(V, G)$ peut être interprété comme le premier

groupe de cohomologie de V à valeurs dans le faisceau $\mathcal{F}_G$ des applications rationnelles de V dans G, définies au point considéré. Que donnent les groupes de cohomologie supérieurs ? La question se pose aussi pour des faisceaux plus généraux ; par exemple le théorème de Riemann-Roch est étroitement lié au faisceau des fonctions f dont le diviseur est, en un point x, supérieur à $-D$ (D, diviseur donné).

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHEVALLEY (Claude). - Introduction to the theory of algebraic functions of one variable. - New York, American mathematical Society, 1951. Mathematical Surveys, n° 6.

[2] WEIL (André). - Généralisation des fonctions abéliennes. J. Math. pures et appl., 17, 1938, p. 47-87.

[3] WEIL (André). - Variétés abéliennes et courbes algébriques. - Paris, Hermann, 1948. Act. scient. et ind. n° 1064.

[4] WEIL (André). - Fibre spaces in algebraic geometry, Conference on algebraic geometry and algebraic number theory. - Chicago, Chicago University, 1949; p. 55-59.

[5] WEIL (André). - Fibre spaces in algebraic geometry (Notes by A. Wallace, 1952). - University of Chicago, 1955.

[6] CHERN (S.S.). - On the characteristic classes of complex sphere bundles and algebraic varieties, Amer. J. of Math., t. 75, 1953, p. 565-597.

ADDITIF

Les questions posées au paragraphe 4 ont été plus ou moins complètement résolues. Pour la question 1, voir :

ATIYAH (M.). - Complex fibre bundles and ruled surfaces, Proc. London math. Soc., t. 5, 1955, p. 407-434.

Voir aussi le rapport de

CHERN (S.S.). - Complex manifolds, Scientific report on the second summer institute : Several complex variables, Bull. Amer. math. Soc., t. 62, 1956, p. 101-117.

On a en outre une classification complète des espaces fibrés à fibre vectorielle et de base une courbe de genre 0 (GROTHENDIECK) ou 1 (ATIYAH). La réponse à la question 2 est évidemment affirmative, puisque l'on sait maintenant que la superabondance d'un diviseur α sur une surface S est égale à $\dim H^1(S, \mathcal{L}(\alpha))$. Les questions posées dans 3 ont également été résolues affirmativement ; voir :

SERRE (Jean-Pierre). - Géométric algébrique et géométrie analytique, Ann. Inst. Fourier, t. 6, 1956, p. 1-42.

Pour la question 4 (relations entre le théorème de Riemann-Roch et la théorie des faisceaux), renvoyons au rapport de

ZARISKI (Oscar). - Algebraic sheaf theory, Scientific report on the second summer institute : Several complex variables, Bull. Amer. math. Soc., t. 62, 1956, p. 117-141.

[Avril 1957]