HENRI CARTAN

Fonctions et variétés algébroïdes

Séminaire N. Bourbaki, 1954, exp. nº 84, p. 319-326
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1951-1954__2__319_0>

Séminaire BOURBAKI
(Décembre 1953)

FONCTIONS ET VARIÉTÉS ALGÉBROIDES

par Henri CARTAN

d'après HIRZEBRUCH [2] .

1. Notions générales.

Pour comprendre l'exacte portée des problèmes résolus par Hirzebruch dans des cas particuliers, il est bon de dégager d'abord quelques notions générales.

On suppose connue la notion de variété analytique complexe. Il s'agit de la généraliser, de manière à inclure éventuellement des singularités internes d'un certain type. On introduit d'abord, à titre auxiliaire, l'espace $\mathcal{E}_n$ de tous les germes de diviseurs irréductibles de l'espace numérique complexe C^{n+1} (un germe de diviseur irréductible, en un point $a \in C^{n+1}$, est défini par la donnée d'un germe de fonction holomorphe φ au point a , défini à la multiplication près par une fonction holomorphe $\neq 0$, φ étant supposée irréductible). On définit sur $\mathcal{E}_n$ une topologie évidente. Un point de $\mathcal{E}_n$ est dit régulier si le diviseur correspondant peut être défini par l'annulation d'une des coordonnées locales (pour un choix convenable des coordonnées locales au point a considéré). L'ensemble des points réguliers de $\mathcal{E}_n$ est un ouvert partout dense de $\mathcal{E}_n$, et est muni d'une structure de variété analytique complexe de dimension n . Pour tout ouvert $U \subset \mathcal{E}_n$, on appelle fonction holomorphe dans U toute fonction f à valeurs complexes, définie et continue dans U , qui est holomorphe aux points réguliers de $\mathcal{E}_n$.

Soient U un ouvert de $\mathcal{E}_n$ et U' un ouvert de $\mathcal{E}_p$; une application analytique de U dans U' est, par définition, une application continue $g : U \to U'$ telle que, pour tout point $a \in U$ et tout germe φ de fonction holomorphe en $g(a) \in U'$, $\varphi \circ g$ soit un germe holomorphe au point $a \in U$. En particulier, g sera un isomorphisme analytique si g est un homéomorphisme de U sur U' (ce qui exige $n = p$), et si g et g^{-1} sont analytiques.

DÉFINITION 1. - Un espace analytique général de dimension n (ou simplement espace analytique) est un espace topologique séparé X , muni d'un recouvrement par des ouverts U_i , et muni en outre, pour chaque i , d'un homéomorphisme f_i de U_i sur un ouvert $V_i \subset \mathcal{E}_n$, de manière que, pour $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, $f_j \circ (f_i)^{-1}$ soit un "isomorphisme analytique" de $f_i(U_i \cap U_j) \subset V_i$ sur $f_j(U_i \cap U_j) \subset V_j$.

La notion d'"espace analytique général" généralise celle de variété analytique complexe. Tout sous-ensemble ouvert d'un espace analytique est évidemment muni d'une structure d'espace analytique. On a une définition évidente de la notion de fonction holomorphe sur un espace analytique, ainsi que de la notion d'application analytique d'un espace analytique X dans un espace analytique Y ; d'où en particulier la notion d'isomorphisme de deux espaces analytiques.

Un point d'un espace analytique X (de dimension n) est uniformisable s'il possède un voisinage ouvert isomorphe à un ouvert de C^n . L'ensemble des points uniformisables est un ouvert, qui porte une structure de variété analytique complexe. Soit f un isomorphisme d'un ouvert $V \subset X$ sur un ouvert $U \subset \mathcal{E}_n$; tout $a \in V$ tel que $f(a)$ soit régulier est uniformisable, mais la réciproque n'est pas vraie (exemple : pour $n = 1$, dans l'espace C^2 , le diviseur défini par $x^2 - y^3 = 0$ définit un ouvert $V \subset \mathcal{E}_1$; le germe défini à l'origine par ce diviseur n'est pas un point régulier de $\mathcal{E}_1$, néanmoins c'est un point uniformisable de V , considéré comme espace analytique général).

DÉFINITION 2. - Un sous-ensemble Y d'un espace analytique général X est appelé sous-ensemble analytique si :

1° Y est fermé dans X ;

2° au voisinage de chaque point $a \in Y$, Y peut être défini par l'annulation d'un nombre fini de "fonctions holomorphes" au voisinage de a .

Il est classique que le "germe de sous-ensemble" défini par Y au point $a \in Y$ est réunion d'une famille finie de germes irréductibles, et que l'on peut définir, sur l'ensemble de tous les germes irréductibles définis par Y , une structure d'espace analytique général. Cet espace analytique, associé à, Y , sera noté $\tilde{Y}$; l'application $\tilde{Y} \longrightarrow X$ qui, à chaque germe de Y en l'un de ses points y , associe le point $y \in X$, est propre et analytique. Dans cette application, l'image de chaque composante connexe de $\tilde{Y}$ est ce qu'on appelle une composante irréductible du sous-ensemble analytique Y . Si toutes les composantes convexes de $\tilde{Y}$ sont de dimension $\leq p$, on dit que le sous-ensemble analytique Y est de dimension $\leqslant p$; si $\tilde{Y}$ est connexe de dimension p , on dit que Y est de dimension p .

On peut démontrer, en utilisant [5] : si X est un espace analytique de dimension n , l'ensemble des points non uniformisables de X est un sous-ensemble analytique de dimension $\leqslant n - 2$. En particulier, tout espace analytique de dimension 1 est une (véritable) variété analytique complexe.

2. Réduction des singularités.

PROBLÈME 1. - Soit donné un espace analytique général X, de dimension $n \geqslant 2$. On cherche une variété analytique complexe (i.e : un espace dont tous les points sont uniformisables) X', et une application analytique f de X' sur X satisfaisant aux conditions suivantes :

(a) f est propre (i.e. : l'image réciproque d'un compact est un compact) ;

(b) si R désigne l'ensemble des points uniformisables de X, la restriction de f à l'ensemble ouvert $f^{-1}(R)$ est un isomorphisme de $f^{-1}(R)$ sur R.

On ignore si ce problème admet toujours une solution.

HIRZEBRUCH le résout lorsque X est de dimension 2. Alors les points non uniformisables sont isolés ; l'image réciproque f^{-1} d'un tel point est un sous-ensemble analytique compact de X' ; on dit qu'on a fait "éclater" le point.

Il se pose une question d'unicité : peut-on trouver une solution "minimum" du problème 1, c'est-à-dire telle que, pour toute autre solution (X_1', f_1), il existe une application analytique $g : X_1' \rightarrow X'$ satisfaisant à $f_1 = f \circ g$? Cette question, dans le cas $n = 2$, n'est pas complètement résolue par HIRZEBRUCH.

Soit Y un sous-ensemble analytique (définition 2) d'une variété analytique complexe X. Un point $y \in Y$ est dit régulier si l'on peut choisir les coordonnées locales de l'espace X (au point y) de manière que, au voisinage de y, Y soit défini par l'annulation de certaines coordonnées locales. Un point non régulier de Y est dit singulier. L'ensemble des points réguliers de Y est ouvert et dense dans Y ; l'ensemble des points singuliers de Y est un sous-ensemble analytique de X. Soit $\tilde{Y}$ l'espace analytique associé à Y ; il est clair qu'un point régulier de Y est l'image d'un point unique de $\tilde{Y}$, qui est uniformisable ; mais l'image d'un point uniformisable de $\tilde{Y}$ n'est pas nécessairement un point régulier de Y. Lorsque tous les points de Y sont réguliers, on dit que Y est une sous-variété analytique de X (on identifie Y et $\tilde{Y}$).

PROBLÈME 2. - Soient donnés une variété analytique complexe X et un sous-ensemble analytique Y. On cherche une variété analytique complexe X', une sous-variété analytique $Y' \subset X'$, et une application analytique f de X' sur X, jouissant des propriétés suivantes :

(α) f est propre ;

(β) l'image $f(Y')$ est Y ;

(γ) si S désigne l'ensemble des points singuliers de Y, la restriction de f à $X' - f^{-1}(S)$ est un isomorphisme sur $X - S$.

HIRZEBRUCH résout le problème 2 quand X est de dimension 2 et Y de dimension 1. Alors les points de S sont isolés : l'image réciproque f^{-1} d'un point de S est un sous-ensemble analytique compact de X'.

Le problème 2 est en rapport étroit avec le fameux problème de la "réduction des singularités" d'une variété algébrique Y dans un espace projectif X.

3. Eclatement : procédé de Hopf [3].

Soit 0 l'origine de C^n $(n \geqslant 2)$: on va faire éclater le point 0 dans C^n, en substituant à 0 un espace projectif complexe $P_{n-1}(C)$. D'une façon précise : soit G le graphe de l'application canonique de $C^n - \{0\}$ sur $P_{n-1}(C)$; dans l'espace-produit $X = C^N \times P_{n-1}(C)$, la réunion X' du graphe G et de l'ensemble $\{0\} \times P_{n-1}(C)$ est une sous-variété analytique de dimension n (sans singularité) : car soit $(a_1, \dots, a_n)$ un système de coordonnées homogènes d'un point $a \in P_{n-1}(C)$, et supposons par exemple $a_1 \neq 0$; les points de X voisins de $(0, a)$ sont définis par $2n - 1$ coordonnées locales $z_1, \dots, z_n$; $x_2, \dots, x_n$; les points de X' sont ceux pour lesquels

$$(1) \qquad z_i = z_1 x_i \qquad (2 \leqslant i \leqslant n) ;$$

donc $z_1, x_2, \dots, x_n$ constituent un système de coordonnées locales pour la variété analytique complexe X'.

Les formules (1) montrent que la projection de l'espace $C^n \times P_{n-1}(C)$ sur son premier facteur C^n induit une application analytique f de X' sur C^n. Il est clair que $f^{-1}(0)$ est isomorphe à $P_{n-1}(C)$, et que la restriction de f à G est un isomorphisme de G sur $C^n - \{0\}$. En outre, l'application f est propre.

Soit maintenant φ un isomorphisme analytique d'un voisinage ouvert $U_1 \subset C^n$ sur un ouvert U_2 de C^n, avec $0 \in U_1$, $0 \in U_2$, $\varphi(0) = 0$. Alors il existe un isomorphisme analytique φ' et un seul de $X_1' = f^{-1}(U_1)$ sur $X_2' = f^{-1}(U_2)$, tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} X'_1 \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[d, "f_1"] & X'_2 \arrow[d, "f_2"] \\ U_1 \arrow[r, "\varphi"] & U_2 \end{tikzcd}$$

où f_1 (resp. f_2) désigne la restriction de f à X'_1 (resp. X'_2). Il en résulte que l'opération d'éclatement peut se définir en un point 0 d'une variété analytique complexe V de dimension n : on choisit des coordonnées locales pour la définir comme ci-dessus, et le résultat obtenu est indépendant du choix des coordonnées locales. L'espace projectif $P_{n-1}(C)$, substitué au point 0 par éclatement, s'identifie canoniquement à l'espace des directions tangentes à V au point 0.

Ceci conduit à une extension du procédé précédent : soit W une sous-variété analytique (sans singularité) de dimension p, dans une variété V de dimension n. On introduit, en chaque point $a \in W$, l'espace T_a des éléments plans de dimension $p+1$, tangents à V et contenant l'élément plan de dimension p tangent à W ; T_a est isomorphe à $P_{n-p-1}(C)$. La réunion des T_a $(a \in W)$ a une structure de variété analytique complexe W', de dimension $n-1$, fibrée par $P_{n-p-1}(C)$, de base W. On peut alors définir une variété analytique complexe V' de dimension n, contenant W', et une application analytique f de V' sur V, qui applique W' sur W (de façon précise, $f(T_a) = \{a\}$, et f est telle que la restriction de f à $V' - W'$ soit un isomorphisme sur $V - W$). On dit que le couple (V', f) est obtenu par un éclatement de Hopf le long de W.

Le processus d'éclatement peut être itéré un nombre quelconque de fois. Par exemple, soit $f_1 : V_1 \to V$ obtenu par éclatement de V en un point $a_1 \in V$; prenons un point $a_2 \in f_1^{-1}(a_1)$, et soit $f_2 : V_2 \to V_1$ obtenu par éclatement de V_1 en a_2 ; prenons un point $a_3 \in f_2^{-1}(a_2)$, etc.

En général, on dira qu'une application analytique f d'un espace analytique X' de dimension n sur un espace analytique X de dimension n est un éclatement si f est propre, et s'il existe un sous-ensemble analytique $S \subset X$, de dimension $\leqslant n-1$, tel que la restriction de f à $f^{-1}(X-S)$ soit un isomorphisme sur $X - S$. On dit alors que f est un éclatement relatif à S.

Soit un éclatement $f : X' \to X$, relatif à un sous-ensemble analytique $S \subset X$, et soit Y un sous-ensemble analytique de X dont aucune composante irréductible ne soit contenue dans S. L'image réciproque $f^{-1}(Y)$ est un sous-ensemble analytique de X' ; mais on peut aussi définir une image réciproque restreinte $f^*(Y)$, comme suit : considérons les composantes irréductibles de $f^{-1}(Y)$ dans X', et parmi elles celles non contenues dans $f^{-1}(S)$; la réunion de ces dernières est le sous-ensemble analytique $f^*(Y)$ cherché ; $f^*(Y)$ est aussi l'adhérence, dans X', de $f^{-1}(Y - Y \cap S)$. On voit que $f^{-1}(Y)$ est réunion des deux sous-ensembles analytiques $f^*(Y)$ et $f^{-1}(Y \cap S)$.

Transitivité : soit $g : X'' \to X'$ un éclatement relatif à $S' \subset X'$, et supposons $f(S') \subset S$; alors $h = f \circ g$ est un éclatement de X relatif à S. Soit Y un sous-ensemble analytique de X dont aucune composante n'est contenue dans S ; alors aucune composante de $f^*(Y)$ n'est contenue dans S' et l'on peut considérer $g^*(f^*(Y))$. On démontre que

(2) $$g^*(f^*(Y)) = h^*(Y) .$$

4. Les résultats de Hirzebruch.

THÉORÈME 1. - Soit X une variété analytique de dimension 2, Y un sous-ensemble analytique de dimension 1, S l'ensemble des points singuliers (isolés) de Y. On peut faire éclater X aux points de S (par un procédé de Hopf itéré) de manière que, en désignant par $f : X' \to X$ l'application d'éclatement, l'ensemble $f^*(Y)$ soit une sous-variété (sans point singulier dans X')

Ceci constitue évidemment une solution du problème 2 dans le cas des dimensions envisagées.

D'autre part, HIRZEBRUCH démontre :

THÉORÈME 2. - Le problème I a toujours une solution pour $n = 2$.

Pour le démontrer, il suffit de considérer le cas où l'espace analytique X, de dimension 2, possède un seul point non uniformisable $\underline{a}$. Au voisinage de $\underline{a}$, X est isomorphe à $\check{Y}$, où Y désigne un sous-ensemble analytique dans un ouvert U de C^3 contenant l'origine $0 \in Y$; tous les points de Y sont réguliers sauf l'origine 0 (qui correspond à $\underline{a}$). On peut supposer que U est un produit

$$(x , y) \in V , \qquad |z| \leqslant \ell ,$$

V désignant un ouvert de C^2. Soit W la sous-variété $z = 0$ dans U. HIRZEBRUCH prouve, en utilisant le théorème 1 :

LEMME. - Il existe un éclatement $g : U' \to U$ relatif à W, tel que $g^{-1}(Y) = Y'$

ait un nombre fini de points singuliers au voisinage de chacun desquels Y' est isomorphe à un germe

$$z^p = x^{p-q}y \qquad (1 \leq q < p\ , \quad q \text{ premier à } p) \tag{3}$$

au voisinage de l'origine de C^3 .

Pour achever de résoudre le problème 1 pour X , il suffit de résoudre le problème 1 pour le germe (3) au voisinage de l'origine (point non uniformisable). Pour cela, on considère, dans C^3 , l'ensemble analytique Z défini par (3),,et on résout le problème 2 : on cherche un éclatement $\varphi : A \to C^3$ relatif à S (défini par $x = 0$, $z = 0$) tel que $\varphi^*(Z)$ soit une sous-variété (sans singularité) de A . Ceci est possible : on le voit en utilisant un algorithme d'Euclide :

$$p = b_1 q - r_2 \qquad (0 \leq r_2 < b_1)$$

$$q = b_2 r_2 - r_3 \qquad (0 \leq r_3 < r_2)$$

$$\cdots$$

$$r_{s-1} = b_s\, r_s\ .$$

A chacune de ces opérations on associe un éclatement de Hopf itéré. Ce processus topologique correspond à un processus algébrique indiqué en 1908 par JUNG [4] .

EXEMPLE. - $p = 5$, $q = 2$. Faisons d'abord un éclatement de Hopf le long de $x = z = 0$: cela revient à poser $x/z = u$, u étant le paramètre complexe (pouvant être infini) de la droite projective introduite en chaque point où $x = z = 0$. Dans l'image réciproque restreinte de $z^5 - x^3y = 0$, les points singuliers correspondent à $u = 0$, $z = 0$: ce sont les points singuliers de la surface

$$z^2 - u^3y = 0\ .$$

On fait un nouvel éclatement de Hopf, en posant $z/u = t$; t reste fini, et on trouve

$$t^2 - uy = 0\ ,$$

avec le point singulier isolé $t = 0$, $u = 0$, $y = 0$. On fait un éclatement de Hopf en ce point ; alors l'image réciproque restreinte n'a que des points réguliers.

Dans le cas général de la surface (3), considérons l'éclatement composé $\varphi : A \to C^3$, et l'éclatement $\psi : B \to Z$ induit par φ sur $B = \varphi^*(Z)$. HIRZEBRUCH explicite la variété analytique B (de dimension 2), qui est réunion d'un nombre fini d'ouverts B_i pour chacun desquels on a des coordonnées locales u_i , v_i et une expression explicite de l'application ψ_i (restriction de ψ à

B_i). Ceci rejoint l'ancien point de vue de Jung : il est possible de couvrir un voisinage de l'origine, dans Z, par un nombre fini d'ouverts pour chacun desquels on a une représentation paramétrique à l'aide des variables u_i, v_i de B_i.

De plus, Hirzebruch, par un raisonnement subtil, montre que l'éclatement $\psi : B \longrightarrow Z$ qu'il définit explicitement, a un caractère universel : tout autre éclatement qui résout le point non uniformisable de Z est composé d'un éclatement $B' \longrightarrow B$ et de ψ (Voir [2] p. 18).

5. Les points d'indétermination d'une fonction méromorphe.

Soit m une fonction méromorphe sur un espace analytique X : cela signifie que m s'écrit localement comme quotient de deux fonctions holomorphes. Si $f : X' \longrightarrow X$ est un éclatement, $m \circ f$ est évidemment une fonction méromorphe sur X'. Supposons que X soit de dimension 2, et que l'on ait choisi l'éclatement f de manière que X' soit une (véritable) variété analytique de dimension 2. La fonction $m \circ f = g$ peut avoir des points d'indétermination isolés. On démontre qu'avec des éclatements de Hopf itérés, on peut faire disparaître les points d'indétermination de f.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BEHNKE (H.) und STEIN (K.). - Modifikation komplexer Mannigfaltigkeiten und Riemannscher Gebiete, Math. Annalen, t. 124, 1951, p. 1-16.

[2] HIRZEBRUCH (Friedrich). - Über vierdimensionale Riemannsche Flächen mehrdeutiger analytischer Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen, Math. Annalen, t. 126, 1953, p. 1-22.

[3] HOPF (Heinz). - Über komplexanalytische Mannigfaltigkeiten, Rend. Mat. e Appl., Série 5, t. 10, 1951, p. 169-182.

[4] JUNG (Heinrich W. E.). - Darstellung der Funktionen eines algebraischen Körpers zweier unabhängigen Veränderlichen x, y in der der Umgebung einer Stelle $x = a$, $y = b$, J. für reine und angew. Math., t. 133, 1908, p. 289-314.

[5] ZARISKI (O.). - Algebraic surfaces. - New-York, Chelsea publishing company, 1948 (Reproduction de Ergebnisse der Mathematik ..., Dritter Band, 5, Année 1935). Chapitre 1.

ADDITIF

Sur la théorie des "éclatements, voir :

HOPF (Heinz)..- Schlichte Abbildungen und lokale Modifikationen 4-dimensionaler komplexer Mannigfaltigkeiten, Comm. Math. Helv., t. 29, 1955, p. 132-156.

[Juin 1957]