PIERRE SAMUEL

Variété de Picard et groupe de Severi (Exposé des résultats géométriques contenus dans la thèse de A. Néron)

Séminaire N. Bourbaki, 1954, exp. n° 53, p. 31-35

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1951-1954__2__31_0>

Séminaire BOURBAKI
(Décembre 1951)

VARIÉTÉ DE PICARD ET GROUPE DE SEVERI

[Exposé des résultats géométriques contenus dans la Thèse de A. NÉRON [1]]

par Pierre SAMUEL

1. Rappel de diverses notions.

Etant donnée une variété algébrique V de dim n , on dit qu'un diviseur D de V (= combinaison linéaire à coefficients entiers de sous-variétés de dim $n-1$ de V) est algébriquement (resp. linéairement) équivalent à 0 , s'il existe une variété U (resp. un espace projectif U) , deux points a , a' de U , et une sous-variété W de $V \times U$ tels que

$$D = pr_V ((V \times (a - a')).W) .$$

On peut prendre pour U une courbe (resp. une droite). Les diviseurs algébriquement (resp. linéairement) équivalents à zéro forment un sous-groupe $G_a(V)$ (resp. $G_\ell(V)$) du groupe $G(V)$ des diviseurs de V . On a $G_\ell(V) \subset G_a(V) \subset G(V)$.

On dit qu'une variété algébrique A est une variété abélienne s'il existe une loi de composition sur A , à formules rationnelles, partout définie, qui fasse de A un groupe, et si A est complète (par exemple une variété projective, ou une sous-variété d'un produit d'espaces projectifs). On montre alors que cette loi est commutative et que toute application rationnelle d'une variété abélienne dans une autre est un homomorphisme suivi d'une translation. Les seules variétés abéliennes de dim 1 sont les courbes elliptiques. Sur le corps complexe, les variétés abéliennes sont des tores de dimension (réelle) paire.

Considérons une courbe C et une variété abélienne J ayant les propriétés suivantes : il existe une application rationnelle f de C dans J ; si k est un corps de définition commun à C , J et f , et si $M_1 ,\dots, M_{\dim(J)}$ sont des points génériques indépendants de C sur k , alors le point $z = \sum_i f(M_i)$ de J est générique sur k et $k(z)$ est le sous-corps de $k(M_1 ,\dots, M_{\dim J})$ invariant par les permutations des M_i . Alors J est déterminée de façon unique par C , et dim J est le genre g de C . On montre (WEIL, CHOW) qu'il existe de telles variétés abéliennes J (définies sur le plus

---

[1] NÉRON (André). – Problèmes arithmétiques et géométriques rattachés à la notion de rang d'une courbe algébrique dans un corps, Bull. Soc. math. France, t. 80, 1952, p. 100-166 (Thèse Sc. math. Paris 1951).

petit corps de définition def(C) de C). J est appelée la <u>jacobienne</u> de C , et f la <u>fonction canonique</u> sur C . On montre que J est "variété abélienne universelle" de C (toute application rationnelle C $\longrightarrow$ variété abélienne étant composée de f et d'un homomorphisme). Il existe une application "symétrisante" de C^g sur J . Etant donné un diviseur a de degré 0 de C , on note $S(f(a))$ le point $\sum_i n_i f(a_i)$ de J (addition sur J) , où les a_i sont des points de C et les n_i des entiers tels que $a = \sum_i n_i a_i$ (addition des cycles) ; ceci définit un homomorphisme de $G_o(C)$ (groupe des diviseurs de degré 0) sur J ; son noyau est $G_\ell(C)$; ainsi $J = G_o/G_\ell$.

2. <u>Le dévissage de</u> $G(\mathcal{C})$.

Considérons une courbe C définie sur un corps K de la forme $K = k(M)$; soit P un point générique de C sur K ; l'étude de C (avec K pour corps de base) est équivalente à celle de son "lieu sur k" , c'est-à-dire la variété $\mathcal{C} = L_k(M \times P)$ qui a $M \times P$ pour point générique sur k (C est essentiellement une courbe dont l'équation dépend de paramètres). La variété $\mathcal{M} = L_k(M)$ est la "base" de $\mathcal{C}$; $\mathcal{C}$ se projette sur $\mathcal{M}$; d'où une espèce de fibration de $\mathcal{C}$; en général, la fibre au-dessus de $M' \in \mathcal{M}$ est la spécialisation C' de C sur k prolongeant $M \longrightarrow M'$; mais ces fibres ne sont pas birationnellement équivalentes entre elles ; il y en a même de décomposées, ou de dimension > 1 ; mais les C' sont presque toujours des courbes. Soit J(M) la jacobienne de $C = C(M)$ et f_M la fonction canonique ; soit Q un point générique de J(M) sur K ; alors la variété $\mathcal{J} = L_k(M \times Q)$ est "fibrée" de base $\mathcal{M}$; pour presque tout $M' \in \mathcal{M}$, la fibre J(M') est la jacobienne de C(M') , et $f_{M'}$ (déduite de f_M par spécialisation) est la fonction canonique correspondante. Un truc technique permet de supposer $\mathcal{M}$, $\mathcal{C}$, et $\mathcal{J}$ normales.

Toute variété est birationnellement équivalente à une variété fibrée du type de $\mathcal{C}$. Ceci permettra d'étendre divers résultats démontrés pour $\mathcal{C}$ à des variétés générales.

Considérons maintenant le mirifique diagramme de HASSE suivant :

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r] & H_\ell \arrow[r] & H_a \arrow[r] & H_o \arrow[r] & G \\
H' \arrow[u] & G_\ell \arrow[u] \arrow[r] & G_a \arrow[u] & & \\
H'_\ell \arrow[u] \arrow[ur] \arrow[d] & & & & \\
H'_a \arrow[uu, bend left] \arrow[uurr] & & & &
\end{tikzcd}$$

où G est le groupe des diviseurs sur $\mathcal{C}$, H_o le sous-groupe de ceux qui induisent un diviseur de degré 0 sur chaque fibre, H celui des diviseurs "verticaux" (dont la projection sur $\mathfrak{M}$ est $\neq \mathfrak{M}$) , H' celui des images réciproques par projection des diviseurs de $\mathfrak{M}$; $H_a = H + G_a$, $H_\ell = H + G_\ell$; $H'_a = H' \cap G_a$ et $H'_\ell = H' \cap G_\ell$. Le groupe H/H' est de type fini ; H'/H'_a (resp. H'/H'_ℓ) est isomorphe à un quotient de $G(\mathfrak{M})/G_a(\mathfrak{M})$ (resp. $G(\mathfrak{M})/G_\ell(\mathfrak{M})$) , groupes sur lesquels on peut avoir des renseignements, soit par récurrence sur la dimension, soit en prenant pour base une variété linéaire. Donc dans les suites :

$$G_a \longrightarrow H' + G_a \longrightarrow H_a \longrightarrow H_o \longrightarrow G$$

$$G_\ell \longrightarrow H' + G_\ell \longrightarrow H_\ell \longrightarrow H_o \longrightarrow G$$

on connaît tous les quotients successifs, sauf H_o/H_a et H_o/H_ℓ . Reste donc à étudier : $H_\ell \longrightarrow H_a \longrightarrow H_o \longrightarrow G$.

3. La variété abélienne H_a/H_ℓ .

Considérons un sous-corps F du domaine universel, isomorphe à celui-ci, et tel que le domaine universel soit de degré de transcendance infini dessus. Nous appellerons F-points, F-variétés, F-cycles, des points, variétés, cycles rationnels sur F ; isomorphisme général des "F-machins" sur les "machins". On suppose $k \subset F$. Soit M un point générique de $\mathcal{C}$ sur F .

A tout F-diviseur $A \in H_o$, on fait correspondre le diviseur a induit sur $C(M)$ $(M \times a = A.(M \times C(M))$, puis $z = g(A) = S(f_M(a))$ dans $J(M)$, et enfin la variété $Z = L_k(M \times z)$. L'application g est un homomorphisme de H_o^F dans $J(M)$; son image est l'ensemble J' des points de $J(M)$ rationnels sur $F(M)$; son noyau est H_ℓ^F (H_o^F est l'ensemble des F-diviseurs contenus dans H_o , idem pour H_ℓ^F , H_a^F) ; tout ceci est facile.

Cherchons l'image I de H_a^F ; tout point de I peut être joint à l'élément neutre par une "variété" paramétrée par les F-points d'une F-variété, en vertu de la définition de l'équivalence algébrique ; en regardant les sous-groupes de J' engendrés par de telles variétés paramétrées, et leurs dimensions, on montre que I est la plus grande variété paramétrée de J' contenant l'élément neutre ; soit V une F-variété paramétrant I ; elle est définie sur $\bar{k}$; soit P un point générique de V sur $\bar{k}$. Les coordonnées homogènes du point correspondant de I sont de la forme $p_i(M , P) = \sum_\alpha m_\alpha(M)x_{i\alpha}(P)$, où les $m_\alpha(M)$ sont des monômes de même degré en les coordonnées homogènes de M et les $x_{i\alpha}(P)$ des formes de même degré (définies sur $\bar{k}$) en les coordonnées homogènes de P ; en prenant un système maximal de $m_\alpha(M)$ linéairement indépendants sur F, les $x_{i\alpha}(P)$ sont déterminés de façon unique par les $p_i(M ; P)$. Soit A la variété ayant $(x_{i\alpha}(P))$ pour point générique homogène sur $\bar{k}$; elle est en correspondance biunivoque avec I ; par transport de structure l'addition sur I donne sur A une loi de composition (rationnelle) définie sur $\bar{k}$; et (moyennant une normalisation) ceci fait de A une <u>variété abélienne</u>. Ainsi H_a/H_ℓ <u>est une variété abélienne</u>.

REMARQUES. - 1) Comme une variété abélienne est un groupe infiniment divisible, H_a/H_ℓ est facteur direct de H_o/H_ℓ.

2) H_a/H_ℓ est un quotient de G_a/G_ℓ par un sous-groupe voisin de $G(\mathfrak{M})/G_\ell(\mathfrak{M})$. On est donc très près de la solution du problème de la "<u>variété de Picard</u>" qui consiste à montrer que, pour toute variété U, $G_a(U)/G_\ell(U)$ est une variété abélienne. Ce problème est résolu pour les courbes (jacobienne) et pour les variétés complexes sans singularités (IGUSA).

CONSÉQUENCE. - On voit par dévissage que les sous-groupes des éléments d'ordre s (s entier) de G/G_ℓ et G/G_a sont <u>finis</u>. Ceci s'étend à une variété quelconque.

4. <u>Le théorème de Severi</u>.

Il affirme que, <u>pour toute variété</u> U, $G(U)/G_a(U)$ <u>est un groupe de type fini</u>. NÉRON en donne la première démonstration algébrique (et valable en toutes caractéristiques). D'abord on récurre sur la dimension, on se ramène à un modèle du type $\mathcal{C}$, et on dévisse. Reste à montrer que H_o/H_a est de type fini. Pour cela on montre deux choses :

a) En posant $h = H_o/H_\ell$, h/sh <u>est fini</u>.

b) <u>Il existe des</u> $Z_k^{(o)}$ <u>en nombre fini dans</u> h <u>tels que, quel que soit</u> $Z \in h$, <u>et si l'on définit par récurrence des</u> Z_n <u>de</u> h <u>tels que</u> $Z_{n-1} = sZ_n + Z_{k(n)}^{(o)}$, $Z_1 = Z$, <u>alors on peut trouver</u> n <u>tel que</u> Z_n <u>rentre dans un système fini donné de classes</u> mod H_a/H_ℓ.

Ceci montre que H_o/H_a a un nombre fini de générateurs (les classes des $Z_k^{(o)}$ et les classes données). Cette méthode est inspirée de la méthode de "descente infinie" de la thèse de WEIL.

La démonstration de a) est de la technique fine des variétés abéliennes. Dans b) on prend pour $Z_k^{(o)}$ des représentants des classes de h/sh (plus quelques autres pour raisons techniques). La démonstration de b) est aussi hautement technique. Remarquons que, d'après le début du n° 3, on peut interpréter les Z de la formule $Z_1 = sZ_2 + Z^{(o)}$ comme des sous-variétés de $\mathcal{J}$, de même dimension que $\mathfrak{M}$, et d'indice de projection 1 sur $\mathfrak{M}$ (autrement dit des "sections" de la variété fibrée $\mathcal{J}$). On prend un diviseur convenable sur la jacobienne générique son lieu X. On montre alors que $pr_{\mathfrak{M}}((Z_1 - (s^2 - 1)Z_2).X)$ est linéairement équivalente à un diviseur A de $\mathfrak{M}$, dont un lemme ingénieux de la théorie des multiplicités d'intersection montre qu'il est $\leqq A_o$, diviseur positif indépendant de Z_1. Si d_n est le degré de $pr_{\mathfrak{M}}(Z_n . X)$ on en déduit

$$d_{n-1} - (s^2 - 1)d_n \leqq a \quad (\text{nombre fixe}) .$$

D'où $d_n \leqslant d_1(s^2 - 1)^{-n} + a(1 + (s^2 - 1)^{-1} + \dots + (s^2 - 1)^{-n})$. Donc, quel que soit le Z d'où l'on est parti, on peut trouver n tel que $d_n \leqslant b$, b étant un entier fixe. Or on a pu prendre pour X l'intersection de $\mathcal{J}$ avec une hypersurface de degré élevé, mais donné une fois pour toutes. Ainsi l'on peut trouver n tel que $d^o(Z_n)$ soit borné par un nombre donné. Mais les cycles positifs de degré donné d'une variété se répartissent dans un nombre fini de systèmes algébriques irréductibles (CHOW). Ceci démontre b) (car les cycles d'un système algébriquement irréductible sont algébriquent équivalents entre eux).

APPLICATION. - Soit C une courbe définie sur une extension de type fini K du corps premier ; alors le groupe J_K des points de la jacobienne de C qui sont rationnels sur K est de type fini.

Lorsque K est un corps de nombres algébriques, ceci est le théorème de WEIL. En général $K = k(M)$, k étant algébrique sur le corps premier. On considère le lieu $\mathcal{C}$ de C sur k. Le raisonnement du n° 3 montre que J_K est isomorphe à $H_o(k)/H_\ell(k)$ (on désigne par $H(k)$ l'ensemble des diviseurs du groupe H qui sont rationnels sur k). Or H_o/H_a est de type fini. D'autre part (3) $H_a(k)/H_\ell(k)$ est l'ensemble des points d'une variété abélienne qui sont rationnels sur k ; leur nombre est fini en caractéristique $p \neq 0$; lorsque $p = 0$, c'est un groupe de type fini d'après le théorème de WEIL.

ADDITIF

Le théorème d'existence de la variété de Picard d'une variété normale quelconque a été démontré depuis cet exposé indépendamment par A. NERON et le conférencier par T. MATSUSAKA, par W.L. CHOW, etc.

[Mai 1957]