

# SÉMINAIRE N. BOURBAKI

ANDRÉ WEIL

## Sur la théorie du corps de classes

*Séminaire N. Bourbaki*, 1954, exp. n° 83, p. 313-315

<[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1951-1954\\_\\_2\\_\\_313\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1951-1954__2__313_0)>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LA THÉORIE DU CORPS DE CLASSES

par André WEIL

On notera  $A_k$  l'extension abélienne maximale d'un corps de nombres  $k$  (extension de  $\mathbb{Q}$  de degré fini) ; par  $I_k$  le groupe des idèles de  $k$ , muni de sa topologie "naturelle" ; par  $P_k$  le groupe des idèles principaux ; par  $C_k = I_k/P_k$  le groupe des classes d'idèles de  $k$  ; par  $D_k$  la composante connexe de l'élément neutre de  $C_k$ . Le théorème fondamental de la théorie du corps de classes établit un isomorphisme canonique entre  $G'_k$ , groupe de Galois de  $A_k$  sur  $k$ , et  $C_k/D_k$ .

On ne connaît pas actuellement d'interprétation arithmétique de  $C_k$  lui-même, analogue à celle que fournit le théorème en question pour  $C_k/D_k$ . Ou en d'autres termes : alors que la théorie du corps de classes permet d'identifier les caractères du groupe  $C_k/D_k$  avec les coefficients des séries  $L$  liées à la décomposition des idéaux premiers de  $k$  dans les extensions **cycliques** de  $k$ , on ne connaît (sauf dans un petit nombre de cas particuliers, cf. [4]) aucune interprétation analogue pour les caractères de  $C_k$ , non égaux à 1 sur  $D_k$ .

En attendant de telles interprétations, on peut se demander si divers résultats relatifs aux groupes  $G'_k$ , évidents ou du moins faciles à démontrer en raison de la définition de ces derniers comme groupes de Galois, peuvent se "remonter" aux groupes  $C_k$ . Par exemple : si  $K$  est une extension galoisienne de degré fini de  $k$ , et qu'on désigne par  $g(K/k)$  son groupe de Galois, le groupe de Galois  $G'_{K,k}$  de  $A_K$  sur  $k$  est une certaine extension de  $G'_K$  (sous-groupe) par  $g(K/k)$  (groupe quotient), complètement déterminée. Est-il possible, de même, de déterminer d'une manière unique une extension  $G_{K,k}$  de  $C_K$  par  $g(K/k)$  au moyen de propriétés intrinsèques ? Ceci, naturellement, impliquera entre autres l'existence d'une classe de systèmes de facteurs (classe de cohomologie !) privilégiée déterminant (à un isomorphisme près) la structure de l'extension en question.

La réponse est affirmative. Plus précisément, le mémoire [3], qui fait l'objet du présent exposé, définit, pour chaque couple  $k, K$  de corps tels qu'il a été dit ci-dessus, (a) un groupe topologique  $G_{K,k}$  localement compact, et même produit direct d'un groupe isomorphe à  $\mathbb{R}$  et d'un groupe compact ; (b) un isomorphisme  $f$  de  $C_K$  sur un sous-groupe invariant fermé de  $G_{K,k}$  ; (c) un homomorphisme  $\psi$  de  $G_{K,k}$  sur le groupe de Galois  $G'_{K,k}$  de  $A_K$  sur  $k$ , de

manière que :

1. Le noyau de  $\varphi$  soit  $f(D_K)$ , image par  $f$  de la composante connexe de l'élément neutre dans  $C_K$ .

2.  $\varphi \circ f$  soit l'homomorphisme canonique de  $C_K$  sur le groupe de Galois de  $A_K$  sur  $K$ , résultant de la théorie du corps de classes pour  $K$ .

3. Il y ait entre les groupes  $G_{K,k}$  et  $G_{K,k'}$ , chaque fois que  $k'$  est intermédiaire entre  $k$  et  $K$ , et entre les groupes  $G_{K,k}$  et  $G_{K',k}$  chaque fois que  $K'$  est une extension de  $K$  galoisienne de degré fini sur  $k$ , les relations auxquelles on s'attend a priori ( $G_{K,k'}$  s'identifiant avec un sous-groupe de  $G_{K,k}$ , et  $G_{K,k}$  avec un groupe quotient de  $G_{K',k}$ , exactement de la même manière que les groupes de Galois correspondants).

4. Le "transfert"  $t$  (Verlagerung) de  $G_{K,k}$  dans  $C_K$  induise sur  $C_k$  le "bon" isomorphisme de  $C_k$  dans  $C_K$  et d'autre part détermine, après passage au quotient, le "bon" isomorphisme de  $G'_{K,k}$  dans  $G'_k$ .

Le problème ainsi posé a une solution et une seule, à un isomorphisme près. La démonstration est pénible et d'ailleurs peu intéressante (elle conduit toutefois à analyser, de plus près qu'il n'avait été fait jusque là, la structure des groupes intervenant dans la question, et en particulier à la détermination complète de la structure de la composante connexe  $D_k$ ). Les conditions imposées déterminent en particulier d'une manière unique une certaine classe de systèmes de facteurs de  $g(K/k)$  dans  $C_K$ ; cette classe peut d'ailleurs aussi être caractérisée d'une manière plus simple, par des propriétés de nature plus algébrique et moins arithmétique (cf. les travaux de HOCHSCHILD et NAKAYAMA); mais la connaissance de cette classe, si elle détermine la structure du groupe  $G_{K,k}$  à un isomorphisme près, n'est cependant pas équivalente à la résolution du problème posé plus haut, puisqu'elle laisse encore subsister une indétermination dans le choix de l'homomorphisme ci-dessus désigné par  $\varphi$ .

L'analogie entre les propriétés de  $G_{K,k}$  et celles du groupe de Galois  $G'_{K,k}$  peut être poussée plus loin; on peut notamment définir, à des automorphismes intérieurs près, des sous-groupes de  $G_{K,k}$ , attachés respectivement aux idéaux premiers de  $k$ , et qui ont des propriétés tout à fait analogues à celles des groupes de décomposition et d'inertie dans  $G'_{K,k}$ , des valuations de  $A_K$  prolongeant les valuations attachées aux idéaux premiers de  $k$ . Cette définition permet de transporter, presque changement, la théorie d'Artin relative aux séries  $L$  "non-abéliennes"

et à la décomposition des séries L ordinaires sur K (celles qui sont attachées aux extensions cycliques de K) en produits de séries L "non-abéliennes" sur k. Exactement de même, on obtient ici une décomposition en facteurs des séries L de Hecke sur K (formées au moyen des caractères de  $C_K$  non égaux à 1 sur  $D_K$ ), les facteurs étant attachés aux classes de représentations du groupe  $G_{K,k}$ . Ici encore, par application du théorème de Brauer, on démontre que ces facteurs sont des fonctions partout méromorphes (vraisemblablement même des fonctions entières) ; celles-ci satisfont naturellement à des équations fonctionnelles, dont la détermination explicite (sauf en ce qui concerne les facteurs constants qui y figurent) vient d'être obtenue par TAMAGAWA [1] et [2].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] TAMAGAWA (Tsuneo). - On the theory of ramification groups and conductors, Japan. J. of Math., t. 21, 1951, p. 197-215.
- [2] TAMAGAWA (Tsuneo). - On the functional equation of the generalized L-function, J. Fac. Sc. Univ. Tokyo, Sect. 1, t. 6, 1953, p. 421-428.
- [3] WEIL (André). - Sur la théorie du corps de classes, J. math. Soc. Japan, t. 3, 1951, p. 1-35. [Cet article contient une bibliographie].
- [4] WEIL (André). - Jacobi sums as "Grössencharaktere", Trans. Amer. math. Soc., t. 73, 1952, p. 487-495.